MARIA ŻUREK-ETGENS

# Sur une définition de remplissage de l'équation de translation

Cette note est un complément du travail [1] consacré de la discussion des liens parmi les 8 differentes définitions de remplissage par une function $\delta$ de l'équation de translation

(1) $$\delta(\delta(a, x), y) = \delta(a, x\cdot y)\,.$$

Nous allons profiter les suivantes:

DÉFINITION 1. *La fonction* $\delta$ *de l'ensemble* $[A\times X \Leftrightarrow A]$ *remplit* (1) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{a\in A}\ \bigwedge_{x,y\in X} \{\{[(a,x)\in D_\delta \wedge (\delta(a,x),y)\in D_\delta] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [(x,y)\in D. \wedge (a, x\cdot y)\in D_\delta]\} \Rightarrow (1)\}\ ^{*)}\,.$$

DÉFINITION 6. *La fonction* $\delta$ *de l'ensemble* $[A\times X \Leftrightarrow A]$ *remplit* (1) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{a\in A}\ \bigwedge_{x,y\in X} \{[(x,y)\in D. \wedge \bigvee_{\bar a, \bar b, \bar c\in A} ((\bar a, x)\in D_\delta \wedge (\bar b, y)\in D_\delta \wedge (\bar c, x\cdot y)\in D_\delta)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \big[\big(((a,x)\in D_\delta \wedge (\delta(a,x),y)\in D_\delta) \Leftrightarrow (a, x\cdot y)\in D_\delta\big) \wedge (1)\big]\}\,.$$

DÉFINITION 7. *La fonction* $\delta$ *de l'ensemble* $[A\times X \Leftrightarrow A]$ *remplit* (1) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{a\in A}\ \bigwedge_{x,y\in X} \{[(x,y)\in D. \wedge (a,x)\in D_\delta \wedge (\delta(a,x),y)\in D_\delta \wedge (a, x\cdot y)\in D_\delta] \Rightarrow (1)\}\,.$$

DÉFINITION 8. *La fonction* $\delta$ *de l'ensemble* $[A\times X \Leftrightarrow A]$ *remplit* (1) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \bigwedge_{a\in A}\ \bigwedge_{x,y\in X} \{[(x,y)\in D. \wedge (a,x)\in D_\delta \wedge (\delta(a,x),y)\in D_\delta] \Rightarrow [(a, x\cdot y)\in D_\delta \wedge (1)]\}\,.$$

Dans [1] (p. 106) Z. Moszner a suggéré la définition suivante:

DÉFINITION 9. *La fonction* $\delta \in [A\times X \Leftrightarrow A]$ *remplit l'équation* (1) *si la condition suivante est satisfait*:

---

*) $D_\delta$ — la domaine de la fonction.
$D.$ — la domaine de l'operation „·" définie dans $X$.

(9) *pour chaque* $a$ *de l'ensemble* $A$ *et pour tous les* $x, y$ *de l'ensemble* $X$, *si la paire* $(x, y)$ *est un élément de l'ensemble* $D.$, *alors les paires* $(a, x)$, $(\delta(a, x), y)$ *appartiennent à l'ensemble* $D_\delta$ *si et seulement si la paire* $(a, x \cdot y)$ *appar tient à* $D_\delta$ *et dans ce cas l'égalité* (1) *a lieu.*

Notons par $\Omega_9$ la famille des fonctions remplissant l'équation (1) d'après la définition 9 et pour les ensembles $A$ et $X$ arbitrairement établis.

Démontrons

THÉORÈME 1. $\Omega_1 \not\subseteq \Omega_9 \not\subseteq \Omega_6$ et $\Omega_9 \not\subseteq \Omega_8$ et $\Omega_9 \not\subseteq \Omega_7$. *)

Démonstration. Les inclusions $\Omega_1 \subset \Omega_9 \subset \Omega_6$, $\Omega_9 \subset \Omega_8$, $\Omega_9 \subset \Omega_7$ sont des conclusions logiques correspondantes aux conditions qui les définissent.

