ZBIGNIEW POWĄZKA

Über stetigen Lösungen der Funktionalgleichung $\varphi(x+y) = F(\varphi(x), \varphi(y))$

1. In der Monographie [1] (s. 55–59) von J. Aczél wird eine generale stetige Lösung der Funktionalgleichung

$$\varphi(x+y) = F(\varphi(x), \varphi(y)) \tag{1}$$

beschrieben. Hier x, y sind reelle Zahlen und φ: $(-\infty, +\infty) \to (a, b)$. Das Intervall (a, b) (nicht notwendig endliches) bildet bezüglich der Operation $F(u, v)$, $u, v \in (a, b)$, eine stetige Gruppe.

In diesem Artikel suchen wir stetige Lösungen φ: $(-\infty, +\infty) \to \Delta$ der Gleichung (1) mit

$$\Delta = (a, e] \quad \text{oder} \quad \Delta = [e, a)\,, \tag{2}$$

wo $a, b \in (-\infty, +\infty)$ und e ein Einhaitselement der Operation F ist, d.h.

$$F(e, u) = F(u, e) = u\,, \quad \text{für jedes } u \in \Delta \tag{3}$$

Wir werden weiter anlegen, dass

H_1: F: $\Delta \times \Delta \to \Delta$ ist eine gegebene Funktion zwei reellen Veränderlichen. Das Intervall Δ ist bezüglich der Operation $F(u, v)$, $u, v \in \Delta$, eine stetige abelsche Halbgruppe mit dem Einheitselement e.

H_2: Die Funktion F: $\Delta \times \Delta \to \Delta$ ist stetig in beiden Veränderlichen. Ausserdem werden wir eine aus den Voraussetzungen H_3 oder H_4 annehmen:

H_3: Die Funktion F ist in beiden Veränderlichen echt monoton wächsend.

H_4: Die Funktion F ist in beiden Veränderlichen echt monoton fallend.

2. In diesem Abschnitt vorstellen wir die Eigenschafte der Lösungen der Funktionalgleichung (1), die der Voraussetzung H_2 nicht erforden.
Es liege in (1) $x = y = 0$. Wir erhalten dann

$$\varphi(0) = F(\varphi(0), \varphi(0))\,. \tag{4}$$

Es liege in (1) nur $y = 0$. Dann ist es

$$\varphi(x) = F(\varphi(x), \varphi(0))\,. \tag{5}$$

Wenn das Intervall Δ bezüglich der Operation $F(u, v)$ eine Gruppe bildet, so sind die Bedingungen (4) und (5) äquiwalent (sehe [2]) und dann erfühlt die Gleicheit (4) nur

$$\varphi(0) = e\,, \tag{6}$$

wo e ein Einheitselement in Δ ist. Wenn wir H_1 annehmen, so sind die Bedingungen (4) und (5) nicht äquivalent, d.h. ist möglich, dass dann eine Lösung der Gleichung (4) existiert, die keine Einheitselement ist.

Nehmen wir jetzt die Bedingung (6) an. Wir erhalten dann den folgenden

SATZ 1. *Wenn die H_1 und H_4 erfühlen werden, so ist nur die Funktion*

$$\varphi(x) = e \tag{7}$$

die Lösung der Funktionalgleichung (1) *mit der Bedingung* (6).

Beweis. Es sei $\Delta = (a, e]$. Denn $\varphi(x) \in \Delta$ für $x \in (-\infty, +\infty)$, dann haben wir aus (1), (6), H_4 und (3)

$$\varphi(x) = F(\varphi(x), \varphi(0)) = F(\varphi(x), e) \geqslant F(e, e) = e\,,$$

also

$$\varphi(x) \geqslant e\,. \tag{8}$$

Wegen $\varphi(x) \in \Delta$ für $x \in (-\infty, +\infty)$ und (8) ist die Bedingung (7) für jedes reelle x erfühlt.

Wenn $\Delta = [e, b)$ ist, so ist der Beweis des Satzes ähnlich. Aus dem Satz 1 folgt.

VORSCHLAG 1. Es sei H_1 erfühlt. Ist φ eine nichtkonstante in $(-\infty, +\infty)$ Lösung der Funktionalgleichung (1), die die Bedingung (6) erfühlt, so ist F in keinem Veränderlichen echt monoton fallend.

