

## Porównanie algebraicznej i geometrycznej metody kwantowania dla oscylatora harmonicznego

### WSTĘP

Wiadomo, że zarówno w mechanice klasycznej jak i kwantowej występują grupy symetrii danego układu dynamicznego.

Mechanika klasyczna: Przypuśćmy, że znaleźliśmy zbiór niezależnych stałych ruchu  $F_1, \dots, F_r$ . Każda z tych stałych może zostać użyta do wygenerowania jednoparametrowej podgrupy transformacji styczościowych, które tworzą grupę wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek:

$$(F_k, F_m) = \sum_{g/1}^n c_{km}^g F_g$$

Wynika stąd, że problem znalezienia ciągłej grupy symetrii redukuje się do znalezienia stałych ruchu spełniających powyższy warunek.

Mechanika kwantowa: Zgodnie z ideą kwantowania klasyczne całki ruchu zastępujemy przez operatory hermitowskie, oraz nawiasy Poissona zastępujemy przez komutatory. Zakładamy, że:

$$[F_k, F_m] = i\hbar \sum_{g/1}^n c_{km}^g F_g$$

Spełnienie tego założenia przez operatory, będące stałymi ruchu, pociąga zdefiniowanie w przestrzeni Hilberta grupy transformacji. Z formalnego punktu widzenia skończone transfor-

cje grupy można traktować jako unitarne operatory działające w przestrzeni Hilberta.

$$U(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = \exp[i(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \dots + \lambda_r F_r)]$$

$\{\lambda_i\}$  - parametry grupy

$\{F_i\}$  - macierze generatorów w określonej bazie /elementy algebry Lie'go danej grupy/

Macierze tych operatorów stanowią unitarną reprezentację grupy ze stanami własnymi każdego energetycznego poziomu jako bazą przestrzeni Hilberta tej reprezentacji. /Gdy grupa jest zwarta, każda reprezentacja unitarna jest w pełni redukowalna a jej nieredukowalne podprzestrzenie są skończonego wymiaru/. Wymiar każdej reprezentacji nieredukowalnej daje nam stopień degeneracji poziomów.

## C z ę ś ć I

### OSCYLATOR HARMONICZNY n-WYMIAROWY I JEGO GRUPA SYMETRII SU(n) W REPREZENTACJI LICZBY OBSADZEŃ

#### Algebra Lie'go grupy SU(n)

Izotropowy oscylator harmoniczny n-wymiarowy jest n-wymiarowym układem dynamicznym z Hamiltonianem:

$$\mathcal{H} = \sum_{i/1}^n \mathcal{H}_i \quad (1.1)$$

$$\mathcal{H}_i = \frac{1}{2m} (p_i^2 + m^2 \omega^2 q_i^2) \quad (1.2)$$

gdzie:

oraz spełnione są następujące reguły komutacji:

$$[q_i, p_k] = i\hbar \delta_{ik} \quad (1.3)$$

Aby uniknąć niepotrzebnych stałych wprowadzamy następującą zamianę zmiennych:

$$\mathcal{H}_i = H_i \hbar \omega \quad (1.4)$$

$$q_i = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} Q_i \quad (1.5)$$

$$p_i = (m\hbar\omega)^{\frac{1}{2}} P_i \quad (1.6)$$

W nowych zmiennych Hamiltonian wyraża się wzorem:

$$H = \sum_{i/1}^n H_i = \frac{1}{2} \sum_{i/1}^n (P_i^2 + Q_i^2) \quad (1.7)$$

Operatory hermitowskie  $P_i$  oraz  $Q_i$  spełniają następujące reguły komutacji:

$$[Q_i, P_k] = i\delta_k^i \quad (1.8)$$

Aby znaleźć bazę algebry Lie'go grupy  $SU(n)$  wprowadzamy nowe hermitowsko sprzężone operatory  $a^+$ ,  $a$  zwane odpowiednio operatorami kreacji i anihilacji, zdefiniowane następująco:

$$\begin{cases} a^k = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_k + iP_k) \\ a_k^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_k - iP_k) \end{cases} \quad (1.9)$$

Operatory te spełniają następujące reguły komutacji:

$$[a^k, a_l^+] = \delta_l^k, [a^k, a^l] = 0, [a_k^+, a_l^+] = 0 \quad (1.10)$$

Operator Hamiltona zapisany przy pomocy operatorów kreacji i anihilacji wyraża się następującym wzorem:

$$H = \sum_{k/1}^n \left( a_k^+ a^k + \frac{1}{2} \right) \quad (1.11)$$

Dowolny operator postaci  $a^i a_j^+$  komutuje z Hamiltonianem. Tworząc liniowe kombinacje operatorów  $a^i a_j^+$ , oraz ich hermitowskie sprzężenia, możemy utworzyć  $n^2$  niezależnych operatorów hermitowskich. Wynika stąd, że istnieją różne zupełne zbiory komutujących obserwabl, którymi możemy posłużyć się opisując dany układ.

Wykażemy niżej, że kombinacje liniowe operatorów  $a^i a_j^+$  tworzą bazę algebry Lie'go grupy  $SU(n)$ . W tym celu wprowadzamy operatory:

$$A_k^l = \frac{1}{2} (a_k^+ a^l + a^l a_k^+) \quad k, l = 1 \dots n \quad (1.12)$$

Operatory te nie są hermitowskie bowiem:

$$(A_k^l)^\dagger = A_l^k$$

natomiast kombinacje liniowe tych operatorów typu:

$$A_k^l + A_l^k \quad ; \quad i(A_k^l - A_l^k)$$

są operatorami hermitowskimi.

Operatory 1.12 można zapisać w postaci:

$$A_k^l = a_k^+ a^l \quad k \neq l \quad (1.13)$$

$$A_k^k = a_k^+ a^k + \frac{1}{2} \quad k=l$$

Operatory te spełniają następujące reguły komutacji:

$$[A_k^l, A_m^n] = \delta_m^l A_k^n - \delta_k^n A_m^l \quad (1.14)$$

Hamiltonian układu wyrażony przy pomocy operatorów  $A_k^l$  ma postać:

$$H = \sum_{k/1}^n A_k^k = \sum_{k/1}^n (a_k^+ a^k + \frac{1}{2}) \quad (1.15)$$

Operator:

$$a_k^+ a^k = N_{k/1} \quad (1.16)$$

jest operatorem liczby obsadzeń k-tego stanu.

Ponieważ operator Hamiltona H komutuje ze wszystkimi operatorami  $A_k^l$ , tworzymy operatory bezśladowe:

$$A_k^{l1} = A_k^l - \frac{1}{n} \delta_k^l H \quad (1.17)$$

które spełniają również reguły komutacji (1.14).

Zbiór bezśladowych operatorów (1.17), ewentualnie ich liniowych kombinacji tworzy bazę algebry Lie'go grupy SU(n) wymiaru  $n^2-1$ .

### Reprezentacje nieredukowalne grupy SU(n) i ich bazy

Grupa SU(n) jest jednospójną zwartą grupą Lie'go, a za tym wszystkie nieredukowalne unitarne reprezentacje tej grupy mają następujące własności: [7]

- a) są skończenie wymiarowe,
- b) dowolna unitarna reprezentacja może być rozłożona na sumę prostą nieredukowalnych reprezentacji.

c) Każdy element grupy SU/n/ można zapisać w postaci:

$$g = \exp(iA)$$

A - element algebry Lie'go /hermitowska macierz bezśladowa/  
 W związku z powyższymi własnościami, badanie unitarnych nieredukowalnych reprezentacji grupy Lie'go SU/n/ jest równoważne badaniu hermitowskich nieredukowalnych reprezentacji algebry Lie'go grupy SU/n/. Nieredukowalne reprezentacje algebry /której elementy bazowe spełniają reguły komutacji 1.14/ generują nieredukowalne reprezentacje grupy SU/n/. Nie wszystkie nieredukowalne reprezentacje grupy SU/n/ są realizowane przez badany układ. Realizowane są tylko reprezentacje symetryczne typu /N, 0...0/.

