BARBARA PILECKA

Le prolongement de la solution de l'équation de translation

1. Introduction. Considérons un groupe $(G, \cdot)$ pour lequel e est un élément neutre. Soit $(\tilde{G}, \cdot)$ un sur-groupe de $(G, \cdot)$, Γ un ensemble, $\tilde{\Gamma}$ un sur-ensemble de Γ et $F\colon \Gamma\times G\to\Gamma$ une fonction qui est une solution de l'équation de translation

$$F(F(\alpha, x_1), x_2) = F(\alpha, x_1\cdot x_2)\,. \tag{1.1}$$

Dans cette note nous profiterons à plusieurs reprises, du théorème prouvé par Z. Moszner dans son travail [3] c'est-à-dire

THÉORÈME 1. *La solution génerale de l'équation* (1.1) *est la famille des fonctions de la forme suivante*:

$$F(\alpha, x) = g_k^{-1}(g_k(f(\alpha)x)) \quad pour \quad f(\alpha)\in\Gamma_k \tag{1.2}$$

où:

a) *f est une fonction arbitraire définie sur l'ensemble Γ telle que*

$$f(f(\alpha)) = f(\alpha) \quad pour \quad \alpha\in\Gamma\,,$$

b) *$\{\Gamma_k\}_{k\in K}$ est une décomposition* *) *de l'ensemble $f(\Gamma)$ telle que,*

c) *il existe pour chaque $k\in K$ un sous-groupe G_k de G tel que $\overline{\overline{\Gamma}}_k = \overline{\overline{G/G_k}}$, où G/G_k est la famille des classes d'équivalence à droite du groupe G par rapport à un sous-groupe G_k,*

d) *la fonction g_k est une bijection de l'ensemble Γ_k sur la famille G/G_k.*

Les sous-groupe G_k dans c) que nous appellerons les sousgroupes de stabilité de la solution F et les ensembles Γ_k fibres transitives.

Soit $\bar{F}\colon \Gamma\times G\to\Gamma$ solution de l'équation (1.1). Désignons par $\bar{f}$, $\{\bar{\Gamma}_i\}_{i\in I}$, $\bar{G}_i$ et $\bar{g}_i$ les paramètres de la fonction $\bar{F}$ qui la déterminent dans la forme (1.2). Dans la suite nous profiterons aussi du

THÉORÈME 2. *La condition*

$$F(\alpha, x) = \bar{F}(\alpha, x) \quad pour \quad (\alpha, x)\in\Gamma\times G \tag{1.3}$$

*) La famille $\{A_t\}_{t\in T}$ des ensembles nonvides, disjoints et tels que $A = \bigcup_{t\in T} A_t$ nous l'appellerons la décomposition de l'ensemble A.

est équivalente au système des conditions:

a) $\bigwedge_{\alpha \in \Gamma} f(\alpha) = \bar{f}(\alpha)$,

b) $\bigwedge_{k \in K} \bigvee_{b_k \in G} \bigvee_{i \in I} (G_k = b_k^{-1} \bar{G}_i b_k \wedge \Gamma_k = \bar{\Gamma}_i \wedge g_k(\alpha) = b_k^{-1} \bar{g}_i(\alpha))$,

c) $\bar{\bar{K}} = \bar{I}$.

Si la fonction F remplit la condition d'identité, c'est-à-dire

$$\bigwedge_{\alpha \in \Gamma} (F(\alpha, e) = \alpha) \tag{1.4}$$

et $\bar{\bar{K}} = 1$, la démonstration du théorème 2 se trouve dans la note [4] (p. 240 et 241). Il est facile de démontrer le théorème 2 en cas géneral copiant le raisonnement de la note [4].

Rappelons

Définition 1. *Nous disons que la solution $F\colon \Gamma \times G \to \Gamma$ de l'équation* (1.1) *est prolongeable sur $\bar{\Gamma} \times \bar{G}$ si et seulement si*

1) *il existe la fonction $\bar{F}\colon \bar{\Gamma} \times \bar{G} \to \bar{\Gamma}$ telle que $\bar{F}(\bar{F}(\alpha, x_1), x_2) = \bar{F}(\alpha, x_1 \cdot x_2)$ pour $\alpha \in \bar{\Gamma}$ et $x_1, x_2 \in \bar{G}$,*

2) *$\bar{F}(\alpha, x) = F(\alpha, x)$ pour $(\alpha, x) \in \Gamma \times G$.*

Nous appelerons la fonction $\bar{F}\colon \bar{\Gamma} \times \bar{G} \to \bar{\Gamma}$ le prolongement de la fonction F sur l'ensemble $\bar{\Gamma} \times \bar{G}$. Désignons par $\bar{f}$, $\{\bar{\Gamma}_l\}_{l \in L}$, $\bar{G}_l$ et $\bar{g}_l$ les paramètres de la fonction $\bar{F}$ de qui la déterminent sous la forme (1.2) a), b), c), d).

Le problème du prolongement de la solution $F\colon \Gamma \times G \to \Gamma$ sur l'ensemble $\bar{\Gamma} \times \bar{G}$ été considéré dans les notes [1], [4] et [5].

Supposant que la fonction F remplisse la condition d'identité (1.4) et $\bar{\bar{K}} = 1$ on donne dans la note [4] une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction F soit prolongeable sur l'ensemble $\Gamma \times \bar{G}$. Dans la note [5] on géneralisait ce résultat, à savoir: supposant seulement que la fonction F remplisse la condition (1.4) on a donné une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction F soit prolongeable sur l'ensemble $\Gamma \times \bar{G}$. Il résulte corollaire 3 de la note [1] (p.53) que chaque fonction F est prolongeable sur l'ensemble $\bar{\Gamma} \times G$.

Si on pouvait alors prolonger une solution quelconque $F\colon \Gamma \times G \to \Gamma$ de l'équation (1.1) sur l'ensemble $\Gamma \times \bar{G}$ il existerait, d'après le corollaire 3 de la note [1] le prolongement de la fonction F sur l'ensemble $\bar{\Gamma} \times \bar{G}$. Il se pose donc de problème suivant: Quand on peut prolonger une solution quelconque F de l'équation (1.1) sur l'ensemble $\Gamma \times \bar{G}$. Nous y répondrons en lemme 3. Pour faciliter la compréhension nous précédions la démonstration du lemme 3 par les lemmes 1 et 2.

On peut se demander en même temps, si nous pouvons obtenir chaque prolongement $\bar{F}\colon \bar{\Gamma} \times \bar{G} \to \bar{\Gamma}$ de la solution F en deux étapes, c'est-à-dire comme la prolongement d' une fonction sur l'ensemble $\bar{\Gamma} \times \bar{G}$ qui est le prolongement de la fonction F sur l'ensemble $\Gamma \times \bar{G}$, ou inversement — comme prolongement de la fonction $\bar{F}\colon \bar{\Gamma} \times G \to \bar{\Gamma}$ sur l'ensemble $\bar{\Gamma} \times \bar{G}$ qui est le prolongement de la fonction F sur l'ensemble $\bar{\Gamma} \times G$.