Fordern wir weiter die Bedingung H_1 und H_3. Wir zeigen dann, dass für $u \in \Delta$ und $u \neq e$ keine Inverselement existiert.

HILFSSATZ 1. *Es seien H_1 und H_3 erfühlen. Wir zeigen dann, gibt es $u_0^{-1} \in \Delta$, so ist*

$$u_0 = u_0^{-1} = e\,.$$

Beweis. Es sei $\Delta = (a, e]$. Dann ist für jedes $u \in \Delta$

$$u \leqslant e \tag{9}$$

und wegen $u_0 \in \Delta$, $u_0^{-1} \in \Delta$ gilt es

$$F(u_0, u_0^{-1}) = F(u_0^{-1}, u_0) = e\,. \tag{10}$$

Aus (9), H_3 und (10) haben wir

$$u_0 \leqslant F(u_0, u_0^{-1}) \quad \text{und} \quad u_0^{-1} \leqslant F(u_0^{-1}, u_0)\,. \tag{11}$$

Dann erhalten wir wegen (10), (11), H_3 und der Assoziavität der Operation F, dass

$$e = F(u_0^{-1}, u_0) \leqslant F(u_0^{-1}, F(u_0, u_0^{-1})) = F(F(u_0^{-1}, u_0), u_0^{-1}) . \tag{12}$$

Also ist aus (10)

$$F(F(u_0^{-1}, u_0), u_0^{-1}) = F(e, u_0^{-1}) = u_0^{-1} . \tag{13}$$

Ferner folgt aus (12) und (13), dass

$$e \leqslant u_0^{-1} ,$$

also wegen (9)

$$e = u_0^{-1} \tag{14}$$

ist, ähnlich haben wir aus (10), (11), H_3 und Assoziavität der Operation $F(u, v)$

$$e = F(u_0, u_0^{-1}) \leqslant F(u_0, F(u_0^{-1}, u_0)) = F(F(u_0, u_0^{-1}), u_0) = u_0 ,$$

also

$$e \leqslant u_0 . \tag{15}$$

Wegen (9) und (15) ist ferner

$$e = u_0 . \tag{16}$$

Aus (14) und (16) folgt die These dieses Hilfssatzes.

Hilfssatz 2. *Es seien H_1 und H_3 erfühlen. Wenn ein Element $\bar{u} \in \Delta$ die Gleichheit*

$$F(\bar{u}, \bar{u}) = \bar{u} \tag{17}$$

erfühlt, so ist $\bar{u} = e$.

Beweis. Es sei $\Delta = (a, e]$ und $\bar{u} \neq e$ solcherart, dass die Bedingung (17) erfühlen wird. Dann

$$\bar{u} < e . \tag{18}$$

Es gilt ferner aus H_1

$$\bar{u} = F(\bar{u}, e) \tag{19}$$

und aus (18), H_3 und (17) folgt dass $F(\bar{u}, e) > F(\bar{u}, \bar{u}) = \bar{u}$ was wegen (19) unmöglich ist.

Wenn $\Delta = [e, b)$ ist, so ist der Beweis ähnlich.

Nehmen wir ferner an, dass in der Halbgruppe (Δ, F) ein Element $\bar{u} \neq e$, die Bedingung (17) erfühlt, existiert. Dann bemerken wir, dass wegen des Hilfssatzes 2 richtig der folgende Vorschlag ist.

Vorschlag 2. Wenn die Voraussetzung H_1 erfühlt wird, und wenn in Halbgruppe (Δ, F) ein Element $\bar{u} \neq e$, die die Bedingung (17) erfühlt, existiert, so ist die Funktion F in keinem Veränderlichen echt monoton wachsend.