Jeżeli przez  $|0\rangle$  oznaczymy stan "próżni", to reprezentację tożsamościową  $N=0$  definiujemy następująco:

$$\begin{aligned} a^k |0\rangle &:= 0 \\ A_k |0\rangle &:= 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Bazę przestrzeni reprezentacji fundamentalnej  $N=1$  stanowią wektory:

$$\{a_k^\dagger |0\rangle\} \quad k=1, \dots, n \quad (1.19)$$

określone następująco:

$$a_k^\dagger |0\rangle = |0, 0, \dots, \overset{1}{k}, \dots, 0\rangle \quad (1.20)$$

Unormowane wektory bazowe przestrzeni reprezentacji nieredukowalnych przy  $N > 1$  /N- liczba całkowita dodatnia/ otrzymujemy następująco:

$$\frac{1}{\sqrt{j_1! j_2! \dots j_n!}} (a_1^\dagger)^{j_1} (a_2^\dagger)^{j_2} \dots (a_n^\dagger)^{j_n} |0\rangle \equiv |j_1, j_2, \dots, j_n\rangle \quad (1.21)$$

gdzie:  $j_1 + j_2 + \dots + j_n = N$        $j_i = 0, 1, 2 \dots$

Wymiar nieredukowalnej reprezentacji dany jest wzorem: [7]

$$\dim(N,0) = \frac{(N+n-1)!}{N!(n-1)!} \quad (1.22)$$

Aby otrzymać znany związek wyrażający wartości własne operatora Hamiltona należy określić działanie operatorów  $a_k^+$   $a_k$  na wektory bazowe  $|\nu_1 \dots \nu_n\rangle$ . Wykorzystując związek:

$$[a_l^+, (a_l^+)^{n+1}] = (n+1)(a_l^+)^n \quad (1.23)$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a_k^- a_k^+ |\nu_1 \dots \nu_n\rangle &= \sqrt{\nu_k(\nu_k+1)} |\nu_1 \dots \nu_{k+1} \dots \nu_{k-1} \dots \nu_n\rangle \\ a_k^+ a_k^- |\nu_1 \dots \nu_n\rangle &= \nu_k |\nu_1 \dots \nu_n\rangle \end{aligned} \quad (1.24)$$

Z równości 1.24 wynika, że:

$$H = \sum_{k/1}^n (a_k^+ a_k^- + \frac{1}{2}) \quad (1.25)$$

$$H|\nu_1 \dots \nu_n\rangle = \left[ \sum_{k/1}^n a_k^+ a_k^- + \frac{1}{2} \right] |\nu_1 \dots \nu_n\rangle = \sum_{k/1}^n (\nu_k + \frac{1}{2}) |\nu_1 \dots \nu_n\rangle = (N + \frac{n}{2}) |\nu_1 \dots \nu_n\rangle$$

i odpowiednie wartości własne energii Hamiltonianu 1.4 są wyrażone wzorem:

$$\begin{aligned} E_N &= (N + \frac{n}{2}) \hbar \omega \\ N &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.26)$$

## C z ę ś ć II

### NIEZWARTE FORMY ALGEBR GENERUJĄCYCH PEŁNE WIDMO n-WYMIAROWEGO OSCYLATORA HARMONICZNEGO I ICH REPREZENTACJE

#### Uwagi dotyczące konstrukcji niezwartych form danej algebry

W części I tej pracy opisana została algebra Lie'go /oraz jej reprezentacje/ grupy SU/n/ symetrii oscylatora harmonicznego. Należy zaznaczyć, że grupa SU/n/ jest grupą symetrii oscylatora harmonicznego.

nego dla ustalonego poziomu energetycznego, a za tym nie odtwarza pełnego widma energii /w ramach jednej nieredukowalnej reprezentacji/. Aby otrzymać pełne widmo, należy rozszerzyć zbadaną algebrę grupy SU/n/. Ogólną ideę tworzenia niezwartych rozszerzeń danej algebry symetrii badanego układu można sformułować w następujący sposób [8 , 9 , 10]:

A. Niech S będzie algebrą grupy symetrii badanego układu zdefiniowaną przez układ równań:

$$[A_i, H] = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

gdzie  $A_1 \dots A_n$  - generatory prostej lub półprostej algebry symetrii rangi 1, H- operator energii badanego układu. Z 2.1. wynika, że operator energii H jest niezmiennikiem tej algebry, a za tym winien być funkcją operatorów Casimira  $I_1 \dots I_l$  algebry S [11] .

Stany własne należące do różnych wartości własnych operatora H stanowią wektory bazowe przestrzeni różnych nieredukowalnych reprezentacji algebry S [11].

B. Niech  $B_1 \dots B_m$  będzie zbiorem operatorów o następujących własnościach:

1. generatory  $A_1 \dots A_n, H, B_1 \dots B_m$  tworzą bazę niezwartej algebry Lie'go, którą oznaczymy symbolem SG
2. S- jest maksymalną zwartą podalgebrą algebry SG
3. Stany własne operatora H tworzą bazę dla nieredukowalnej reprezentacji algebry SG. Zakładamy również, że potrafimy znaleźć reprezentację algebry SG, która jest sumą prostą nieredukowalnych reprezentacji podalgebry S, oraz każda z nieredukowalnych reprezentacji podalgebry S jest zawarta w tej reprezentacji algebry SG co najwyżej raz. Operatory  $\{B_a\}$  mają niezerowe elementy macierzowe między różnymi reprezentacjami algebry S, dlatego określona w ten sposób reprezentacja algebry SG odtwarza pełne widma operatora energii układu.

C. Niech  $W_1 \dots W_g$   $g \geq 1$  będą niezmiennikami algebry SG / wyrażają się one przez operatory  $\{A_1, B_a\}$ , oraz operator energii H. Zgodnie z lemmatem Schura dla każdej ustalonej reprezentacji SG operatory  $\{W_\alpha\}$  są c-liczbami.

Równania:

$$W_\alpha = W_\alpha(A_1, \dots, A_n, H, B_1, \dots, B_m), \alpha = 1, \dots, g \quad (2.2)$$

określają zależność operatora energii H od generatorów  $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$  oraz stanowią podstawową zależność funkcyjną dla dynamicznych rozwiązań problemu.

### Niezwane rozszerzenia algebry symetrii grupy SU/n/ oscylatora harmonicznego

W przypadku oscylatora harmonicznego chcemy znaleźć taką algebrę, która zawiera SU/n/ jako maksymalną zwartą podalgebrę, oraz istnieje jej reprezentacja będąca sumą prostą reprezentacji SU/n/, bazującą na przestrzeni rozpiętej przez wszystkie wektory postaci (1.21).

