STANISŁAW WOŁODŹKO

Sur une inégalité

1. Dans la note [1] l'déterminé de la décomposition bidimentielle de la variable aléatoire (X, Y), quand les décompositions frontales de variables correspondantes sont données. Nous nous rappelons un résultat de cette note. Si nous supposons que la décomposition frontale de la variable aléatoire X a la forme $\{(x_i, p_i), i = 1, \ldots, n\}$ et la décomposition frontale de la variable aléatoire Y est l'ensemble des paires $\{(y_j, q_j), j = 1, \ldots, m\}$ alors nous pouvons recevoir la décomposition admissible de la variable aléatoire (X, Y) comme l'ensemble suivant

$$\{((x_i, y_j), p_{ij}), i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m\},$$

où

$$p_{ij} = p_i q_j + \alpha_{ij}$$

et

$$\alpha_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij-1} - \varepsilon_{i-1j} + \varepsilon_{i-1j-1},$$

où

$$\varepsilon_{00} = \varepsilon_{i0} = \varepsilon_{0j} = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m.$$

En outre, les paramètres ε_{ij} satisfaisons à l'inégalité suivante

$$(1) \quad \max\{-p_i^* q_j^*, -p_i q_j + \varepsilon_{ij-1} + \varepsilon_{i-1j} - \varepsilon_{i-1j-1}\} \leqslant \varepsilon_{ij} \leqslant \leqslant \min\{p_i^* q_j + \varepsilon_{ij-1}, p_i q_j^* + \varepsilon_{i-1j}\},$$

où $\quad p_i^* = 1 - p_1 - \ldots - p_i, \; q_j^* = 1 - q_1 - \ldots - q_j.$

Puisque $p_n^* = q_m^* = 0$, il en résulte en particulier que $\varepsilon_{im} = \varepsilon_{nj} = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.

Dans cette note nous donnerons les résultats partiels concernant la resolution du système des inégalites (1).

2. Posons

$$(2) \quad \varkappa_{ij} = \varepsilon_{ij} + p_i^* q_j^* \text{ pour } i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, m \text{ et}$$

$$\varkappa_{00} = 1, \; \varkappa_{i0} = p_i^*, \varkappa_{0j} = q_j^*.$$

De l'inégalite (1) nous alors l'inegalite suivante

$$(3) \qquad \max\{0, \varkappa_{ij-1} + \varkappa_{i-1j} - \varkappa_{i-1j-1}\} \leqslant \varkappa_{ij} \leqslant \min\{\varkappa_{ij-1}, \varkappa_{i-1j}\}$$

pour $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. De plus, de (2), de la définition des nombres p_i^* et q_j^* et des propriétes des paramètres ε_{ij} résulte que

$$\varkappa_{im} = \varkappa_{nj} = 0 \tag{4}$$

pour chaque i et j.

Nous allons résoudre l'inégalité (3). Nous pouvons traiter l'inégalité (3) comme le systéme de quatre inégalités suivantes

$$0 \leqslant \varkappa_{ij}, \varkappa_{ij} \leqslant \varkappa_{ij-1}, \varkappa_{ij} \leqslant \varkappa_{i-1j} \quad \text{et} \quad \varkappa_{ij-1} + \varkappa_{i-1j} - \varkappa_{i-1j-1} \leqslant \varkappa_{ij}.$$

Des deux dernières inégalités nous obtenons

$$0 \leqslant \varkappa_{i-1j} - \varkappa_{ij} \leqslant \varkappa_{i-1j-1} - \varkappa_{ij-1}$$

alors

$$\varkappa_{i-1j} - \varkappa_{ij} = \theta_{ij}(\varkappa_{i-1j-1} - \varkappa_{ij-1}),$$

où θ_{ij} est un nombre de l'intervalle $[0, 1]$. Appliquant la méthode d'itération par rapport à j nous avons

$$\varkappa_{i-1j} - \varkappa_{ij} = \theta_{ij} \ldots \theta_{i1}(p_{i-1}^* - p_i^*) = \theta_{ij} \ldots \theta_{i1} p_i$$

alors

$$\varkappa_{ij} = \varkappa_{i-1j} - \theta_{ij} \ldots \theta_{i1} p_i .$$

Appliquant dans la suite la méthode d'itération par rappoıt à i nous obtenons la formule

$$\varkappa_{ij} = q_j^* - \theta_{1j} \ldots \theta_{11} p_1 - \ldots - \theta_{ij} \ldots \theta_{i1} p_i \tag{5}$$

pour $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$. De (4) et de (5) (pour $i = n$) nous obtenons l'équation

$$\theta_{1j} \ldots \theta_{11} p_1 + \ldots + \theta_{nj} \ldots \theta_{n1} p_n = q_j^* \tag{6}$$

pour $j = 1, \ldots, m$. Il en résulte en particulier que $\theta_{im} \ldots \theta_{i1} = 0$ pour i tel que $p_i > 0$.