Aus (4) und (17) folgt, dass für die Lösungen $\varphi\colon (-\infty, +\infty) \to \Delta$ der Funktionalgleichung (1) die Gleichheiten

$$(20) \qquad \varphi(0) = e \quad \text{oder} \quad \varphi(0) = \bar{u}$$

gelten, wo $\bar{u} \neq e$ und $\bar{u}$ die Gleichheit (17) erfühlt. Wir beschrieben jetzt die Lösungen der Gleichung (1) für diesen

$$(21) \qquad \varphi(0) = \bar{u}\,.$$

Richtig ist der folgende Satz:

Satz 2. *Es seien Voraussetzungen H_1 und H_4 erfühlen werden und es existiert ein Element $\bar{u} \neq e$ in Halbgruppe (Δ, F), die die Bedingung* (17) *erfühlt. Wenn $\varphi\colon (-\infty, +\infty) \to \Delta$ die Lösung der Funktionalgleichung* (1) *mit der Bedingung* (21) *ist, so*

$$\varphi(x) = \bar{u}$$

für jedes reelle x.

Beweis. Es sei $\varphi\colon (-\infty, +\infty) \to \Delta$ eine Lösung der Gleichung (1) mit der Bedingung (21) und es sei eine reelle Zahl $\bar{x} \neq 0$ und

$$(22) \qquad \varphi(\bar{x}) < \bar{u} \quad \text{oder} \quad \varphi(\bar{x}) > \bar{u}$$

Nehmen wir an, dass erste aus diesen Ungleichheiten erfühlen wird. Dann haben wir aus (21)

$$\varphi(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}+0) = F(\varphi(\bar{x}), \varphi(0)) = F(\varphi(\bar{x}), \bar{u})$$

und mit der Hilfe den H_4 und (17) ist

$$\varphi(\bar{x}) > F(\bar{u}, \bar{u}) = \bar{u}$$

was wegen der ersten Ungleichheit (22) unmöglich ist.

Wenn die zweite Ungleichheit (22) erfühlt ist, so ist der Beweis ähnlich.

3. Es seien die Voraussetzungen $H_1 - H_3$ erfühlen. Wir geben jetzt eine Eigenschafte der stetigen Lösungen der Funktionalgleichungen (1) in $(-\infty, +\infty)$ an. Mit der Hilfe des Hilfssatzes 2 erhalten wir aus (20)

Vorschlag 3. Wenn die Voraussetzungen $H_1 - H_3$ erfühlen werden, so erfühlt jede stetige Lösung $\varphi\colon (-\infty, +\infty) \to \Delta$ der Gleichung (1) die Bedingung (6). Es ist richtig das folgende

Hilfssatz 3. *Es seien die Voraussetzungen $H_1 - H_3$ erfühlen. Wenn $\varphi\colon (-\infty, +\infty) \to \Delta$ eine stetige Lösung der Gleichung* (1) *ist und wenn*

$$(23) \qquad \varphi(x_0) = e$$

für $x_0 \neq 0$, so ist

$$(24) \qquad \varphi(x) = e$$

für jedes reelle x.

Beweis. Es sei $\Delta = (a, e]$. Wir zeigen, dass die Bedingung (24) für jedes x von der Menge

$$Z = \left\{\left(\frac{mx_0}{2^n}\right): \; m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, n = 1, 2, \ldots\right\} \tag{25}$$

erfühlen wird. Bezeichnen wir

$$x_k = \frac{x_0}{2^k}, \qquad k = 1, 2, \ldots . \tag{26}$$

Es sei $k = 1$. Dann folgt aus (23) und (1), dass

$$e = \varphi(x_0) = \varphi(x_1 + x_1) = F(\varphi(x_1), \varphi(x_1)) . \tag{27}$$

Es würde

$$\varphi(x_1) \neq e ,$$

dann würde es auch (wegen $\Delta = (a, e]$) $\varphi(x_1) < e$, und mit (27) und H_3 hätten wir

$$e = F(\varphi(x_1), \varphi(x_1)) < F(e, e) = e$$

was unmöglich ist. Es ist also

$$\varphi(x_1) = e .$$

Es sei $\varphi(x_k) = e$ für eine naturale Zahl k. Dann ist es

$$e = \varphi(x_k) = F(\varphi(x_{k+1}), \varphi(x_{k+1})) ,$$

und es ist ähnlich, wie für $\varphi(x_1)$

$$\varphi(x_{k+1}) = e$$

Wir zeigten also, dass die Gleichheit (24) für jede Zahl (26) erfühlen wird. Es sei ferner $\bar{x}$ eine Zahl von (26), dann ist

$$\varphi(\bar{x}) = e . \tag{28}$$

Wir behaupten, dass

$$\varphi(-\bar{x}) = e . \tag{29}$$

Aus (6), (28) und H_1 folgt

$$e = \varphi(0) = \varphi(\bar{x} - \bar{x}) = F(\varphi(\bar{x}), \varphi(-\bar{x})) = F(e, \varphi(-\bar{x})) = \varphi(-\bar{x}) .$$