Nous y répondrons aux remarques 2 et 4 dans a **2.** On donne aussi au théorème 3 une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une prolongement de la fonction F sur l'ensemble $\tilde{\Gamma}\times\tilde{G}$.

Qu'il me soit permis de remercier ici le Professeur Z. Moszner qui a bien voulu me faire part de ses précieuses remarques dont j'ai tiré grand profit dans cette note.

2. La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un prolongement de la solution de l'equation (1.1)

LEMME 1. *Si la fonction $\tilde{F}\colon \tilde{\Gamma}\times\tilde{G}\to\tilde{\Gamma}$ est un prolongement de la fonction F, donc*

$$\bigwedge_{k\in K}\ \bigvee_{l\in L}\ (\Gamma_k\subset\tilde{\Gamma}_l) \tag{2.1}$$

et il existe un groupe $\tilde{G}_k\subset\tilde{G}$ tel que

$$\tilde{G}_k\cap G = G_k \tag{2.2}$$

et

(2.3) *il existe un ensemble $\bar{L}\subset L$ tel que*

$$\bigwedge_{l\in\bar{L}}\ \bigvee_{k\in K_l}\ \bigvee_{a_k\in\tilde{G}}\ (\tilde{G}_k = a_k^{-1}\tilde{G}_l a_k)\,, \qquad \text{où} \qquad \{K_l\}_{l\in\bar{L}}$$

est une décomposition de l'ensemble K.

Démonstration. D'après les supposition nous obtenons

$$F(\alpha, x) = \tilde{F}(\alpha, x)$$

pour chaque $\alpha\in\Gamma$ et $x\in G$.
Puisque $f(\alpha) = F(\alpha, e)$, $\tilde{f}(\alpha) = \tilde{F}(\alpha, e)$, $f(\Gamma) = \bigcup_{k\in K}\Gamma_k$ et $\tilde{f}(\tilde{\Gamma}) = \bigcup_{l\in L}\tilde{\Gamma}_l$ donc

$$\bigcup_{k\in K}\Gamma_k\subset\bigcup_{l\in L}\tilde{\Gamma}_l\,. \tag{2.4}$$

Soit $\bar{\alpha}$ de Γ_k. Dans ce cas $\bar{\alpha}\in\bigcup_{l\in L}\tilde{\Gamma}_l$. Il existe donc un $l\in L$ tel que $\bar{\alpha}\in\tilde{\Gamma}_l$. D'après (1.2) et les suppositions nous avons

$$g_k^{-1}(g_k(\bar{\alpha})x) = \tilde{g}_l^{-1}(\tilde{g}_l(\bar{\alpha})x) \qquad \text{pour} \qquad x\in G\,. \tag{2.5}$$

Si x parcourt l'ensemble G, le membre gauche de l'égalité (2.5) nous donne l'ensemble Γ_k tout entier et la membre droit de (2.5) nous donne l'ensemble $\tilde{\Gamma}_l$. La démonstration de la condition (2.1) est donc terminée.
Nous passons à la démonstration des conditions (2.2) et (2.3).

Soit α_k de $\Gamma_k\subset\tilde{\Gamma}_l$ un élément remplissant la condition

$$g_k(\alpha_k) = G_k\,.$$

Il existe donc un élément $a_k\in\tilde{G}$ tel que

$$\tilde{g}_l(\alpha_k) = \tilde{G}_l a_k\,. \tag{2.6}$$

Posons

$$(2.7)\qquad \bar{L} := \{L \ni l\colon \bigvee_{k\in K} (\Gamma_k \subset \bar{\Gamma}_l)\}$$

et

$$(2.8)\qquad K_l := \{K \ni k\colon\ \Gamma_k \subset \bar{\Gamma}_l\}$$

On voit facilement que $\{K_l\}_{l\in \bar{L}}$ est une décomposition de l'ensemble K. Soit

$$(2.9)\qquad \tilde{G}_k := a_k^{-1}\tilde{G}_l a_k \quad \text{et} \quad \bar{g}_{(k,l)}(\alpha) := a_k^{-1}\bar{g}_l(\alpha)$$

pour $k \in K_l$ et $\alpha \in \bar{\Gamma}_l$.
La fonction $\bar{g}_{(k,l)}$ est une bijection de l'ensemble $\bar{\Gamma}_l$ sur la famille $\tilde{G}/\tilde{G}_k$ des classes d'équivalence du groupe $\tilde{G}$ par rapport au sous-groupe $\tilde{G}_k$ et de plus

$$(2.10)\qquad \bar{g}_l^{-1}(C) = \bar{g}_{(k,l)}^{-1}(a_k^{-1}C)\,, \quad \text{où} \quad C \in \tilde{G}/\tilde{G}_l\,.$$

D'après le théorème 2 nous avons

$$\tilde{\bar{F}}(\alpha, x) := \bar{g}_{(k,l)}^{-1}(\bar{g}_{(k,l)}(\bar{f}(\alpha))x) = \bar{F}(\alpha, x) \text{ pour } \bar{f}(\alpha) \in \bar{\Gamma}_l \text{ et } x \text{ de } \tilde{G}\,.$$

Puisque $\bar{F}$ est un prolongement de la fonction F sur l'ensemble $\bar{\Gamma} \times \tilde{G}$, donc d'après (1.2) nous obtenons

$$(2.11)\qquad g_k^{-1}(g_k(\alpha_k)x) = \bar{g}_{(k,l)}^{-1}(\bar{g}_{(k,l)}(\alpha_k)x) \quad \text{pour} \quad x \in G\,.$$

D'après (2.9) et (2.6) nous avons

$$(2.12)\qquad \bar{g}_{(k,l)}(\alpha_k) = a_k^{-1}\tilde{G}_l a_k = \tilde{G}_k\,.$$

Nous allons démontrer que $\tilde{G}_k \cap G \subset G_k$. Si $x \in \tilde{G}_k \cap G$, alors $x \in \tilde{G}_k$. Compte tenu de (2.12) nous obtenons

$$\bar{g}_{(k,l)}^{-1}(\bar{g}_{(k,l)}(\alpha_k)x) = \bar{g}_{(k,l)}^{-1}(\tilde{G}_k x) = \bar{g}_{(k,l)}^{-1}(\tilde{G}_k) = \alpha_k\,.$$

Soit x de $\tilde{G}_k \cap G$. Dans ce cas le membre droit de (2.11) est égal à α_k et le membre gauche de (2.11) est égal à α_k si et seulement si $x \in G_k$. In en résulte que $\tilde{G}_k \cap G \subset G_k$. Nous pouvons démontrer de la même manière que $G_k \subset \tilde{G}_k \cap G$. Il en résulte que (2.2) a lieu. Pour terminer la démonstration il suffit de voir que les relations (2.7), (2.8) et (2.9) entraînent (2.3).