Jak wykazano w pracy [12] istnieją dwie takie algebry, w które możemy zanurzyć algebrę grupy SU/n/, aby otrzymać pełne widmo oscylatora harmonicznego. Jedną z nich jest algebra Sp/nR/ generowana przez operatory 1.12 oraz operatory:

$$A_{ij}^0 = \frac{1}{2} \{a_i^+, a_j^+\}, A_0^0 = H, A_0^{ij} = -\frac{1}{2} \{a^i, a^j\} \quad (2.3)$$

$\{ \}$  - oznacza antykomutator. Reguły komutacji, które spełnia układ operatorów (1.12) oraz (2.3) są następujące:

$$[A_j^i, A_0^{lk}] = -\delta_j^l A_0^{ki} - \delta_j^k A_0^{li} \quad (2.4)$$

$$[A_j^i, A_0^{lk}] = \delta_l^i A_{jk}^0 + \delta_k^i A_{jl}^0$$

$$[A_0^{lk}, A_0^{mn}] = \delta_k^m A_l^n + \delta_k^n A_l^m + \delta_l^m A_k^n + \delta_l^n A_k^m$$



$$[A_o^\circ, A_{ij}^\circ] = 2A_{ij}^\circ$$

$$[A_o^\circ, A_o^{ij}] = -2A_o^{ij}$$

$$[A_{kl}^\circ, A_{mn}^\circ] = [A_o^{kl}, A_o^{mn}] = 0$$

Uwaga: W definicji 1.9 wskaźniki dolne i górne nie mają charakteru tensorowego

Biliniowy operator Casimira algebry  $Sp/nR/$  można wyrazić w następującej formie [13]:

$$Q_2 = B_2 + \frac{H^2}{2} + \frac{1}{2} \{A_o^{ij}, A_{ij}^\circ\} \quad (2.5)$$

Wartość operatora  $Q_2$  jest ustalona i w przypadku gdy reprezentacja algebry  $Sp/nR/$  jest sumą prostą symetrycznych reprezentacji  $SU/n/$  wynosi: [13]

$$Q_2 = -\frac{n}{2} \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (2.6)$$

Operator  $B_2$  jest biliniowym operatorem Casimira dla grupy  $SU/n/$ . Wartość operatora Casimira  $B_2$  dla symetrycznej reprezentacji  $/N, 0, \dots, 0/$  grupy  $SU/n/$  wynosi /patrz dodatek 1/

$$B_2 = \frac{n-1}{n} N(n+N) \quad (2.7)$$

Reprezentacje 2.1 należące do określonego stanu otrzymujemy kładąc kolejno  $N = 0, 1, 2, \dots$   $/N = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n/$

Antykomutator zawarty we wzorze 2.5 wynosi:

$$\frac{1}{2} \{A_o^{ij}, A_{ij}^\circ\} = -H^2 - \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1\right) \quad (2.8)$$

Podstawiając 2.8 do 2.5 otrzymujemy:

$$H^2 = \frac{n}{n-1} \left[ B_2 + \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) \right] \quad (2.9)$$

Wstawiając wartość  $B_2$  do 2.9 obliczamy:

$$H^2 = \left(N + \frac{n}{2}\right)^2 \quad N = 0, 1, \dots \quad (2.10)$$

Otrzymany wynik jest identyczny z wynikiem 1.26. Aby wyczerpać wszystkie reprezentacje oscylatora harmonicznego należy wziąć dwie nieskończone nieredukowalne reprezentacje grupy  $Sp/nR/$ . Pierwsza jest sumą prostą wszystkich symetrycznych reprezentacji algebry  $SU/n/$  z wartościami  $N= 0,2,4\dots$  druga z wartościami  $1,3,5, \dots$ .

### C z ę ś ć III

#### OSCYLATOR HARMONICZNY TRÓJWYMIAROWY, BAZA KRĘTOWA

W dwóch poprzednich rozdziałach opisany został model algebraiczny  $n$ -wymiarowego izotropowego oscylatora harmonicznego w reprezentacji liczby obsadzeń. W wyniku rozszerzenia niezwartego algebry symetrii grupy  $SU/n/$  zostało odtworzone pełne widmo energetyczne oscylatora harmonicznego w ramach reprezentacji niezwartej grupy  $Sp/nR/$ . W tym rozdziale zostanie opisana jedna z możliwości praktycznego zastosowania skonstruowanego modelu algebraicznego. W tym celu zostanie skonstruowany taki operator, /zbudowany z operatorów kreacji i anihilacji/, dzięki któremu można odtworzyć dowolny stan energetyczny oscylatora harmonicznego ze stanu "próżni", będącego podstawowym stanem oscylatora. Przy pomocy tego operatora można również obliczyć prawdopodobieństwa przejść z jednego poziomu energetycznego na drugi.

Konstrukcja operatora  $\chi_{nl}^m$  przeprowadzającego stan "próżni" w dowolny stan oscylatora, określony liczbami kwantowymi  $n, l, m$

Zgodnie z rozważaniami zawartymi w pierwszej części pracy, dowolny unormowany stan trójwymiarowego oscylatora har-

monicznego w reprezentacji liczby obsadzeń otrzymujemy działając operatorem postaci:

$$\Omega_{n_1, n_2, n_3} = \prod_{i/1}^3 \frac{(a_i^+)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} \quad |n_i = 0, 1, 2, \dots \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.1)$$

na stan "próżni" /stan podstawowy/ oznaczony symbolem  $0, 0, 0$ . W wyniku działania operatora 3.1 na stan "próżni" otrzymujemy stan:

$$|n_1, n_2, n_3\rangle = \Omega_{n_1, n_2, n_3} |0, 0, 0\rangle \quad (3.2)$$

Aby móc opisać oscylator harmoniczny w reprezentacji momentu pędu wprowadzamy operatory "bazy sferycznej" zdefiniowane następująco:

$$a_{\pm 1} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x \pm i a_y); \quad a_0 = a_z \quad (3.3)$$

Reguła określająca operator sprzężony po hermitowsku dana jest następującym wzorem:

$$|a_{\mu}^* = (-1)^{\mu} (a_{-\mu})^+ \quad \mu = \pm 1, 0 \quad (3.4)$$

Operatory 3.3 oraz 3.4 spełniają następujące reguły komutacji:

$$[a_{\mu}, a_{\mu'}^+] = (-1)^{\mu} \delta_{\mu, -\mu'}, \quad \delta_{\mu, -\mu'} = \begin{cases} 1 & \mu + \mu' = 0 \\ 0 & \mu + \mu' \neq 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

$$[a_{\mu}^+, a_{\mu'}^+] = 0$$

$$[a_{\mu}, a_{\mu'}] = 0$$

W bazie tej Hamiltonian jest wyrażony wzorem:

$$|H = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} a_{\mu}^+ a_{\mu} + \frac{3}{2} \quad (3.6)$$

oraz spełnione są następujące reguły komutacji:

$$[H, a_{\mu}^+] = a_{\mu}^+ \quad (3.7)$$

$$[H, a_{\mu}] = -a_{\mu}$$

Niech  $L_0$  oznacza składową "z" operatora momentu pędu. Można wykazać, że służące są również następujące reguły komutacji:

$$[L_0, a_\mu] = \mu a_\mu$$

$$[L_0, a_\mu^+] = \mu a_\mu^+ \quad (3.8)$$

Z reguł komutacji 3.7. i 3.8. wynika, że operatory  $a_\mu^+$  kreują 1 kwant energii oraz  $\mu$ -kwantów rzutu momentu pędu, natomiast operatory  $a_\mu$  anihilują jeden kwant energii i kreują  $\mu$  kwantów rzutu momentu pędu. Z własności operatorów tensorowych pierwszego rzędu [11] wynika, że działając operatorami  $a_\mu$  ewentualnie  $a_\mu^+$  na stan określony liczbami kwantowymi  $|n, l, m\rangle$  otrzymujemy kombinację liniową stanów  $|n', l' \pm 1, m \pm \mu\rangle$ , gdzie  $n' = n - 1$  ewentualnie  $n' = n + 1$  odpowiednio. Korzystając z twierdzenia Eckarta, - Wignera oraz z własności współczynników Clebscha-Gordona stan o określonej liczbie kwantowej  $n$ , otrzymujemy w wyniku operacji, którą możemy zapisać następująco:

$$|n+1, l', m'\rangle = N_{l'l}^+ \sum_{\mu} c_{m\mu}^{l', l, l'} a_\mu^+ |n, l, m\rangle \quad (3.9)$$

$$|n-1, l', m'\rangle = N_{l'l}^- \sum_{\mu} c_{m\mu}^{l', l, l'} a_\mu |n, l, m\rangle \quad (3.10)$$

gdzie:  $m' = m + \mu$ ,  $l' = l \pm 1$ ,  $N_{l', l}^+, N_{l', l}^-$  są stałymi normalizacyjnymi wyrażonymi następująco [14]:

$$N_{l+1, l}^+ = \left[ \frac{2l+3}{(l+1)(n+l+3)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad N_{l-1, l}^+ = \left[ \frac{2l-1}{l(n-l+2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.11)$$

$$N_{l+1, l}^- = \left[ \frac{2l+3}{(l+1)(n-l)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad N_{l-1, l}^- = \left[ \frac{2l+1}{l(n+l+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.12)$$