Nehmen wir ferner an, dass

$$\varphi((p-1)\bar{x}) = e \tag{30}$$

für ein naturale Zahl p ist. Wegen (30), (1), (29) und H_3 haben wir

$$e = \varphi((p-1)\bar{x}) = \varphi(p\bar{x} - \bar{x}) = F(\varphi(p\bar{x}), \varphi(-\bar{x})) = \varphi(p\bar{x}) .$$

Die Bedingung (24) wird also für jedes x von der Menge (25) erfühlt. Wegen der Dichtigkeit der Menge Z in $(-\infty, +\infty)$ und der Stetigkeit der Funktion φ in $(-\infty, +\infty)$ folgt die Bedingung (24). Wenn $\Delta = [e, b)$, so ist der Beweis dieses Hilfssatzes ähnlich. Wegen den Hilfssatzen 1 und 3 erhalten wir

SATZ 3. *Es seien die Voraussetzungen $H_1 - H_3$ erfühlen. Wenn $\varphi\colon (-\infty, +\infty) \to \Delta$ eine stetige Lösung von* (1) *ist, so gilt es*

$$\varphi(x) = e$$

für jedes reelle x.

Beweis. Es sei $\varphi\colon (-\infty, +\infty) \to \Delta$ eine stetige Lösung der Gleichung (1). Wegen des Vorschlages 3 ist $\varphi(0) = e$. Es liege in (1) $y = -x$ und $x \neq 0$. Dann ist

$$e = \varphi(0) = F(\varphi(x), \varphi(-x)),$$

d.h. für $x \in (-\infty, +\infty)$ $\varphi(-x) = [\varphi(x)]^{-1}$ ($[\varphi(x)]^{-1}$ wird ein Inwerselement von $\varphi(x)$ bezüglich der Operation F benutzt). In Hinsicht darauf gehört mit $\varphi(x)$ auch $\varphi(-x)$ zu dem Wertvorrat der Funktion φ und wegen des Hilfssatzes 1 ist

$$\varphi(x) = \varphi(-x) = e.$$

Mit der Hilfe des Hilfssatzes 3 haben wir also $\varphi(x) = e$ für jedes reelle x.

4. Weiter beschreiben wir die stetige und nichtkonstante Lösungen von (1) in $(-\infty, 0]$ oder $[0, +\infty)$. Zuerst geben wir die notwendige Bedingung für die Existenz diesen Lösungen.

SATZ 4. *Es sei $\varphi\colon (-\infty, 0] \to \Delta$ (bzwg $\varphi\colon [0, +\infty) \to \Delta$) eine stetige Lösung von* (1), *wo $\Delta = (a, \varphi(0)]$ (oder $\Delta = [\varphi(0), b)$), und es sei auch die Bedingung H_3 erfühlt. Es ist notwending für die Existenz der Funktion φ, dass das Intervall Δ bezüglich der Operation $F(u, v)$, $u, v \in \Delta$ eine stetige Halbgruppe mit dem Einheitselement bildet.*

Beweis. Der Beweis der Assoziavität von der Operation $F(u, v)$, $u, v \in \Delta$ ist derselbe wie in [1] s. 55. Wegen (5), des Hilfssatzes 2 und des Vorschlag 3 ist $\varphi(0)$ die Einheitselement der Operation F. Wegen des Hilfssatzes 1 ist (Δ, F) keine Gruppe. Die Stetigkeit der Operation F folgt aus der Stetigkeit der Funktion φ. Wir haben jetzt den folgenden

HILFSSATZ 4. *Es seien die Voraussetzungen $H_1 - H_3$ erfühlen. Wenn $\varphi\colon (-\infty, 0] \to \Delta$ oder $\varphi\colon [0, +\infty) \to \Delta$ eine stetige und nichtkonstante Lösung von* (1) *ist, so*

$$\varphi(x) < e, \quad x \neq 0, \tag{31}$$

für $\Delta = (a, e]$, oder

$$\varphi(x) > e, \quad x \neq 0, \tag{32}$$

für $\Delta = [e, b)$.