Soit $\bar{F}$ le prolongement de F sur l'ensemble $\bar{\Gamma} \times \tilde{G}$ et $\tilde{G} = G$. Il en résulte d'après (2.5) que pour chaque $k \in K$ il existe un l de L tel que $\Gamma_k = \bar{\Gamma}_l$. Il ressort de (2.8) et de (2.7) que $\bar{\bar{K}}_l = 1$ pour chaque $l \in L$ et de plus la puissance de l'ensemble $\bar{L}$ est égal à la puissance de l'ensemble K. Si $\tilde{G} = G$ alors d'après (2.2) nous obtenons

$$\tilde{G}_k = G_k$$

pour chaque $k \in K$.
De là et du lemme 1 nous avons

LEMME 2. *Si* $\tilde{F}$: $\tilde{\Gamma} \times G \to \tilde{\Gamma}$ *est un prolongement de la fonction* F: $\Gamma \times G \to \Gamma$, *donc*

$$\bigwedge_{k \in K} \bigvee_{l \in L} \bigvee_{a_k \in G} (\Gamma_k = \tilde{\Gamma}_l \wedge G_k = a_k^{-1} \tilde{G}_l a_k) .$$

Compte tenu du lemme 1 nous allons démontrer

LEMME 3. *La fonction* F: $\Gamma \times G \to \Gamma$ *est prolongeable sur* $\Gamma \times \tilde{G}$ *tout entier si et seulement s'il existe, pour chaque* k *de* K, *le sous-groupe* $\tilde{G}_k$ *de* $\tilde{G}$ *tel que*:

1) $\tilde{G}_k \cap G = G_k$

et

2) *il existe une décomposition* $\{K_l\}_{l \in L}$ *de l'ensemble* K *telle que*

$$\bigwedge_{l \in L} \bigvee_{\bar{k} \in K_l} \bigwedge_{k \in K_l} \bigvee_{\bar{a}_k \in \tilde{G}} [\tilde{G}_k = \bar{a}_k^{-1} \tilde{G}_{\bar{k}} \bar{a}_k \text{ et la famille}$$

$\{A_p\}_{p \in K_l}$, où $A_p = \tilde{G}_{\bar{k}} \bar{a}_p G$, *est une décomposition de* $\tilde{G}$].

I. Démonstration de la nécessité de la condition. Soit $\tilde{F}$ un prolongement de la fonction F sur l'ensemble $\Gamma \times \tilde{G}$ tout entier. Compte tenu du lemme 1 et des relations que nous y avons démontrées il suffit de démontrer la condition 2) du lemme 3.

De la supposition nous obtenons

$$F(\alpha, x) = \tilde{F}(\alpha, x) \quad \text{pour} \quad (\alpha, x) \in \Gamma \times G ,$$

donc

$$F(\alpha, e) = \tilde{F}(\alpha, e) \quad \text{pour} \quad \alpha \in \Gamma .$$

Par conséquent

$$\bigcup_{k \in K} \Gamma_k = \bigcup_{l \in L} \tilde{\Gamma}_l \text{ **)} .$$

Il en résulte que pour chaque l de L il existe k de K tel que

$$\Gamma_k \subset \tilde{\Gamma}_l .$$

Il est évident alors que l'ensemble $\bar{L}$ de (2.7) est équal à L. D'après (2.8) nous avons que la famille $\{K_l\}_{l \in L}$ est une décomposition de l'ensemble K
et

$$\tilde{\Gamma}_l = \bigcup_{k \in K_l} \Gamma_k .$$

Soit $\bar{k}$ un élément fixe de K_l. En vertu de (2.9) et (2.10) nous avons

(2.13) $$\tilde{G}_{\bar{k}} = a_{\bar{k}}^{-1} \tilde{G}_l a_{\bar{k}} \text{ et } \bar{g}_l^{-1}(C) = \bar{g}_{(\bar{k},l)}^{-1}(a_{\bar{k}}^{-1} C), \text{ où } C \in \tilde{G}/\tilde{G}_l .$$

Posons $\bar{a}_k := a_{\bar{k}}^{-1} a_k$. En profitant encore une fois des relations (2.9) et (2.13) nous obtenons

$$\tilde{G}_k = a_k^{-1} a_{\bar{k}} \tilde{G}_{\bar{k}} a_{\bar{k}}^{-1} a_k = \bar{a}_k^{-1} \tilde{G}_{\bar{k}} \bar{a}_k \quad \text{pour} \quad k \in K_l ,$$

alors nous avons démontré la première partie de la condition 2).

**) La suite de la démonstration est la même que celle du théorème dans la note [5].

En vertu (2.6), (2.11), (2.10), (2.13) et (2.12) nous avons

$$g_k^{-1}(G_k x) = \tilde{g}_{(k,l)}^{-1}(\tilde{g}_{(k,l)}(\alpha_k)x) = \tilde{g}_{(k,l)}^{-1}(a_k^{-1}a_k(\tilde{G}_k x))$$
$$= \tilde{g}_{(k,l)}^{-1}(a_k^{-1}(\tilde{G}_l a_k x)) = \tilde{g}_l^{-1}(\tilde{G}_l a_k x)$$
$$= \tilde{g}_{(\bar{k},l)}^{-1}(a_{\bar{k}}^{-1}\tilde{G}_l a_{\bar{k}}\bar{a}_k x) = \tilde{g}_{(\bar{k},l)}^{-1}(\tilde{G}_{\bar{k}}\bar{a}_k x)$$

pour $x \in G$ et $k \in K_l$,
donc

$$g_k^{-1}(G_k x) = \tilde{g}_{(\bar{k},l)}^{-1}(\tilde{G}_{\bar{k}}\bar{a}_k x) \text{ pour } x \in G \text{ et } k \in K_l .$$

Si x parcourt l'ensemble G et k est un élément fixe de K_l, le membre gauche de l'égalité plus haut nous donne l'ensemble Γ_k. De là si $p_1, p_2 \in K_l$ et $p_1 \neq p_2$, donc les ensembles $A_{p_i} = \bigcup_{x \in G} \tilde{G}_{\bar{k}} a_{p_i} x$ pour $i = 1, 2$ sont disjoints, puisque les ensembles Γ_{p_1} et Γ_{p_2} sont disjoints et la fonction $\tilde{g}_{(\bar{k},l)}$ est une bijection. Si l'indice p parcourt K_l donc nous avons dans le membre gauche l'ensemble $\tilde{\Gamma}_l$. Il en résulte que $\bigcup_{p \in K_l} A_p = \tilde{G}$, puisque $\tilde{g}_{(\bar{k},l)}$ est une bijection. Les ensembles A_p étant nonvides, la famille $\{A_p\}_{p \in K_l}$ est donc une décomposition de l'ensemble $\tilde{G}$. La démonstration de la nécessité de la condition dans notre lemme est donc terminée.