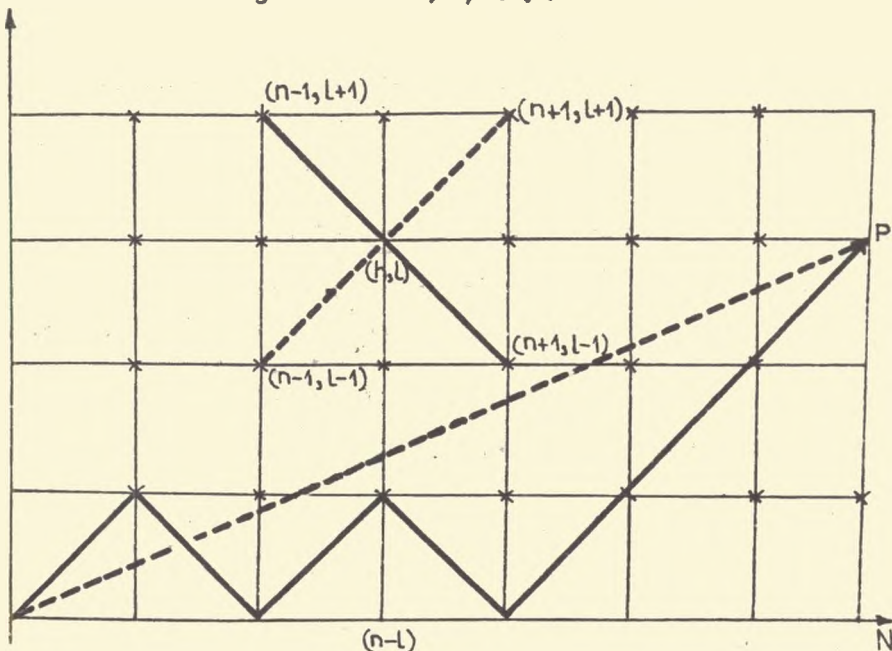
Należy zaznaczyć, że energetyczna liczba kwantowa  $n$  jest związana z "główną liczbą kwantową" następująco:

$$n = 2\bar{n} + l - 2 \quad ; \quad \bar{n} = 1, 2, \dots \quad ; \quad n = 0, 1, \dots$$

Określone wektory stanu  $|n, l, m\rangle$  mają postać:

$$|n, l, m\rangle = R_{nl}(r) Y_l^m(\vec{r})$$

gdzie radialne funkcje są numerowane liczbą kwantową  $n$ . Oczywiście  $(n-l)$  jest zawsze liczbą parzystą nieujemną. Działanie operatorów 3.9 oraz 3.10 na poszczególne stany, można zobrazować graficznie /rys.1/.



Rysunek 1

Rysunek 1 przedstawia wykres stanów oscylatora harmonicznego. Każdy punkt zaznaczony na wykresie reprezentuje  $(2l+1)$  stanów oscylatora harmonicznego. Wektor  $\vec{OP}$  zaznaczony na wykresie linią przerywaną nie jest możliwą operacją /tzn. przejścia ze stanu "próżni" do stanu określonego liczbami kwantowymi  $|n, l, m\rangle$  nie można otrzymać bezpośrednio, najkrótszą drogą przy pomocy operatorów postaci

3.9, 3.10/ lecz może zostać zastąpiony przez kilka kolejnych operacji zaznaczonych linią ciągłą. Na wykresie pokazano również jak działają operatory 3.9, 3.10 na stan o określonych liczbach kwantowych  $n, l$ .

Aby móc skonstruować dowolny stan  $|n, l, m\rangle$  ze stanu podstawowego  $|0, 0, 0\rangle$  musimy znaleźć operator analogiczny do operatora 3.1.

W interpretacji graficznej /rys.1/ odpowiada on przejściu z początku naszego wykresu do punktu P/ Jeśli szukany operator oznaczymy symbolem  $\chi_{nl}^m$  to formalnie możemy zapisać:

$$|n, l, m\rangle = \chi_{nl}^m |0, 0, 0\rangle \quad (3.13)$$

Ponieważ wiadomo, że operator  $\chi_{nl}^m$  musi być tensorem sferycznym rzędu  $l$  z rzutem  $m$ , oraz jednorodnym wielomianem składowych  $a_\mu^+$  operatora tensorowego  $\hat{a}^+$  rzędu pierwszego, powinien mieć następującą postać:

$$\chi_{nl}^m = K_{nl} a^{+(n-l)} Y_l^m(\hat{a}^+) \quad (3.14)$$

gdzie  $K_{nl}$  jest stałą normalizacyjną.

Należy zaznaczyć, że  $a^{+(n-l)} = (\hat{a}^+ \hat{a}^+)^3$  gdzie  $2\nu = n-1$ , oraz

jest operatorem sferycznym skalarnym /patrz np. [11]/. Poprawność postaci 3.14 operatora  $\chi_{nl}^m$  staje się oczywista, jeśli operację 3.9 stosuje się kolejno od stanu  $n=0, l=0, m=0$ , do stanu określonego liczbami kwantowymi  $|n, l, m\rangle$ .

Właściwości operatora  $\chi_{nl}^m$

Z definicji operatora  $\chi_{nl}^m$  wynika, że:

$$\langle n, l, m | n, l, m \rangle = \langle 0 | \chi_{nl}^{m+} \chi_{nl}^m | 0 \rangle = 1 \quad (3.15)$$

Operator  $[\chi_{nl}^m]^\dagger$  wyrażony następująco:

$$[\chi_{nl}^m]^\dagger = (-)^m \hat{a}^{n-l} Y_l^{-m}(\hat{a}) \quad (3.16)$$

gdzie:  $\hat{a}^{n-1} = (\hat{a} \hat{a})^n$

jest operatorem, który anihiluje  $n$  jednostek energii,  $l$ -jednostek orbitalnego momentu pędu, oraz  $m$  jednostek rzutu momentu pędu. W wyżej określonym sensie /poprzez określenie własności operatora/ wektor  $|0,0,0\rangle$  jest wektorem własnym operatora  $\chi_{nl}^{m+} \chi_{nl}^m$  i jego wartość własna jest równa 1. W tym ograniczonym sensie, można zapisać:

$$\chi_{nl}^{m+} \chi_{nl}^m = 1 \quad (3.17)$$

oraz:

$$\left(\chi_{nl}^m\right)^{-1} = \left(\chi_{nl}^m\right)^+ \quad (3.18)$$

Formalnie operator, który łączy dwa dowolne punkty  $|n', l', m'\rangle$  i  $|n, l, m\rangle$  w diagramie /rys.1/ jest równy:

$$\Gamma_{nl, n'l'}^{mm'} = \chi_{nl}^{m+} \chi_{n'l'}^{m'} \quad (3.19)$$

Ponieważ operatory  $\chi$  oraz  $\chi^+$  nie komutują, nie jest możliwe wyrażenie operatora  $\Gamma$  w prostszej postaci. Aby wyrazić elementy macierzowe dowolnego operatora w postaci "średnich próżniowych" wykorzystujemy następujący związek:

$$\langle n_1, l_1, m_1 | 0 | n_2, l_2, m_2 \rangle = \langle 000 | \chi_{n_1 l_1}^{m_1+} | 0 \chi_{n_2 l_2}^{m_2} | 000 \rangle \quad (3.20)$$

Wyniki tego rozdziału zostaną zastosowane do obliczenia elementów macierzowych przejść dipolowych.