5. In diesem Abschnitt betrachten wir zuerst der Fall

$$\Delta = \Delta_1 = (a, e]. \tag{I}$$

Wir haben die folgenden Sätze:

SATZ 5. *Es seien die Voraussetzungen $H_1 - H_3$ mit* (I) *erfühlen. Jede stetige und nichtkonstante Lösung φ: $[0, +\infty) \to \Delta_1$ von* (1) *ist echt monoton fallend in $[0, +\infty)$.*

Beweis. Es sei $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ und $x_1 < x_2$. Dann ist $x_2 = x_1 + m$ und $m > 0$. Aus (1) folgt ferner

$$\varphi(x_2) = \varphi(x_1 + m) = F(\varphi(x_1), \varphi(m)).$$

Wegen (31) und H_3 ist hier

$$\varphi(x_2) < F(\varphi(x_1), e) = \varphi(x_1),$$

also φ ist echt monoton fallend.
Ähnlich beweist man

SATZ 6. *Wenn die Voraussetzungen $H_1 - H_3$ erfühlen werden, so ist jede stetige und nichtkonstante Lösung φ: $(-\infty, 0] \to \Delta_1$ der Funktionalgleichung* (1) *echt monoton wachsend.*

Wegen der Sätze 3, 5, 6 erhalten wir

SATZ 7. *Es seien die Voraussetzungen $H_1 - H_3$ mit* (I) *erfühlen.*

(a) *Wenn φ: $(-\infty, +\infty) \to \Delta_1$ eine stetige Lösung von* (1) *ist, so gilt es $\varphi(x) = e$ für jede reelle x.*

(b) *Wenn φ: $(-\infty, 0] \to \Delta_1$ eine stetige und nichtkonstante Lösung von* (1) *ist, so ist sie in $(-\infty, 0]$ echt monoton wachsend.*

(c) *Wenn φ: $[0, +\infty) \to \Delta_1$ eine stetige und nichtkonstante Lösung von* (1) *ist, so ist sie in $[0, +\infty)$ echt monoton fallend.*

Im Fall

$$\text{(II)} \qquad \Delta = \Delta_2 = [e, b)$$

erhalten wir folgende Sätze:

SATZ 8. *Es sei die Voraussetzungen $H_1 - H_3$ erfühlen.*

(a) *Wenn φ: $(-\infty, +\infty) \to \Delta_2$ eine stetige Lösung von* (1) *ist, so gilt es $\varphi(x) = e$ für jedes reelle x.*

(b) *Wenn φ: $(-\infty, 0] \to \Delta_2$ eine stetige und nichtkonstante Lösung von* (1) *ist, so ist sie in $(-\infty, 0]$ echt monoton fallend.*

(c) *Wenn φ: $[0, +\infty) \to \Delta_2$ eine stetige und nicht konstante Lösung von* (1) *ist, so ist sie in $[0, +\infty)$ echt monoton wachsend.*

6. Wir wollen jetzt die generale Lösung der Funktionalgleichung (1) für $x \leqslant 0$ und $x \geqslant 0$ angeben. Die Methode der Beschreibung der generale Lösung ist dieselbe wie in der Monographie [1].