II. Démonstration de la suffisance de la condition. Supposons que 1) et 2) ait lieu.

Nous allons démontrer qu'il existe la fonction $\tilde{F}\colon \Gamma \times \tilde{G} \to \Gamma$ telle que $\tilde{F}\colon \Gamma \times \tilde{G} \to \Gamma$ est un prolongement de la fonction $F\colon \Gamma \times G \to \Gamma$.
Soient $k \in K_l$ et $b_1, b_2 \in G$. La relation $G_k b_1 = G_k b_2$ est équivalente à la condition $b_1 b_2^{-1} \in G_k$. Cette condition signifie d'après 1) et 2) que

$$\bar{a}_k b_1 b_2^{-1} \bar{a}_k^{-1} \in \bar{a}_k G_k \bar{a}_k^{-1} \subset \bar{a}_k \tilde{G}_k \bar{a}_k^{-1} = \tilde{G}_{\bar{k}} ,$$

et cette condition dernière est équivalente à la relation

$$\tilde{G}_{\bar{k}} \bar{a}_k b_1 = \tilde{G}_{\bar{k}} \bar{a}_k b_2 .$$

L'équivalence suivante a donc lieu

$$G_k b_1 = G_k b_2 \Leftrightarrow \tilde{G}_{\bar{k}} \bar{a}_k b_1 = \tilde{G}_{\bar{k}} \bar{a}_k b_2 \tag{2.14}$$

pour $k \in K_l$ et $b_1, b_2 \in G$.
Posons

$$\tilde{f}(\alpha) := f(\alpha) \quad \text{pour} \quad \alpha \in \Gamma \tag{2.15}$$

et

$$\tilde{\Gamma}_l := \bigcup_{k \in K_l} \Gamma_k \quad \text{pour} \quad l \in L . \tag{2.16}$$

D'après (1.2) b), (2.15) et 2) il résulte que la famille $\{\tilde{\Gamma}_l\}_{l \in L}$ est une décomposition de l'ensemble $\tilde{f}(\Gamma)$. Soit $\bar{a}_k$, pour $k \in K_l$, un élément remplissant la condition 2). En vertu de 2) nous avons que la famille de classe d'équivalence de la forme $\tilde{G}_{\bar{k}} \bar{a}_k b$, où $b \in G$ et $k \in K_l$, c'est l'ensemble $\tilde{G}/\tilde{G}_{\bar{k}}$ tout entier. Nous définirons sur l'ensemble $\tilde{\Gamma}_l$

une fonction $\tilde{g}_l(\alpha)$ comme suit. Soit α de $\tilde{\Gamma}_l$. D'après (2.16) il existe un indice $k \in K_l$ tel que $\alpha \in \Gamma_k$. F étant une solution de l'équation (1.2), donc il existe un élément $b \in G$ pour lequel

$$g_k(\alpha) = G_k b\,.$$

Posons

$$\tilde{g}_l(\alpha) = \tilde{G}_{\bar{k}} \bar{a}_k b\,.$$

La condition (2.14) montre que la fonction $\tilde{g}_l(\alpha)$ ne dépend pas du choix de l'élément b. D'après 2) et (2.14) cette fonction $\tilde{g}_l(\alpha)$ est injective. De plus elle transforme l'ensemble $\tilde{\Gamma}_l$ sur $\tilde{G}/\tilde{G}_{\bar{k}}$. Il en résulte que la fonction

$$\tilde{F}(\alpha, x) = \tilde{g}_l^{-1}(\tilde{g}_l(\tilde{f}(\alpha))\cdot x) \qquad \text{pour} \qquad \tilde{f}(\alpha) \in \tilde{\Gamma}_l,\ x \in \tilde{G}$$

est une solution dans l'ensemble $\Gamma \times \tilde{G}$ de l'équation de translation. Nous allons démontrer que $\tilde{F}$ est un prolongement de la fonction F. En effet

$$\tilde{F}(\alpha, x) = \tilde{g}_l^{-1}(\tilde{g}_l(\tilde{f}(\alpha))x) = \tilde{g}_l^{-1}(\tilde{G}_{\bar{k}}\bar{a}_k bx) = g_k^{-1}(G_k bx) =$$
$$= g_k^{-1}(g_k(f(\alpha))x) = F(\alpha, x)$$

pour x de G et α de Γ_k.

La démonstration de la suffisance de la condition dans notre théorème donc terminée.

En profitant des lemmes 2 et 3 nous démontrons

THÉORÈME 3. *La solution F: $\Gamma \times G \to \Gamma$ est prolongeable sur $\tilde{\Gamma} \times \tilde{G}$ si et seulement s'il existe l'ensemble $\bar{K}$ remplissant les conditions suivantes*:

1° *les ensembles K et $\bar{K}$ sont disjoints,*

2° *pour chaque $k \in \bar{K}$ ils existent des ensembles $\bar{\Gamma}_k$ et $G_k \subset G$ tels que*

(2.17)
$$\bar{\Gamma}_k \subset \tilde{\Gamma} \setminus \Gamma\,, \quad \overline{\overline{(\bar{\Gamma}_k)}} = \overline{\overline{G/G_k}}$$
$$\bigwedge_{k_1, k_2 \in \bar{K}} (k_1 \neq k_2 \Rightarrow \bar{\Gamma}_{k_1} \cap \bar{\Gamma}_{k_2} = \emptyset)\,,$$

3° *il existe, pour chaque $k \in K \cup \bar{K}$, $\tilde{G}_k \subset \tilde{G}$ tel que*

(2.18)
$$\tilde{G}_k \cap G = G_k$$

4° *il existe une décomposition $\{K_l\}_{l \in L}$ de l'ensemble $K \cup \bar{K}$ telle que*

(2.19)
$$\bigwedge_{l \in L} \bigvee_{\bar{k} \in K_l} \bigwedge_{k \in K_l} \bigvee_{\bar{a}_k \in \tilde{G}} [\tilde{G}_k = \bar{a}_k^{-1} \tilde{G}_{\bar{k}} \bar{a}_k \text{ et la famille } \{A_p\}_{p \in K_l},\ \text{où } A_p = \tilde{G}_{\bar{k}} \bar{a}_p G$$
est une décomposition de l'ensemble $\tilde{G}$] .

Démonstration de la nécessité. Soit $\tilde{F}$: $\tilde{\Gamma} \times \tilde{G} \to \tilde{\Gamma}$ un prolongement de la fonction F: $\Gamma \times G \to \Gamma$. Posons

(2.20)
$$\bar{F}(\alpha, x) := \tilde{F}(\alpha, x) \qquad \text{pour} \qquad (\alpha, x) \in \tilde{\Gamma} \times G\,.$$

$\tilde{F}$ étant une solution de l'équation de translation, donc l'ensemble $\tilde{f}(\tilde{\Gamma})$ est l'ensemble des valeurs de $\tilde{F}$.