#### C z ę ś ć I V

#### PRZYKŁAD OBLICZANIA ELEMENTÓW MACIERZOWYCH PRZEJŚĆ DIPOLOWYCH

Aby obliczyć prawdopodobieństwo przejść dipolowych dla trójwymiarowego oscylatora harmonicznego musimy znaleźć elementy macierzowe typu:

$$\langle n', l', m' | \hat{x}_i | n, l, m \rangle \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.1)$$



wykorzystując skonstruowany w poprzednim rozdziale operator.

Prawdopodobieństwo przejścia dipolowego na jednostkę czasu wyrazi się wzorem:

$$P_{n'l'm', n, l, m} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n', l', m' | \hat{x}_i | n, l, m \rangle|^2 \quad (4.2)$$

Celem uproszczenia obliczeń wprowadzamy operatory  $\hat{x}_\mu$  zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{+1}^1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + ix_2) \\ \hat{x}_0^1 &= x_3 = z \\ \hat{x}_{-1}^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 - ix_2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Korzystając z twierdzenia Eckarta-Wignera możemy napisać następującą równość:

$$\langle n', l', m' | \hat{x}_\mu^1 | n, l, m \rangle = \frac{\langle l', m' | 1 \mu l m \rangle}{\langle l' 0 | 1 0 l 0 \rangle} \langle n' l' 0 | x_0^1 | n l 0 \rangle \quad (4.4)$$

Korzystając z definicji 3.14 operatora  $\mathcal{X}_{nl}^m$  oraz związku 3.20 otrzymujemy następującą postać szukanego elementu macierzowego:

$$\begin{aligned} \langle n', l', m' | \hat{x}_\mu^1 | n, l, m \rangle &= \frac{\langle l', m' | 1 \mu l m \rangle}{\langle l' 0 | 1 0 l 0 \rangle} \times \\ &\times \langle 0 | K_{n'l'}(\hat{a} \hat{a})^{\frac{n-l'}{2}} Y_l^{-m}(\hat{a}) \hat{x}_0^1 K_{nl}(\hat{a}^+ \hat{a}^+)^{\frac{n-l}{2}} Y_l^m(\hat{a}^+) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (4.5)$$

Stałe  $K_{n'l'}$  oraz  $K_{nl}$  obliczamy z warunku unormowania stanów. Aby porównać wyniki metodą opisaną w rozdziale III z wynikami, które otrzymujemy w mechanice kwantowej wykorzystując postać funkcji falowej otrzymanej w wyniku rozwiązania równania Schrödingera we współrzędnych sferycznych:

$$\Psi_{n, l, m}(r, \theta, \varphi) = C r^l e^{-\frac{1}{2} r^2} F(-n_r, l + \frac{3}{2}, r^2) Y_m^l(\theta, \varphi) \quad (4.6)$$

gdzie: C- stała normalizacyjna

F- konfluentna funkcja hipergeometryczna

oraz  $2n_r + 1 = n$ , obliczamy elementy macierzowe przejść dipolowych. Korzystamy z ogólnego wzoru na element macierzowy [19]:



$$\langle n_r', l' | r^\lambda | n, l \rangle = \left[ \frac{\Gamma(n_r'+1) \Gamma(n_r'+1)}{\Gamma(n_r'+t-\nu+1) \Gamma(n_r'+t-\nu+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \nu! \nu! \times \\ \times \sum_{\sigma} \frac{\Gamma(t+\sigma+1)}{\sigma!(n_r'-\sigma)! (n_r'-\sigma)! (\sigma+\nu-n_r')! (\sigma+\nu-n_r')!} \quad (4.7)$$

gdzie:  $n_r = \frac{1}{2}(n-l)$ ;  $n_r' = \frac{1}{2}(n-l')$ ;  $\nu = \frac{1}{2}(l-l+\lambda)$ ;  $\nu' = \frac{1}{2}(l-l'+\lambda)$

$$t = \frac{1}{2}(l+l'+\lambda+1); \quad n_r \geq \sigma \geq n_r - \nu$$

z regułami wyboru określonymi następująco:  $|n_r' \geq \sigma \geq n_r' - \nu'$

$$l+\lambda \leq l' \leq l-\lambda$$

$$|n+\lambda \leq n' \leq n-\lambda$$

W przypadku szczególnym  $\lambda = 1$ , który występuje w tej pracy wzór przyjmuje postać:

$$\langle n+1, l+1 | r | n, l \rangle = \sqrt{\frac{1}{2}(n+l+3)}; \quad \langle n+1, l-1 | r | n, l \rangle = \sqrt{\frac{1}{2}(n-l+2)} \\ \langle n-1, l+1 | r | n, l \rangle = \sqrt{\frac{1}{2}(n-l)}; \quad \langle n-1, l-1 | r | n, l \rangle = \sqrt{\frac{1}{2}(n+l+1)} \quad (4.8)$$

Aby otrzymać pełne wyrażenie konieczne do obliczenia elementów macierzowych przejść dipolowych, należy również obliczyć elementy macierzowe typu:

$$\langle l', m' | \cos \theta | l, m \rangle = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \langle l', m' | Y_1^0 | l, m \rangle \quad (4.9)$$

Po wykonaniu koniecznych obliczeń otrzymujemy następującą postać wzorów na elementy macierzowe przejść dipolowych

$$\langle n+1, l+1, m | r \cos \theta | n, l, m \rangle = \sqrt{\frac{1}{2}(n+l+3)} \sqrt{\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)}} \\ \langle n-1, l+1, m | r \cos \theta | n, l, m \rangle = \sqrt{\frac{1}{2}(n-l)} \sqrt{\frac{(l-m+1)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+3)}} \quad (4.10)$$

$$\langle n+1, l-1, m | r \cos \theta | n, l, m \rangle = \sqrt{\frac{1}{2}(n-l+2)} \sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l-1)(2l+1)}}$$

$$\langle n-1, l-1, m | r \cos \theta | n, l, m \rangle = \sqrt{\frac{1}{2}(n+l+1)} \sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l-1)(2l+1)}}$$

W tabeli 1 podane zostały obliczenia przejść dipolowych dla oscylatora harmonicznego obiema metodami 3.20, 4.10. Wyniki obu metod są identyczne.

Rodzaj przejścia	Wartość elementu macierzowego
$\langle 2,0,0   \hat{x}_1^0   1,1,0 \rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\langle 2,2,1   \hat{x}_0^1   1,1,1 \rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\langle 1,1,0   \hat{x}_0^1   0,0,0 \rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\langle 3,1,1   \hat{x}_0^1   2,2,1 \rangle$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$
$\langle 3,1,0   \hat{x}_0^1   2,0,0 \rangle$	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}\sqrt{2}}$
$\langle 4,2,1   \hat{x}_0^1   3,1,1 \rangle$	$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}\sqrt{5}}$

Tabela 1  
C z ę ś ć v

Jedną z najnowszych metod, która pozwala badać oraz opisywać układy dynamiczne jest metoda geometrycznego kwantowania [16 , 17]. Wyniki stosowania tej metody do n-wymiarowego oscylatora harmonicznego są takie same jak przy pomocy metod algebraicznych. Ze względu na duże zainteresowanie zastosowaniem metod geometrycznych w fizyce, celowym wydaje się opis tej procedury.