SATZ 9. *Es seien die Voraussetzungen $H_1 - H_3$ erfühlen und es sei f eine stetige und nichtkonstante Lösung von* (1) *für $x \geqslant 0$ $(x \leqslant 0)$. Die generale, stetige Lösung φ der Gleichung* (1) *für $x \geqslant 0$ $(x \leqslant 0)$ hat den Gestalt*

$$\text{(33)} \qquad \varphi(x) = f(cx) \quad \text{und} \quad c > 0.$$

Beweis. Es seien φ: $[0, +\infty) \rightarrow \Delta$ (φ: $(-\infty, 0] \rightarrow \Delta$) eine stetige Lösung der Gleichung (1) und f: $[0, +\infty) \rightarrow \Delta$ (f: $(-\infty, 0] \rightarrow \Delta$) eine stetige und nichtkonstante Lösung von (1), und $\Delta = \Delta_1$. Aus (1) und dem Satz 7 ist

$$F(x, y) = f\{f^{-1}(x) + f^{-1}(y)\} \tag{34}$$

und

$$\varphi(x+y) = f\{f^{-1}(\varphi(x)) + f^{-1}(\varphi(y))\} .$$

Es liege hier $h(x) = f^{-1}(\varphi(x))$, dann erhalten wir

$$h(x+y) = h(x) + h(y) .$$

Wegen der Stetigkeit der Funktionen φ und f folgt, dass $h(x)$ ist stetige Lösung der Cauchy Gleichung und $h(x) = cx$, wo c eine reelle Zahl ist (sehe [1], s. 44). Aus dem Satz 7 haben wir, dass für $x \geqslant 0$, oder $x \leqslant 0$, die Funktion h echt monoton wachsen, also gilt es $c > 0$.

Wenn $\Delta = \Delta_2$, so ist der Beweis ähnlich. In diesem Fall brauchen wir der Satz 8.

7. In diesem Abschnitt werden wir der folgenden Pıoblem lösen. Es seien $\varphi_1: (-\infty, 0] \rightarrow \Delta_1$ und $\varphi_2: [0, +\infty) \rightarrow \Delta_2$ (oder $\varphi_1: (-\infty, 0] \rightarrow \Delta_2$, $\varphi_2: [0, +\infty) \rightarrow \Delta_1$) eine stetige Lösung der Funktionalgleichung (1). Wir suchen die notwendige und hinreichende Bedingungen für die Funktion φ: $(-\infty, +\infty) \rightarrow \Delta_1 \cup \Delta_2$ in der Gestalt

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{für} \quad x < 0 , \\ e & \text{für} \quad x = 0 , \\ \varphi_2(x) & \text{für} \quad x > 0 , \end{cases} \tag{35}$$

die die Funktionalgleichung erfühlt.

Nehmen wir folgende Voraussetzung an:

H_5: Das Intervall $\Delta = (a, b)$ bildet bezüglich der Operation $F(u, v)$ $u, v \in \Delta$ eine stetige Gruppe.

Aus der Voraussetzung H_5 folgen die Voraussetzungen $H_1 - H_3$ ([1], s. 56). Aus [1] wiesen wir auch, dass mit H_5 die Funktionalgleichung (1) eine stetige und nichtkonstante Lösung hat, die echt monoton ist.

Es sei $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$. Wir bilden die folgende Mengen aus den stetigen Lösungen von (1):

$$\varphi \in \emptyset_1^- \Leftrightarrow \varphi: (-\infty, 0] \rightarrow \Delta_1$$

$$\varphi \in \emptyset_1^+ \Leftrightarrow \varphi: [0, +\infty) \rightarrow \Delta_1$$

$$\varphi \in \emptyset_2^- \Leftrightarrow \varphi: (-\infty, 0] \rightarrow \Delta_2$$

$$\varphi \in \emptyset_2^+ \Leftrightarrow \varphi: [0, +\infty) \rightarrow \Delta_2$$

$$\varphi \in \emptyset \Leftrightarrow \varphi: (-\infty, +\infty) \rightarrow \Delta$$

Es ist richtig der folgende

HILFSSATZ 5. *Es seien die Voraussetzungen H_1-H_3 erfühlen und es sei*

(36) $$\bar{\varphi}(x) = \varphi(-x).$$

(a) *Wenn* $\varphi \in \varnothing_1^-$, *so* $\bar{\varphi} \in \varnothing_2^+$,

(b) *Wenn* $\varphi \in \varnothing_1^+$, *so* $\bar{\varphi} \in \varnothing_2^-$,

(c) *Wenn* $\varphi \in \varnothing_2^-$, *so* $\bar{\varphi} \in \varnothing_1^+$,

(d) *Wenn* $\varphi \in \varnothing_2^+$, *so* $\bar{\varphi} \in \varnothing_1^-$.