En même temps

$$\tilde{\bar{f}}(\tilde{\bar{\Gamma}}) = \tilde{\bar{F}}(\tilde{\bar{\Gamma}}, e) .$$

Il en résulte d'après (2.20) que l'ensemble $\tilde{\bar{f}}(\tilde{\bar{\Gamma}})$ est l'ensemble des valeurs de la fonction $\bar{F}$. Pour $(\alpha, x) \in \bar{\Gamma} \times G$ nous avons

$$\bar{F}(\alpha, x_1 x_2) = \tilde{\bar{F}}(\alpha, x_1 x_2) = \tilde{\bar{F}}(\tilde{\bar{F}}(\alpha, x_1), x_2) = \bar{F}(\bar{F}(\alpha, x_1), x_2)$$

alors la fonction $\bar{F}$ remplit l'équation de translation dans l'ensemble $\tilde{\bar{\Gamma}} \times G$. Soient $\bar{f}$, $\{\bar{\Gamma}_l\}_{l \in \bar{L}}$, $\bar{G}_l$, $\bar{g}_l$ les paramètres de cette solution. De la supposition et de la définition (2.20) nous avons

$$\bar{F}(\alpha, x) = F(\alpha, x) \quad \text{pour} \quad (\alpha, x) \in \Gamma \times G .$$

En vertu de la définition 1 la fonction $\bar{F}$ est un prolongement de la fonction F sur l'ensemble $\tilde{\bar{\Gamma}} \times G$ et un profitant du lemme 2 nous avons

$$(2.21) \qquad \bigwedge_{k \in K} \bigvee_{l \in L} \bigvee_{a_k \in G} (\Gamma_k = \bar{\Gamma}_l \wedge G_k = a_k^{-1} \bar{G}_l a_k) .$$

Pour $\bar{\Gamma}_l = \Gamma_k$, d'après (2.21) et du théorème 2 nous pouvons prendre le groupe G_k comme groupe de la stabilité. Les ensembles Γ_k et $\bar{\Gamma}_l$ sont les composants convenables de décomposition, alors il existe d'après (2.21) un ensemble $L^* \subset L$ tel que $\bar{L}^* = \bar{K}$ et il existe pour chaque l de L^* exactement un indice k de K tel que $\bar{\Gamma}_l = \Gamma_k$. Posons $L^* = K$. Soit $\bar{K} := \bar{L} \setminus K$. Nous avons alors

$$(2.22) \qquad \tilde{\bar{f}}(\tilde{\bar{\Gamma}}) = \bigcup_{k \in K} \Gamma_k \cup \bigcup_{l \in \bar{K}} \bar{\Gamma}_l .$$

Puisque $\{\bar{\Gamma}_l\}_{l \in L}$ est une décomposition de l'ensemble $\tilde{\bar{f}}(\tilde{\bar{\Gamma}})$ donc

$$\bigwedge_{l_1, l_2 \in \bar{K}} (l_1 \neq l_2 \Rightarrow \bar{\Gamma}_{l_1} \cap \bar{\Gamma}_{l_2} = \emptyset) .$$

Remarquons que $\bar{\Gamma}_l \cap \Gamma = \emptyset$ pour $l \in \bar{K}$.
En effet, dans le cas contraire, d'après le lemme 2 nous aurons $K \cap \bar{K} \neq \emptyset$. La fonction $\bar{F}$ est une solution de l'équation de translation dans l'ensemble $\tilde{\bar{\Gamma}} \times G$, alors il existe pour chaque $l \in \bar{K}$ un sous-groupe G_l du groupe G tel que $\overline{\overline{(\bar{\Gamma}_l)}} = \overline{\overline{G/G_l}}$. Pour démontrer (2.17) il suffit alors de poser $l = k$.

Nous passons à la démonstration de (2.18) et (2.19). Dans ce but nous remarquons que la fonction $\bar{F}\colon \tilde{\bar{\Gamma}} \times G \to \tilde{\bar{\Gamma}}$ est prolongeable sur $\tilde{\bar{\Gamma}} \times \tilde{G}$ ($\tilde{\bar{F}}$ qui est son prolongement). Employant le lemme 3 pour la fonction $\bar{F}$ nous obtenons les conditions (2.18) et (2.19).

Nous passons à la démonstration de la suffisance de la condition.
Supposons que les conditions (2.17), (2.18) et (2.19) ont lieu.

Posons

$$
(2.23) \qquad \bar f(\alpha) := \begin{cases} f(\alpha) & \text{pour} \quad \alpha \in \Gamma\,, \\ \alpha & \text{pour} \quad \alpha \in \bigcup\limits_{k\in\bar K} \bar\Gamma_k\,, \\ k(\alpha) & \text{pour} \quad \alpha \in [\tilde\Gamma \setminus (\Gamma \cup \bigcup\limits_{k\in\bar K} \bar\Gamma_k)]\,, \end{cases}
$$

où les ensembles $\bar\Gamma_k$ pour $k \in \bar K$ remplissent (2.17).
La fonction $k(\alpha)$ est une fonction arbitraire qui transforme l'ensemble $\tilde\Gamma \setminus (\Gamma \cup \bigcup\limits_{k\in\bar K} \Gamma_k)$ dans l'ensemble $\bigcup\limits_{k\in K} \Gamma_k \cup \bigcup\limits_{k\in\bar K} \bar\Gamma_k$.

Il en résulte que $\bar f(\bar f(\alpha)) = \bar f(\alpha)$ pour $\alpha \in \tilde\Gamma$ et que $\{\Gamma_k\}_{k\in K} \cup \{\bar\Gamma_k\}_{k\in\bar K}$ est une décomposition de l'ensemble $\bar f(\tilde\Gamma)$.

Soit G_k de (2.17), pour $k \in \bar K$, un groupe de stabilité qui correspond à l'ensemble $\bar\Gamma_k$. Soit $\hat g_k$, pour $k \in \bar K$, une bijection arbitraire de l'ensemble $\bar\Gamma_k$ sur l'ensemble G/G_k, existant d'après (2.17). Posons

$$
\bar g_k(\alpha) := \begin{cases} g_k(\alpha) & \text{pour} \quad k \in K \\ \hat g_k(\alpha) & \text{pour} \quad k \in \bar K\,. \end{cases}
$$

On voit que la fonction

$$
\bar F(\alpha, x) := \bar g_k^{-1}(\bar g_k(\bar f(\alpha))x) \qquad \text{pour} \quad \bar f(\alpha) \in \bar\Gamma_k\,,
$$

où $\bar\Gamma_k = \Gamma_k$, $k \in K$ est une solution dans $\tilde\Gamma \times G$ de l'équation de translation. Elle est aussi un prolongement de la fonction F. En vertu du lemme 3, les conditions (2.18), (2.19) suffisent pour prolonger la fonction $\bar F$ sur l'ensemble $\tilde\Gamma \times \tilde G$. En prolongeant la fonction $\bar F$ sur l'ensemble $\tilde\Gamma \times \tilde G$ nous obtenons la fonction $\tilde F$: $\tilde\Gamma \times \tilde G \to \tilde\Gamma$. De la démonstration du lemme 3 il est évident que les ensembles

$$
\tilde\Gamma_l = (\bigcup_{k\in K_l\cap K} \Gamma_k) \cup (\bigcup_{k\in K_l\cap\bar K} \bar\Gamma_k)
$$

sont les fibres transitives de la fonction $\tilde F$, alors les conditions (2.17), (2.18) et (2.19) suffisent pour prolonger la fonction F sur l'ensemble $\tilde\Gamma \times \tilde G$.