## UWAGI OGOLNE

Przez geometryczne kwantowanie rozumiemy taką procedurę, która pozwala uzyskać opis kwantowy badanego układu dynamicznego, mając za punkt wyjścia klasyczny układ dynamiczny opisywany w przestrzeni fazowej. Inaczej, startując z przestrzeni fazowej klasycznego układu mechanicznego można skonstruować przestrzeń Hilberta, którą stanowi zbiór stanów odpowiadających kwantowo-mechanicznemu opisowi układu. Przestrzeń fazową skończenie wymiarowego klasycznego układu Hamiltonowskiego nazywamy  $C^\infty$  - różniczkowalną  $X$  wraz z zadaną nieosobliwą dwuformą  $\omega$  spełniającą warunek:

$$d\omega = 0 \quad (5.1)$$

Aby móc zastosować metodę geometrycznego kwantowania, musimy wybrać polaryzację  $F$  formy symplektycznej  $\omega$ . Przez polaryzację rozumiemy zespoloną inwolutywną dystrybucję na rozszerzeniu zespolonym przestrzeni fazowej  $X$   $\dim X = 2n$ , która jest maksymalnie izotropowa. Przez zespoloną dystrybucję na przestrzeni fazowej  $X$  rozumiemy odwzorowanie różniczkowalne:

$$F : X \rightarrow F_x$$

które przyporządkowuje każdemu punktowi  $x \in X$  podprzestrzeń  $F_x$  przestrzeni stycznej w punkcie  $x$  po dokonaniu kompleksyfikacji przestrzeni stycznej. Mówimy, że polaryzacja  $F$  jest inwolutywna, jeśli jest zamknięta względem operacji nawiasów Lie'go na polach wektorowych należących do dystrybucji. tzn.

$$\Lambda_{x,y} \in F ; [X, Y] \subset F$$

Polaryzacja  $F$  jest maksymalnie izotropowa, jeśli:

$$\omega[F, F] = 0 \quad (5.2)$$

oraz jej każda podprzestrzeń  $F_x$  ma zespolony wymiar  $n$ ,  $n = \frac{1}{2} \dim x$ . Kwantowanie pozwala otrzymać przestrzeń Hilberta  $H^F$ , którą możemy nazwać  $F$ -reprezentacją funkcji falowej.

Definicja: Klasyczne zmienne  $\varphi \in C^\infty(X)$  nazywamy kwantowalnymi, jeśli pola wektorowe  $\xi_\varphi$  zdefiniowane przez:

$$\omega(\eta, \xi_\varphi) = \eta\varphi \quad (5.3)$$

dla wszystkich pól wektorowych  $\eta$  na  $X$  są zupełne.

Polaryzacja  $F$ , która zawiera pole wektorowe  $\xi_\varphi$  będzie określać przestrzeń  $H^F$ , w której operator  $\varphi$  działa jako operator mnożenia przez funkcję  $\varphi$ . Wtedy przestrzeń Hilberta  $H^F$  określa  $F$ -reprezentację, którą można rozumieć jako uogólnienie reprezentacji położeniowej lub pędowej znanych w mechanice kwantowej. Jeśli chcemy zastosować metodę geometrycznego kwantowania do dowolnego układu dynamicznego, startujemy z klasycznej przestrzeni fazowej, która jest mnogością symplektyczną  $(X, \omega)$  oraz dla której symplektyczna forma  $\omega$  jest dokładna tzn:

$$\omega = d\theta \quad (5.4)$$

Aby wybrać polaryzację  $F$ , oznaczamy przez  $D$  i  $E$  rozwióknienia przestrzeni fazowej  $X$ , które są styczne w każdym punkcie  $x \in X$  do  $T_x^C X$ . Włókna  $D_x$  oraz  $E_x$  definiujemy następująco:

$$\begin{aligned} D_x &= (F_x \cap \bar{F}_x) \cap T_x \\ E_x &= F_x \cup \bar{F}_x \cap T_x \end{aligned} \quad (5.5)$$

gdzie:  $T$ - przestrzeń rzeczywista styczna do mnogości  $X$ .  
Kreska w oznaczeniu  $\bar{F}_x$  oznacza zespolone sprzężenie w kompleksyfikacji  $T_x^C$ .

Zakładamy, że  $D$  ma stały wymiar  $k$ , oraz że  $E$  jest całkowalna /jako dystrybucja/. Niech  $E_x$  oznacza włókno  $E$  przechodzące przez punkt  $x \in X$ . Wtedy  $D$  daje rozwióknienie  $(2n-k)$  wy-

miarowego wżókna  $E_x$  i  $(2n-2k)$  -wymiarowa przestrzeń warstw  $E_x/D$  wprowadza zespoloną strukturę, w której holomorficzne kiejunki są rzutowaniem  $F$  względem odwzorowania  $X \rightarrow X/D$ .  
/patrz dodatek 2/.

W terminach lokalnych, zespolonych, analitycznych współrzędnych  $z_1 \dots z_{n-k}$ , holomorficzna  $(n-k)$  forma na  $E_x/D$  jest wyrażona w postaci:

$$h(z) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{n-k} \quad (5.6)$$

gdzie:  $h(z)$ -holomorficzna funkcja  $z_1 \dots z_{n-k}$ .

Funkcja falowa w  $F$ -reprezentacji będzie miała ogólną postać:

$$T(\nu)^{\frac{1}{2}} (\mu)^{\frac{1}{2}} \quad (5.7)$$

gdzie  $T$  jest rozwiązaniem układu równań różniczkowych, cząstkowych pierwszego rzędu, które można zapisać następująco:

/patrz dodatek 3/:

$$\xi T + 2\pi i \langle \theta, \xi \rangle T = 0 \quad \xi \in F \quad (5.8)$$

zaś  $\nu$  indukuje  $(n-k)$ -formę na każdej zespolonej rozmaitości  $E_x/D$  a  $\mu$  indukuje  $k$ -formę na  $k$ -wymiarowej rozmaitości  $X/E$ .

Wy b ó r p o l a r y z a c j i d l a o s c y l a t o r a h a r m o n i c z n e g o

Przestrzeń fazową oscylatora harmonicznego stanowi zbiór:

$$X := \{(p, q) \in \mathbb{R}^{2n}, p, q \in \mathbb{R}^n (p, q) \neq 0\} \quad (5.9)$$

z zadaną formą symplektyczną postaci:

$$\omega = h^{-1} \sum_{j=1}^n dp_j \wedge dq_j \quad (5.10)$$

gdzie stałą  $h$  wybieramy w ten sposób, by  $\omega$  było bezwymiarowe, jeśli  $p$  i  $q$  mają wymiary pędu i położenia odpowiednio.

Klasyczną funkcją energii jest Hamiltonian wyrażony następująco:

$$H = \frac{1}{2m} P^2 + \frac{1}{2} m \sum_j^2 q_j^2 \quad (5.11)$$

i odpowiednie pole wektorowe generowane przez klasyczne ruchy wyraża się wzorem:

$$\xi_H = h \sum_{j=1}^n \left( \frac{p_j}{m} \frac{\partial}{\partial q_j} - m \dot{q}_j \frac{\partial}{\partial p_j} \right) \quad (5.12)$$