Soit $A = R$ et $(X, \bullet) = (M(R), \bullet)$, où $M(R)$ est un ensemble des matrices carrés d'un degré quelconque avec l'opération de multiplication. La fonction $\delta$: $R \times M(R) \to R$ définie par $\delta(a, x) = a \det x$ est l'élément de l'ensemble $\Omega_9$, car aussitôt que $(x, y) \in D.$ alors les expressions $\delta(\delta(a, x), y)$ et $\delta(a, x \cdot y)$ ont un sens et en plus l'égalité (1) a lieu. La fonction $\delta$ n'est pas un élément de l'ensemble $\Omega_1$, car le fait $(a, x) \in D_\delta$ et $(\delta(a, x), y) \in D_\delta$ n'implique pas la possibilité de multiplication des matrices $x$ et $y$. On a démontré que $\Omega_1 \neq \Omega_9$.

Posons: $A$ — l'ensemble des nombres entiers; $X = A \times A$. Nous définissons l'opération "$\cdot$" dans l'ensemble $X$ de la manière suivante: $(x, y) \cdot (z, t)$ a un sens si et seulement si $y = z$ et alors $(x, y) \cdot (z, t) = (x, t)$.
Définissons la fonction $\delta$ comme suit: $\delta(a, (x, y)) = y$ si et seulement si $a = x$ et $y \neq 0$. **) La fonction $\delta$ définie de telle manière est un élément de l'ensemble $\Omega_6$ ([1], p. 102–103) et elle n'appartient pas à l'ensemble $\Omega_9$, car la paire $((7, 0), (0, 3)) \in D.$ et $\delta(7, (7, 0) \cdot (0, 3))$ a un sens, mais la paire $(7, (7, 0))$ n'est pas un élément de l'ensemble $D_\delta$. Donc $\Omega_9 \neq \Omega_6$.

Considérons, pour une paire arbitraire de nombres naturels $(a, x)$, la fonction: $\delta(a, x) = a \cdot x$ définie seulement si $a$ ou $x$ est un nombre pair. ***)

La fonction $\delta$, définie de telle manière, appartenant à l'ensemble $\Omega_8$ ([1], p. 107) ne remplit toutefois pas de la condition (9). On peut multiplier les éléments 5 et 4 et la paire $(3, 5 \cdot 4) \in D_\delta$, mais $\delta(3, 5)$ n'a pas de sens, alors $\Omega_9 \neq \Omega_8$.

Car $\Omega_8 \not\subseteq \Omega_7$ ([1], p. 107) et $\Omega_9 \not\subseteq \Omega_8$ donc $\Omega_9 \neq \Omega_7$.

THÉOREMÈ 2. *Les inclusions présentées au théoremè* 1 *épuisent toutes les possibilitées des inclusions parmi les ensembles* $\Omega_9$ *et* $\Omega_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, 8)$.

Démonstration. $\Omega_9 \not\subset \Omega_4$, car en vertu de théoremè 4 ([1]) $\Omega_1 \not\subset \Omega_4$ et $\Omega_1 \subset \Omega_9$. Car $\Omega_2 \subset \Omega_4$ ([1], th. 2), donc $\Omega_9 \not\subset \Omega_2$. $\Omega_2 \not\subset \Omega_9$ parce que $\Omega_2 \not\subset \Omega_6$ ([1], th. 4) et $\Omega_9 \subset \Omega_6$.

---

*) Les ensembles $\Omega$ pour $i = 1, 2, \ldots, 8$ sont définis dans [1].

**) [1]; exemple 5, p. 102.

***) [1], exemple 2, p. 98.

Analogiquement $\Omega_4 \not\subset \Omega_9$. $\Omega_9 \not\subset \Omega_5$ parce que $\Omega_1 \not\subset \Omega_5$([1], th.4) et $\Omega_1 \subset \Omega_9$. Aussitôt que $\Omega_3 \subset \Omega_5$ ([1], th. 3), donc $\Omega_9 \not\subset \Omega_3$. $\Omega_3 \not\subset \Omega_9$, car $\Omega_3 \not\subset \Omega_6$([1], th.4) et $\Omega_9 \subset \Omega_6$. Donc $\Omega_5 \not\subset \Omega_9$.

### Travaux cité


[1] Z. Moszner, M. Żurek: *Sur les differentes définitions des solutions de l'équation de translation*, Rocz. Nauk.-Dydak. WSP w Krakowie. Prace Mat. VII, 51 (1974), p. 95–108.