La démonstration de la suffisance de la condition dans le théorème 3 est donc términée.

Nous faisons maintenant des remarques et des corollaires conçernant du théorème 3.

Nous allons démontrer que

1. Si F remplit la condition (1.4) et $\tilde F$ remplit la condition d'identité sur l'ensemble $\tilde\Gamma$ et $\tilde\Gamma \neq \Gamma$, alors la famille $\{\bar\Gamma_k\}_{k\in\bar K}$ est décomposition de l'ensemble $\tilde\Gamma \setminus \Gamma$. D'après (1.4) nous avons

$$
\bigcup_{k\in K} \Gamma_k = \Gamma \qquad \text{et} \qquad \hat f(\tilde\Gamma) = \tilde\Gamma\,.
$$

D'après (2.22) nous obtenons

$$\tilde{\Gamma} \setminus \Gamma = \bigcup_{k \in K} \Gamma_k ,$$

donc d'après (2.17) nous obtenons que la famille $\{\bar{\Gamma}_k\}_{k \in \bar{K}}$ est une décomposition de l'ensemble $\tilde{\Gamma} \setminus \Gamma$.

2. La fonction $\tilde{F}$ est un prolongement sur l'ensemble $\tilde{\Gamma} \times \tilde{G}$ d'une fonction $\bar{F}$, qui est un prolongement de la fonction F sur l'ensemble $\tilde{\Gamma} \times G$.

3. Si la fonction $\tilde{F}$: $\tilde{F} \times \tilde{G} \to \tilde{\Gamma}$ est un prolongement de la fonction F, il existe donc ensemble $\bar{K}$ tel que les relations (2.17), (2.18) ont lieu et

a) les ensembles $\bar{K}$ et K sont disjoints,

b) il existe une décomposition $\{K_l\}_{l \in L}$ de l'ensemble $K \cup \bar{K}$ tel que $\bigwedge_{l \in L} \bigwedge_{k \in K_l} \bigvee_{a_k \in \tilde{G}} (\tilde{G}_k = a_k^{-1} \tilde{G}_l a_k$ et la famille $\{A_p\}_{p \in K_l}$, où $A_p = \tilde{G}_l a_p G$, est une décomposition de l'ensemble $\tilde{G}$)

c) les éléments a_k de la relation ci-dessus et les éléments $\bar{a}_k$ de la condition (2.18) remplissent la relation

$$\bar{a}_k = a_{\bar{k}}^{-1} a_k \quad \text{pour} \quad k \in K_l ,$$

d) $\bigwedge_{l \in L} (\tilde{\Gamma}_l = \bigcup_{k \in K_l \cap K} \Gamma_k \cup \bigcup_{k \in K_l \cap \bar{K}} \bar{\Gamma}_k)$.

Pour la démontrer nous revenons à la démonstration des lemmes 1 et 3. Appliquant le symbolique tel que aux conditions (2.17), (2.18) et (2.19) nous remarquons que la fonction $\bar{F}$ définie par (2.20) est prolongeable à l'ensemble $\tilde{\Gamma} \times \tilde{G}$ et la fonction $\tilde{F}$ est le prolongement. On peut donc faire le raisonnement du lemme 3.

In en résulte que

$$K_l = \{K \ni k: \Gamma_k \subset \tilde{\Gamma}_l\} \cup \{\bar{K} \ni k: \bar{\Gamma}_k \subset \tilde{\Gamma}_l\} ,$$

alors d) a lieu.

D'après (2.9), (2.13) et la définition de l'élément $\bar{a}_k$, que nous avons donnée immédiatement après la relation (2.13), il résulte que les conditions b) et c) ont lieu.

4. Nous avons d'après la démonstration du lemme 3 dans la note [1] et du lemme 2 de cette note: si avant tout nous prolongeons la fonction F sur $\Gamma \times \tilde{G}$ et suivant nous prolongeons ce prolongement sur $\tilde{\Gamma} \times \tilde{G}$, donc nous obtenons la fonction pour laquel les ensemble $\tilde{\Gamma}_l$ remplissent la condition suivante $\tilde{\Gamma}_l \subset \Gamma$ or $\tilde{\Gamma}_l \subset \tilde{\Gamma} / \Gamma$.

Il en résulte que cette manière du prolongement ne donne pas tous les prolongements de la fonction F sur $\tilde{\Gamma} \times \tilde{G}$.

Si la fonction F remplit la condition (1.4) et la famille $\{\bar{\Gamma}_k\}_{k \in \bar{K}}$ est une décomposition de l'ensemble $\tilde{\Gamma} \setminus \Gamma$, donc d'après (2.23) nous avons $\bar{f}(\alpha) = \alpha$ pour chaque $\alpha \in \tilde{\Gamma}$. Il en résulte que la fonction $\bar{F}$ remplit la condition (1.4) sur l'ensemble $\tilde{\Gamma}$, et donc chaque prolongement $\dot{F}$ sur l'ensemble $F \times \tilde{G}$ remplit aussi la condition (1.4) sur l'ensemble $\tilde{\Gamma}$.

Du remarque 1 et en vertu du raisonnement ci-dessus nous avons

COROLLAIRE 1. *Soit F une fonction qui remplit la condition* (1.4). *Soit $\tilde{F}$ un prolongement de la fonction F sur l'ensemble $\bar{\Gamma} \times \tilde{G}$. La fonction $\tilde{F}$ remplit la condition* (1.4) *sur l'ensemble $\tilde{\Gamma}$ si et seulement si la famille $\{\bar{\Gamma}_k\}_{k \in \bar{K}}$ est une décomposition de l'ensemble $\bar{\Gamma} \setminus \Gamma$.*

COROLLAIRE 2. *Si l'ensemble $\bar{K} = \emptyset$ remplit* (2.17), (2.18), (2.19) *et $\bar{\Gamma} \setminus \Gamma \neq \emptyset$, alors il existe un ensemble $K_1 \neq \emptyset$ qui remplit ces conditions. De plus dans ce cas, il existe au moins deux différents prolongements de la fonction F sur l'ensemble $\tilde{\Gamma} \times \tilde{G}$.*

Démonstration. Puisque l'ensemble $\bar{K} = \emptyset$ remplit les conditions (2.17), (2.18) et (2.19), donc il existe une prolongement $\tilde{F}$ de la fonction F sur l'ensemble $\tilde{\Gamma} \times \tilde{G}$ tel que chaque fibre transitive $\bar{\Gamma}_l$ a la forme

$$\tilde{\Gamma}_l = \bigcup_{k \in K_l} \Gamma_k ,$$

où $\{K_l\}_{l \in L}$ est une décomposition pour laquelle (2.19) a lieu. Il en résulte que l'ensemble $\bigcup_{k \in K} \Gamma_k$ est l'ensemble des valeurs de la fonction $\tilde{F}$.