Aby otrzymać reprezentację energii  $H^F$ , musimy wybrać polaryzację  $F$ , która zawiera  $\xi_H$ . Wtedy dla każdego pola wektorowego  $\eta \in F$  zgodnie z definicją 5.2, oraz 5.3 zachodzi:

$$\eta H = \omega(\eta, \xi_H) = 0 \quad (5.13)$$

Polaryzacja  $F$  jest za tym styczna do powierzchni stałej energii. Dla oscylatora harmonicznego powierzchnia stałej energii jest  $(2n-1)$ -wymiarową sferą:

$$p^2 + m \sum_j^2 q_j^2 = 2mE \quad (5.14)$$

którą można zapisać w bardziej odpowiedniej formie:

$$|z|^2 = 2mE \quad (5.15)$$

wprowadzając zespolone współrzędne:

$$z_j = p_j - im \dot{q}_j \quad (5.16)$$

oraz definiując:

$$|z|^2 = \sum_{j=1}^n |z_j|^2 \quad (5.17)$$

Klasyczne ruchy możemy wyrazić następująco:

$$z_j(t) = e^{i\omega t} z_j(0) \quad j=1, \dots, n$$

Możemy odwzorować powierzchnię energii w zespoloną płaszczyznę rzutową  $P^{n-1}(\mathbb{C})$  przez odwzorowanie:

$$\pi: (z_1, \dots, z_n) \longmapsto [z_1, \dots, z_n] \quad (5.18)$$

gdzie  $[z]$  oznacza zbiór wszystkich niezerowych zespolonych skalarnych wielokrotności zmiennych  $z$ . Każda klasyczna orbita, odwzorowuje się w ten sposób w punkt położony na płaszczyźnie  $P^{n-1}(\mathbb{C})$ . Symplektyczna forma  $\omega$  jest niezmiennicza wzdłuż klasycznych orbit i jej ograniczenie do powierzchni stałej energii indukuje symplektyczną formę  $\omega_E$  na  $P^{n-1}(\mathbb{C})$ . W podzbiorze:

$$\{[z] \in P^{n-1}(\mathbb{C}); z_n \neq 0\} \quad (5.19)$$

możemy przyjąć nowe współrzędne:

$$Z_1 = \frac{z_1}{z_n} \quad \dots \quad Z_{n-1} = \frac{z_{n-1}}{z_n} \quad (5.20)$$

W nowych współrzędnych indukowana forma  $\omega_E$  wyrazi się wzorem:

$$\omega_E = -\frac{iE}{2\hbar} \frac{\sum_{j=1}^{n-1} dZ_j \wedge d\bar{Z}_j}{(1 + |Z_1|^2 + \dots + |Z_{n-1}|^2)^2} \quad (5.21)$$

Zespolona dystrybucja  $F$  musi spełniać warunek:

$$[F, F] \subset F$$

co pociąga za sobą spełnienie warunku:

$$[\xi_H, F] \subset F \quad (5.22)$$

Zespoloną dystrybucję  $F$  można rzutować do zespolonej dystrybucji  $F_E$  na  $P^{n-1}(\mathbb{C})$ , która spełnia warunek:

$$\omega_E(F_E, F_E) = 0 \quad (5.23)$$

Polaryzacja  $F_E$  jest polaryzacją  $(2n-2)$  wymiarowej symplektycznej rozmaitości  $P^{n-1}(\mathbb{C})$  z symplektyczną formą  $\omega_E$ .

Z 5.21 wynika, że oczywistym wyborem dla polaryzacji  $F_E$  jest:

$$F_E = \left\langle \frac{\partial}{\partial Z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial Z_{n-1}} \right\rangle \quad (5.24)$$

co odpowiada wykorzystaniu zespolonej struktury  $P^{n-1}(\mathbb{C})$ . Polaryzacja  $F$  generowana jest przez pola wektorowe:

$$\xi = \sum_{j=1}^n \left( z_j \frac{\partial}{\partial z_j} - \bar{z}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right) = \frac{1}{i\hbar} \xi_H \quad (5.25)$$

$$\eta_{jk} = z_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} - \bar{z}_k \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad j \geq 1, k \leq n$$

### K w a n t o w a n i e o s c y l a t o r a

Ustaliliśmy odwzorowania:

$$X \longrightarrow S^{2n-1} \times \mathbb{R}^+; \quad z \longrightarrow \left( \frac{z}{|z|}, |z| \right) \quad (5.26)$$

oraz:

$$\pi: S^{2n-1} \longrightarrow P^{n-1}(\mathbb{C}); \quad z \longrightarrow [z_1, \dots, z_n] \quad (5.27)$$

Odwzorowania te określają rozwióknienie z włóknem  $S^1$  odpowiadającym klasycznej orbicie. Możemy za tym rozpatrywać sferę  $S^{2n-1}$  jako:

$$S^{2n-1} = \bigcup_{j=1}^n \pi^{-1}(U_j); \quad U_j := \{ [z] \in P^{n-1}(\mathbb{C}); z_j \neq 0 \}$$

W każdym podzbiórze  $U_j$  przyjmujemy następujące współrzędne:

$$(Z_{1j}, \dots, \hat{Z}_{jj}, \dots, Z_{nj}) \in \mathbb{C}^{n-1} \quad (5.28)$$

gdzie:  $Z_{1j} = \frac{z_1}{z_j}$  i  $\hat{Z}_{jj}$  oznacza, że  $Z_{jj}$  zostało opuszczone. Uwzględniając tak określone rozwióknienie, podzbiory  $V_j$  zdefiniowane następująco:

$$V_j := \{ z \in X; z_j \neq 0 \} \quad (5.29)$$

tworzą atlas mnogości różniczkowalnej  $X$  ze współrzędnymi postaci:

$$(e^{i\varphi_j}, Z_{1j}, \dots, \hat{Z}_{jj}, \dots, Z_{nj}, r) \in S^1 \times \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \quad (5.30)$$



gdzie:

$$r = |z| ; e^{-i\sqrt{t}z_j} = \frac{z_j}{|z_j|} ; Z_{ij} = \frac{z_j}{z_i}$$

Wybrana polaryzacja  $F$  /określona wzorem 5.25/ jest taką, że klasyczne orbity  $S^1$  są włóknami  $D$ , zaś powierzchnie stałej energii są włóknami  $E$ . Zespoloną rozmaitość rozwłóknioną ze względu na  $D$  można zapisać jako:

$$X/D = X/E \times \frac{E}{D}$$

gdzie  $E/D$  są utożsamiane z określoną płaszczyzną rzutową  $P^{n-1}(\mathbb{C})$  ze zwykłą strukturą zespoloną, oraz  $X/E$  jest utożsamiana z  $R^+$ .

### R e p r e z e n t a c j a f u n k c j i f a l o w e j

Rozważmy funkcje falowe reprezentacji  $F$ . Wiemy, że dwuforma zewnętrzna  $\omega$  ma postać 5.10:

$$\omega = h^{-1} \sum_{j/1}^n dp_j \wedge dq_j$$

Po wprowadzeniu zespolonych współrzędnych  $z_j$  dwuforma  $\omega$  przyjmie postać:

$$\omega = \frac{1}{2m\sqrt{h}i} \sum_{j/1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j = d\Theta \quad (5.32)$$

gdzie:

$$\Theta = \frac{i}{2m\sqrt{h}} \sum_{j/1}^n \bar{z}_j dz_j \quad (5.33)$$

Aby móc rozwiązać równanie 5.8 obliczamy wartość:

$$\langle \Theta, \xi \rangle = \frac{i}{2mh} \left\langle \sum_{j/1}^n \bar{z}_j dz_j ; \sum_{l/1}^n (z_l \frac{\partial}{\partial z_l} - \bar{z}_l \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l}) \right\rangle = \frac{i r^2}{2m\sqrt{h}} \quad (5.34)$$

oraz:

$$\langle \Theta, \eta_{lk} \rangle = \frac{i}{2m\sqrt{h}} \left\langle \sum_{j/1}^n \bar{z}_j dz_j ; (z_l \frac{\partial}{\partial z_k} - z_k \frac{\partial}{\partial z_l}) \right\rangle = 0 \quad (5.35)$$

Równania 5.8 przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \xi T - \frac{r^2}{2m\nu\hbar} T &= 0 \\ \eta T &= 0 \end{aligned} \quad (5.36)$$

Równania 5.36 rozpatrywane w otoczeniu współrzędnościowym  $V_n$  (5.29) ze współrzędnymi  $(t, z_1, z_{n-r}, r)$  gdzie:  $t_n = t$ ,  $z_j = z_{jn}$  przyjmują postać:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -i\nu \frac{r^2}{2m\nu\hbar} T \quad (5.37a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{z}_j} + \frac{z_j}{2|z_j|^2} \frac{r^2}{2m\nu\hbar} T = 0 \quad (5.37b)$$

Formalnie szukamy rozwiązania postaci:

$$T = e^{iM\nu t} u v \quad (5.38)$$

gdzie:  $M$ -stała, którą należy określić

$u, v$  -dystrybucje na  $\mathbb{C}^{n-1}$  oraz  $R^+$  odpowiednio.