3. Si les nombres $\varkappa_{ij}$ satisfont à l'inégalité (3) avec la condition (4) alors en vertu de la considération du paragraphe 2 il résulte que la formule (5) a lieu sous la condition que les paramétres θ_{ij} appartiennent à l'intervalle $[0, 1]$ et qu'ils remplissent les équations (6). On voit facilement que le choix des paramétres θ_{ij} comme plus haut suffit pour que les nombres $\varkappa_{ij}$ définis par (5) remplissent les inégalites (3). En effet, d'après (5), (6) on a $\varkappa_{ij} \geqslant 0$ et (5) implique les inégalités $\varkappa_{ij} \leqslant \varkappa_{i-1j}$, $\varkappa_{ij-1} + \varkappa_{i-1j} - \varkappa_{i-1j-1} \leqslant \varkappa_{ij}$. Il faut alors démontrer que

$$\varkappa_{ij} \leqslant \varkappa_{ij-1} \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m . \tag{7}$$

Posons d'abord $j = 1$. D'aprés (6) nous avons alors

$$q_1 = (1 - \theta_{11}) p_1 + \ldots + (1 - \theta_{n1}) p_n ,$$

donc

$$q_1 \geqslant (1 - \theta_{11}) p_1 + \ldots + (1 - \theta_{i1}) p_i \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n .$$

Il en résulte que $\varkappa_{i1} \leqslant p_i^* = \varkappa_{i0}$.

Soit maintenant $j>1$. Remplaçons d'abord $j-1$ par j dans (6). Dans ce cas nous obtenons

$$\theta_{1j-1} \dots \theta_{11} p_1 + \dots + \theta_{nj-1} \dots \theta_{n1} p_n = q^*_{j-1} \,. \tag{8}$$

De là et de (6) nous avons

$$q_j = \theta_{1j-1} \dots \theta_{11}(1-\theta_{1j}) p_1 + \dots + \theta_{nj-1} \dots \theta_{n1}(1-\theta_{nj}) p_n \,,$$

alors

$$q_j \geqslant \theta_{ij-1} \dots \theta_{11}(1-\theta_{1j}) p_1 + \dots + \theta_{ij-1} \dots \theta_{i1}(1-\theta_{ij}) p_i \tag{9}$$

pour $i = 1, \dots, n$. D'autre part, de (5) nous avons

$$\varkappa_{ij-1} - \varkappa_{ij} = q_j - \theta_{1j-1} \dots \theta_{11}(1-\theta_{1j}) p_1 - \dots - \theta_{1j-1} \dots \theta_{i1}(1-\theta_{ij}) p_i \,.$$

De là et de (9) il résulte que (7) a àgalement lieu pour $j>1$.

4. Nous nous occuperons maintenant de la recherche de la solution de l'équation (6) à la condition $\theta_{ij} \in [0, 1]$. En vertu de (8) nous admettons que chaque solution de l'équation (6) a la forme

$$\theta_{ij} = \frac{q^*_j}{q^*_{j-1}} + \tau_{ij} \quad (i = 1, \dots, n, \; q^*_0 = 1) \,, \tag{10}$$

où les nombres τ_{ij} remplissent l'équation suivante

$$\tau_{1j} \tilde{\theta}_{1j-1} p_1 + \dots + \tau_{nj} \tilde{\theta}_{nj-1} p_n = 0 \,, \tag{11}$$

où $\tilde{\theta}_{i0} = 1$ et $\tilde{\theta}_{ij-1} = \theta_{ij-1} \dots \theta_{i1}$ pour $j>1$. La formule (10) nous donne pour fixe j la solution génerale de l'équation (6). Nous allons choisir la solution de l'équation (6) telle que $\theta_{ij} \in [0, 1]$. Soit $(\tau_{1j}, \dots, \tau_{nj}) \neq (0, \dots, 0)$ un vecteur qui est une solution de l'équation (11). Multiplions le par le nombre α_j tel que les inégalites

$$0 \leqslant \frac{q^*_j}{q^*_{j-1}} + \alpha_j \tau_{ij} \leqslant 1 \quad (i = 1, \dots, n)$$

ont lieu, c'est-à-dirc, tel que

$$-\frac{q^*_j}{q^*_{j-1}} \leqslant \alpha_j \tau_{ij} \leqslant \frac{q_j}{q^*_{j-1}} \,.$$