Supposons que $\tilde{G}_k$, $\bar{k}$ et $\bar{a}_k$ aient la même sens que dans les conditions (2.18) et (2.19). Soit $\bar{K}_1$ un ensemble tel que $\overline{\overline{(\bar{K}_1)}} = \overline{\overline{\bar{\Gamma} \setminus \Gamma}}$. Si $k \in \bar{K}_1$ nous prenons $\bar{\Gamma}_k$ tel que $\overline{\overline{\bar{\Gamma}_k}} = 1$ et $\bigcup_{k \in \bar{K}} \bar{\Gamma}_k = \bar{\Gamma} \setminus \Gamma$. Soit $G_k := G$ pour $\bar{\Gamma}_k$ et pour chaque k de $\bar{K}_1$. Alors, la condition (2.17) est satisfaite. Posons $\tilde{G}_k := \tilde{G}$ pour $k \in \bar{K}_1$, donc $\tilde{G}_k \cap G = G_k$ pour $k \in K \cup \bar{K}_1$. Considérons une décomposition $\{\bar{K}_l\}_{l \in L_2}$ de l'ensemble $K \cup \bar{K}_1$ telle que $L_2 = L \cup L_1$, $\bar{L}_1 = \overline{\overline{(\bar{K}_1)}}$ et $\bar{K}_l = K_1$ pour $l \in L$ et $\overline{\overline{(\bar{K}_l)}} = 1$ pour $l \in L_1$. Si $l \in L_1$ et $k \in \bar{K}_l$ alors $k \in \bar{K}_1$ et de la $\tilde{G}_k = \tilde{G}$. La condition (2.19) est satisfaite pour l'élément $\bar{a}_k$ quelconque de $\tilde{G}$. Si $l \in L$, alors la condition (2.19) est satisfaite pour $\bar{k}$ et $\bar{a}_k$ telles comme pour la décomposition $\{K_l\}_{l \in L}$ de l'ensemble K. De la démonstration de la nécessité de la condition du théorème 3 nous avons qu'il existe une fonction qui sera la prolongement de la fonction F sur l'ensemble $\tilde{\Gamma} \times \tilde{G}$ telle que les ensembles $\bar{\Gamma}_l = \bigcup_{k \in K_l} \Gamma_k$ pour $l \in L$ et les ensembles $\bar{\Gamma}_k$ sont les fibres transitives. Alors l'ensemble $\left(\bigcup_{k \in K} \Gamma_k\right) \cup (\bar{\Gamma} \setminus \Gamma)$ est l'ensembles des valeurs de cette fonction. Désignons cette fonction par $\tilde{F}_1$. Il est évident que $\tilde{F}_1 \neq \tilde{F}$. La démonstration du corollaire 2 est donc términée.

Il résulte de la démonstration du corollaire 2 la posibilité du prolongement de la fonction F sur l'ensemble $\tilde{\Gamma} \times G$. De cette manière nous avons aussi une autre démonstration du corollaire 3 de la note [1].

Désignons, dans la suite, par $\tilde{F}\colon \tilde{\Gamma} \times \tilde{G} \to \tilde{\Gamma}$ une prolongement de la fonction F sur l'ensemble $\tilde{\Gamma} \times \tilde{G}$. Démontrons que le rétrécissement de la fonction $\tilde{F}$ à l'ensemble $\Gamma \times \tilde{G}$ n'est pas toujours le prolongement de la fonction F sur l'ensemble $\Gamma \times \tilde{G}$.

COROLLAIRE 3. *Soient $\tilde{F}$ et $\Gamma \subset \tilde{\Gamma}$ tels qu'il existe un ensemble $\tilde{\Gamma}_l$ pour que*

$$\tilde{\Gamma}_l \cap \Gamma \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \tilde{\Gamma}_l \cap (\bar{\Gamma} \setminus \Gamma) \neq \emptyset ,$$

alors l'ensemble des valeurs de la fonction $\hat{F}(\alpha, x) := \tilde{F}(\alpha, x)$ *pour* $(\alpha, x) \in \Gamma \times \tilde{G}$ *n'est pas inclus dans* Γ.

Démonstration. Il résulte de la supposition qu'il existe des éléments α_1, α_2 tels que

$$\alpha_1 \in \tilde{\Gamma}_l \setminus \Gamma \quad \text{et} \quad \alpha_2 \in \tilde{\Gamma}_l \cap (\tilde{\Gamma} \setminus \Gamma).$$

De là $\alpha_1, \alpha_2 \in \tilde{\Gamma}_l$. Il existe donc un élément $\bar{x} \in \tilde{G}$ tel que $\tilde{F}(\alpha_1, \bar{x}) = \alpha_2$. De la définition de la fonction $\hat{F}$ nous avons $\hat{F}(\alpha_1, \bar{x}) = \alpha_2 \in \tilde{\Gamma} \setminus \Gamma$.
La démonstration du corollaire 3 est donc términée.

Corollaire 4. *Si les supositions du corollaire* 3 *sont satisfaites, alors la fonction* $\hat{F}$ *n'est pas une solution de l'équation* (1.1) *dans l'ensemble* $\Gamma \times \tilde{G}$, *et donc elle n'est pas le prolongement de la fonction* F.

Corollaire 5. *Si l'ensemble des valeurs de la fonction* $\hat{F}$ *est inclus dans* Γ, *alors* $\hat{F}$ *est le prolongement de la fonction* F *sur l'ensemble* $\Gamma \times \tilde{G}$.
En effet

$$\begin{aligned}\hat{F}(\alpha, x_1 \cdot x_2) = \tilde{F}(\alpha, x_1 \cdot x_2) = \tilde{F}(\tilde{F}(\alpha, x_1), x_2) &= \tilde{F}(\hat{F}(\alpha, x_1), x_2) \\ &= \hat{F}(\hat{F}(\alpha, x_1), x_2),\end{aligned}$$

alors la fonction $\hat{F}$ est une solution de l'equation de translation sur l'ensemble $\Gamma \times \tilde{G}$. De là et de la définition 1 et de la définition de la fonction $\hat{F}$ nous avons le corollaire 5.

Corollaire 6. *Si la fonction* $\hat{F}$ *remplit condition*

$$\bigwedge_{l \in L} (\tilde{\Gamma}_l \subset \Gamma \ \text{or} \ \tilde{\Gamma}_l \subset \tilde{\Gamma} \setminus \Gamma), \tag{2.24}$$

alors l'ensemble des valeurs de la fonction $\hat{F}$ *est inclus dans* Γ.

Démonstration. Soit α de Γ. Dans ce cas $\tilde{f}(\alpha) \in \bigcup_{l \in L} \tilde{\Gamma}_l$ et $\tilde{f}(\alpha) = f(\alpha) \in \Gamma$.
Il existe donc un ensemble $\tilde{\Gamma}_l$ tel que

$$f(\alpha) \in \tilde{\Gamma}_l \quad \text{et} \quad \tilde{\Gamma}_l \subset \Gamma. \tag{2.25}$$

De là $\tilde{F}(\alpha, \tilde{G}) = \tilde{\Gamma}_l$, donc $\hat{F}(\alpha, x) \in \tilde{\Gamma}_l$, et la démonstration du corollaire 6 est terminée.