Beweis.

Ad. (a). Es sei $\varphi: (-\infty, 0] \to \Delta_1$. Dann ist φ eine stetige Lösung von (1) für $x \leqslant 0$. Wir zeigen, dass die Funktion $\bar{\varphi}$ erfühlt der Gleichung (1) für $x \geqslant 0$. Wirklich. Es seien $x, y, x+y \in [0, +\infty)$. Dann ist wegen (36)

$$\bar{\varphi}(x+y) = \varphi(-x-y)$$

und weiter, wegen $\varphi \in \varnothing_1^-$ und (36) ist

$$\varphi(-x-y) = F(\varphi(-x), \varphi(-y)) = F(\bar{\varphi}(x), \bar{\varphi}(y)).$$

In übrigen Fallen ist der Beweis ähnlich.

Es sei jetzt $\varphi \in \varnothing$. Dann gehört die Restriction φ_2 der Funktion φ für $x \geqslant 0$ zu $\varnothing_1^+$ oder zu $\varnothing_2^+$, und die Restriction φ_1 der Funktion φ für $x \leqslant 0$ zu $\varnothing_1^-$ oder zu $\varnothing_2^+$. Dann ist es möglich die Funktion φ in der Gestalt (35) vorstellen, wo

(37) $$\varphi_1(x) \in \varnothing_i^- \quad \text{und} \quad \varphi_2(x) \in \varnothing_i^+ \quad i = 1, 2.$$

Wir beweisen jetzt

SATZ. 10. *Es seien die Voraussetzungen H_5 erfühlen. Die Funktion* (35) *mit* (37) *gehört dann und nur dann zu* $\varnothing$ *falls*

(38) $$F(\varphi_1(x), \varphi_2(-x)) = e \quad \text{für} \quad x<0$$

und

(39) $$F(\varphi_1(-x), \varphi_2(x)) = e \quad \text{für} \quad x>0.$$

Beweis. Setzen wir zuerst voraus, dass φ die Gleichung (1) erfühlt und φ in der Gestalt (35) ist, wo φ_1 und φ_2 (37) erfühlen. Dann folgt aus [1] dass $\varphi(0) = e$ und für jedes reelle x ist

$$e = F(\varphi(x), \varphi(-x)).$$

Wenn $x \leqslant 0$ ist, so erhalten wir die Bedingung (38), wegen (35) und (37). Wenn $x>0$ ist, so erhalten wir die Bedingung (39).

Es sei jetzt die Funktion φ durch die Bedingungen (35) und (37) definieren, und es seien (38) und (39) erfühlen. Wir behaupten, dass φ die Funktionalgleichung (1) erfühlt. Hier soll man die folgenden Fälle bemerken:

1) $x>0$, $y>0$, $x+y>0$,

2) $x<0$, $y<0$, $x+y<0$,

3) $x>0,\ y<0,\ x+y<0$,

4) $x>0,\ y<0,\ x+y>0$,

5) $x<0,\ y>0,\ x+y<0$,

6) $x<0,\ y>0,\ x+y>0$,

7) eine aus $x, y, x+y$ gleich 0 ist.

Ad 1) und 2) der Beweis folgt aus (37).
Ad 3). Ist $x+y<0$, so haben wir aus (35) und (39), der Assoziavität von F und (37)

$$\begin{aligned}\varphi(x+y) = F\big(\varphi_1(x+y), e\big) &= F\big(\varphi_1(x+y), F(\varphi_1(-x), \varphi_2(x))\big) = \\ &= F\big(F(\varphi_1(x+y), \varphi_1(-x)), \varphi_2(x)\big) = \\ &= F\big(\varphi_1(y), \varphi_2(x)\big),\end{aligned}$$

also ist hier wegen (35) und des abelschen Operation F

$$\varphi(x+y) = F\big(\varphi(x), \varphi(y)\big).$$

In übrigen Fällen ist der Beweis ähnlich.

Literatur

[1] J. Aczél: *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*. Berlin 1961.
[2] G. Birkhoff, S. Mac Lane: *Przegląd algebry współczesnej*. PWN, Warszawa 1966.