On voit facilement que nous pouvons choisir le nombre α_j comme un nombre de l'intervalle

$$\left[-\frac{q^*_1}{q^*_{j-1} \tau^-_j}, \frac{q_j}{q^*_{j-1} \tau^-_j} \right] \cap \left[-\frac{q^*_j}{q^*_{j-1} \tau^+_j}, \frac{q_j}{q^*_{j-1} \tau^+_j} \right], \tag{12}$$

où

$$\tau^-_j = \min(\{\tau_{1j}, \dots, \tau_{nj}\} \setminus \{0\}) \quad \text{et} \quad \tau^+_j = \max(\{\tau_{1j}, \dots, \tau_{nj}\} \setminus \{0\}) \,.$$

Il est évident que $\tau_j^- \tau_j^+ < 0$ où $\tau_j^- \tau_j^+ > 0$, alors le nombre zéro appartient à chaque d'intervalle (12). Il en résulte que l'intersection ci-dessus est non vide. Remarquons ensuite que le vecteur $(\alpha_j \tau_{1j}, ..., \alpha_j \tau_{nj})$ est aussi la solution de l'équation (11), alors les nombres

$$\theta_{ij} = \frac{q_j^*}{q_{j-1}^*} + \alpha_j \tau_{ij}$$

remplissent l'équation (6) à la condition $\theta_{ij} \in [0, 1]$.

5. Il en résulte que nous pouvons obtenir chaque solution du systeme des inégalités (1) comme la suite. Il faut d'abord construire la matrice auxiliaire $[\theta_{ij}]$ avec des termes de l'intervalle $[0, 1]$ par la construction succesive de sa colonne. Dans ce but nous prenons un vecteur quelconque $(\tau_{11}, ..., \tau_{n1}) \neq (0, ..., 0)$ remplissant l'équation $\tau_{11} p_1 + ... + \tau_{n1} p_n = 0$. A la suite nous prenons un nombre quelconque α_1 de l'intervalle

$$\left[-\frac{q_1^*}{\tau_1^-}, \frac{q_1}{\tau_1^-}\right] \cap \left[-\frac{q_1^*}{\tau_1^+}, \frac{q_1}{\tau_1^+}\right].$$

Nous calculons les nombres θ_{i1} de la formule

$$\theta_{i1} = q_1^* + \alpha_1 \tau_{i1} \quad (i = 1, ..., n).$$

Ils sont les termes de la première colonne de la matrice $[\theta_{ij}]$. Ensuite nous prenons un vecteur $(\tau_{12}, ..., \tau_{n2}) \neq (0, ..., 0)$ étant la solution de l'équation

$$\tau_{12} \theta_{11} p_1 + ... + \tau_{n2} \theta_{n1} p_n = 0$$

ainsi que un nombre quelconque

$$\alpha_2 \in \left[-\frac{q_2^*}{q_1^* \tau_2^-}, \frac{q_2}{q_1^* \tau_2^-}\right] \cap \left[-\frac{q_2^*}{q_1^* \tau_2^+}, \frac{q_2}{q_1^* \tau_2^+}\right].$$

Les nombres $\theta_{i2} = \frac{q_2^*}{q_1^*} + \alpha_2 \tau_{i2}$ nous donneront la deuxième colonne de la matrice $[\theta_{ij}]$. Les colonnes suivantes on les construit de la même manière. En vertu de (2) et (5), les paramètres ε_{ij} seront déterminés à l'aide de la formule

$$\varepsilon_{ij} = (p_1 + ... + p_i) q_j^* - \theta_{1j} ... \theta_{11} p_1 - ... - \theta_{ij} ... \theta_{i1} p_i$$

pour

$$i = 1, ..., n, \; j = 1, ..., m.$$

Remarques. En ce qui concerne le paragraphe 2 on peut s'y servir de l'inégalité $\varkappa_{ij} \leqslant \varkappa_{ij-1}$ au lieu de l'inégalité $\varkappa_{ij} \leqslant \varkappa_{i-1j}$ nous obtenons alors la formule suivante $\varkappa_{ij} = p_i^* - \theta_{i1} ... \theta_{11} q_1 - ... - \theta_{ij} ... \theta_{1j} q_j$.

La manière de la construction de la matrice des paramètres $[\varepsilon_{ij}]$ ci-dessus proposeé n'est pas entierèment satisfaisante. Cette mèthode permet cependant de construire des colonnes suivantes où bien des lignes suivantes, ce qui compare avec les resultats de la note [1] apporte un certain progrès.

Travaux cités

[1] S. Wołodźko: *Sur l'associativité de la décomposition bidimentielle de la variable aléatoire*. Rocznik Nauk.-Dydak. WSP w Krakowie, Prace Mat. VII, 1974 (183-190).