Des corollaires 5 et 6 et de la contraposition du corollaire 3 nous avons immédiatement

Corollaire 7. *La fonction* $\hat{F}$ *est le prolongement de la fonction* F *sur l'ensemble* $\Gamma \times \tilde{G}$ *si et seulement si la fonction* $\hat{F}$ *remplit la condition* (2.24).

Pour ilustrer le théorème 3 donnons un exemple suivante. Considérons le groupe des permutations l'un ensemble de 4 éléments. Posons

$a_1 = (1, 2, 3, 4)$; $\quad a_2 = (1, 3, 4, 2)$; $a_3 = (1, 4, 2, 3)$; $\quad a_4 = (3, 2, 4, 1)$;

$a_5 = (4, 2, 1, 3)$; $\quad a_6 = (2, 4, 3, 1)$; $a_7 = (4, 1, 3, 2)$; $\quad a_8 = (3, 1, 2, 4)$;

$a_9 = (2, 3, 1, 4)$; $a_{10} = (3, 4, 1, 2)$; $a_{11} = (4, 3, 2, 1)$; $a_{12} = (2, 1, 4, 3)$;
$a_{13} = (4, 3, 1, 2)$; $a_{14} = (3, 4, 2, 1)$; $a_{15} = (1, 2, 4, 3)$; $a_{16} = (2, 1, 3, 4)$;
$a_{17} = (4, 1, 2, 3)$; $a_{18} = (1, 3, 2, 4)$; $a_{19} = (2, 3, 4, 1)$; $a_{20} = (3, 2, 1, 4)$;
$a_{21} = (4, 2, 3, 1)$; $a_{22} = (2, 4, 1, 3)$; $a_{23} = (1, 4, 3, 2)$; $a_{24} = (3, 1, 4, 2)$.

Soit F une solution de l'équation (1.1) sur l'ensemble $\Gamma \times G$, où $\Gamma = \{1, 2, 3\}$, $G = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $G_1 = \{a_1\}$. Posons $\tilde{G} = \{a_1, \ldots, a_{12}\}$ et $\tilde{\Gamma} = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Nous étudions l'existence du prolongement de la fonction F sur l'ensemble $\tilde{\Gamma} \times \tilde{G}$. Dans ce but il suffit de démontrer qu'il existe un ensemble $\bar{K}$ tel que les conditions (2.17), (2.18), (2.19) du théorème 3 sont satisfaites.

Par rapport à la condition (2.18) le sous-groupe $\tilde{G}_1$ doit être un des sous-groupes suivants $\{a_1, a_4, a_5\}$, $\{a_1, a_6, a_7\}$, $\{a_1, a_8, a_9\}$, $\{a_1, a_{10}, a_{11}, a_{12}\}$ ou un sous-groupe quelconque du sous-groupe $\{a_1, a_{10}, a_{11}, a_{12}\}$.

Démontrons qu'on peut prendre $\bar{K} = \emptyset$. Posons $\tilde{G}_1 := \{a_1, a_{10}, a_{11}, a_{12}\}$. Donc

$$\tilde{G}_1 \cap G = \{a_1\} = G_1$$

et

$$\tilde{G}_1 \cdot G = \tilde{G}\,.$$

Les conditions (2.17), (2.18) et (2.19) au théorème 3 sont satisfaites si $\bar{K} = \emptyset$. Il existe donc un prolongement $\tilde{F}_1$ de la fonction F sur l'ensemble $\tilde{\Gamma} \times \tilde{G}$ tel que la fibre transitive est unique et elle est égale à l'ensemble Γ. Du corollaire 2 il résulte qu'il existe un prolongement $\tilde{F}_2$ pour lequel les ensembles Γ, $\{5\}$, $\{4\}$, $\{6\}$ sont les fibres transitives. Posons ensuite $\bar{K} := \{2\}$.
Dans ce cas nous pouvons choisir aussi les ensemble G_2, $\tilde{G}_1$, $\tilde{G}_2$, L, $\{K_l\}_{l \in L}$, $\bar{k}$ et $\bar{a}_k$ tels que les conditions (2.17), (2.18), (2.19) du theoreme 3 seront satisfaites. En effet, soit $\Gamma_2 := \{4, 5, 6\}$, $G_2 := \{a_1\}$. Pour $k \in \bar{K}$ la condition (2.17) est satisfaite.

Posons de plus $\tilde{G}_1 := \{a_1, a_{10}\}$, $\tilde{G}_2 := \{a_1, a_{12}\}$. La condition (2.18) est donc satisfaite et l'ensemble $K_1 = \{1, 2\}$ est une composante unique de la décomposition de l'ensemble $K \cup \bar{K}$. Nous allons démontrer que la partie restante de la condition (2.19) est satisfaite pour cette décomposition de l'ensemble $K \cup \bar{K}$. Dans ce but nous posons $\bar{k} = 1, \bar{a}_1 = a_1$ et $\bar{a}_2 = a_7$. Donc $\tilde{G}_1 = a_1^{-1} \tilde{G}_1 a_1$ et $\tilde{G}_2 = a_7^{-1} \tilde{G}_1 a_7$. En même temps nous avons

$$A_1 = \tilde{G}_1 a_1 G = \{a_1, a_2, a_3, a_5, a_9, a_{10}\}$$

et

$$A_2 = \tilde{G}_2 a_7 G = \{a_4, a_6, a_7, a_8, a_{11}, a_{12}\}\,.$$

Nous avons démontré alors que la condition (2.19) est satisfaite. Il existe donc un prolongement de la solution F sur l'ensemble $\tilde{\Gamma} \times \tilde{G}$ pour lequel les ensembles Γ et Γ_2 sont les fibres transitives.

Désignons ce prolongement par $\tilde{F}_3$. Il est évident que $\tilde{F}_3 \neq \tilde{F}_1$ et $\tilde{F}_3 \neq \tilde{F}_2$.

Travaux cités

[1] A. Grząślewicz, J. Tabor: *On the Equivalence of Two Definitions of the Fulfilment of the Translation Equation and on the Extensions of the Solutions of this Equation.* Rocznik Nauk.-Dydak. WSP w Krakowie, Prace Mat. VII, 51 (1974), p. 47–57.

[2] S. Midura, J. Tabor: *Sur les itérations avec un paramètre réel des fonctions sous-modules.* Demonstratio Mathematica, Vol. VI, part 1, 1973, p. 271–287.

[3] Z. Moszner: *Structure de l'automate plein, réduit et inversible.* Aequationes Mathematicae, Vol. 9, fasc. 1, 1973, p. 46–59.

[4] Z. Moszner: *Sur le prolongement des objets géométriques transitifs.* Tensor N. S. Vol. 26 (1972), p. 239–242.

[5] Z. Moszner, B. Pilecka: *Sur le prolongement des objets géométriques non-transitifs.* Tensor N. S. Vol. 28 (1974), p. 63–66.