Podstawiając 5.38 do równania 5.37a otrzymujemy równanie:

$$\left(M + \frac{r^2}{2m\nu\hbar}\right) v = 0 \quad (5.39)$$

Z równania tego wynika, że  $M$  jest ujemne dla niezerowych rozwiązań, oraz jest proporcjonalne do funkcji Diraca  $\delta(r - \sqrt{-2m\nu\hbar M})$ . Podstawiając 5.38 do równania 5.37b oraz używając równania 5.39 otrzymujemy równanie postaci:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} - \frac{M}{2} \frac{z_j}{|z_j|^2} u = 0 \quad (5.40)$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja postaci [17]:

$$u = f(z) |z|^M \quad (5.41)$$

gdzie:  $f(z)$  jest holomorficzną funkcją  $Z = (z_1 \dots z_{n-1})$ . Łatwo się przekonać, że  $(n-1)$ - forma na mnogości  $X$ , która indukuje holomorficzną formę na każdej zespolonej mnogości

$E/D$  będzie dana w otoczeniu współrzędnościowym  $U_n$  wzorem:

$$\vartheta = h(Z, r) dZ_1 \wedge dZ_2 \wedge \dots \wedge dZ_{n-1} \quad (5.42)$$

gdzie:  $h$ -holomorficzna funkcja w  $Z$  i klasy  $C^\infty$  w  $r$ . Linio-  
wa forma na  $X$ , która indukuje liniową formę na  $X/E$  będzie  
miała postać:

$$\mu = m(r) dr$$

gdzie:  $m(r)$  jest funkcją klasy  $C^\infty$ .

Funkcja falowa w reprezentacji  $F$  ograniczona do otoczenia  
 $U_n$  będzie miała zatem postać:

$$\Psi = e^{i\vartheta M t} f(Z) |Z|^M \delta(r - \sqrt{-2m\vartheta h M}) (dZ_1 \wedge \dots \wedge dZ_{n-1})^{\frac{1}{2}} (dr)^{\frac{1}{2}} \quad (5.43)$$

gdzie:  $M \leq 0$  oraz  $f$  jest funkcją holomorficzną.

Ograniczając się do przypadku  $n > 1$  można wykazać [17], że  
 $\Psi$  rozszerza się do funkcji na całej rozmaitości  $X$  wtedy i  
tylko wtedy, gdy:

$$M = -(N + \frac{n}{2}) \quad (5.44)$$

gdzie:  $N \geq 0$  i całkowite oraz  $f$  jest wielomianem stopnia co  
najwyżej  $N$ .

Funkcja falowa w  $F$ -reprezentacji przyjmuje wtedy postać:

$$\Psi_N = e^{-i\vartheta(N + \frac{n}{2})t} f(Z) |Z|^{-(N + \frac{n}{2})} \delta(r - \sqrt{-2m\vartheta h(N + \frac{n}{2})}) \times \quad (5.45)$$

$$\times (dZ_1 \dots dZ_{n-1})^{\frac{1}{2}} (dr)^{\frac{1}{2}}$$

Aby skwantować funkcję  $\varphi \in C^\infty(X)$  musimy przemnożyć przez  $\frac{1}{2\pi i}$   
infinitezymalny generator działania pola wektorowego  $\xi_\varphi$  na  
funkcję falową. W szczególności dla funkcji  $H$  oraz czasu  $t$  ma-  
my związek:

$$\xi_H = h \frac{\partial}{\partial t}$$

Aby skwantować funkcję  $H$ , należy zgodnie z opisanym wyżej  
sposobem wziąć:

$$-\frac{1}{2\pi i} \hbar \frac{\partial}{\partial t} = i \hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

Otrzymujemy wtedy znane z mechaniki kwantowej równanie Schrödingera. Opisaną ogólnie procedurę kwantowania można zastosować do przypadku, gdy Hamiltonian dany jest wzorem:

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 = \frac{r^2}{2m}$$

oraz dla funkcji falowej danej wzorem 5.45.

Otrzymujemy wtedy:

$$i \hbar \frac{\partial \Psi_N}{\partial t} = \omega \hbar \left(N + \frac{n}{2}\right) \Psi_N \quad (5.46)$$

oraz

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{2m} \Psi_N &= \frac{1}{2m} \left(\sqrt{2m\omega\hbar\left(N + \frac{n}{2}\right)}\right)^2 \Psi_N = \\ &= \omega \hbar \left(N + \frac{n}{2}\right) \Psi_N \end{aligned} \quad (5.47)$$

Z równania 5.46 oraz 5.47 wynika, że  $\Psi_N$  jest stanem własnym operatora  $H$  do energii  $\left(N + \frac{n}{2}\right) \hbar \omega$ .

Liczba liniowo niezależnych stanów własnych jest równa liczbie liniowo niezależnych wielomianów w  $(n-1)$  zmiennych stopnia co najwyżej  $N$ , to znaczy jest równa:

$$\binom{n+N-1}{N} = \frac{n(n+1)\dots(n+N-1)}{N!} \quad (5.48)$$

Jak widzimy otrzymane wyniki są identyczne z wynikami, które zostały otrzymane metodami czysto algebraicznymi z wyjątkiem przypadku  $n=1$ . Wyjaśnienie tego przypadku wymaga wprowadzenia dodatkowej struktury na przestrzeni fazowej  $X$  [18], wiąże się to z niejednoznacznością 2-wymiarowej przestrzeni fazowej  $P^X = \{(P, q) - (0, 0)\}$ , przy czym konieczność wyłączenia punktu  $(0, 0)$  wiąże się z wprowadzoną tu metodą rzutowania na przestrzeń rzutową  $P^{n-1}(\mathbb{C})$ .

Wykorzystanie metod czysto algebraicznych do badania oscylatora harmonicznego polegało na badaniu algebry Lie'go grupy dynamicznej i badanego układu dynamicznego. Elementa-

mi algebry były operatory kreacji i anihilacji będące kombinacjami liniowymi operatorów współrzędnej i pędu. W metodzie geometrycznej, operowaliśmy współrzędnymi zespolonymi, które formalnie można traktować jako odpowiedniki operatorów kreacji i anihilacji. Współrzędne te określone zostały na przestrzeni fazowej oraz wykorzystane zostały do konstrukcji pól wektorowych, na których rozpięta została polaryzacja, polegająca na wyborze przestrzeni wektorowej z której następnie konstruujemy przestrzeń Hilberta. Jak widzimy, istnieje pewien związek między dwoma pozornie różnymi metodami opisu tego samego problemu. Istotna różnica polega na tym, że w metodzie geometrycznej punktem wyjścia jest układ opisywany w przestrzeni fazowej /a więc układ klasyczny/, który następnie zostaje skwantowany.

### P r z y p i s I

Obliczenie operatora Casimira  $B_2$

Wiemy że,  $(a_1)^N |0\rangle = 0$

oraz:  $[a_i^i, (a_i^+)^N] = N(a_i^+)^{N-1}$

$$B_2 = \tilde{A}_j^i \tilde{A}_i^j = (A_j^i - \frac{1}{n} \delta_j^i A_k^k) (A_i^j - \frac{1}{n} \delta_i^j A_l^l) =$$

$$= A_j^i A_i^j - \frac{1}{n} A_k^k A_i^i$$

Wartości własne operatora  $B_2$  obliczamy w następujący sposób:

$$(A_j^i A_i^j - \frac{1}{n} A_k^k A_i^i) (a_1^+)^N |0\rangle = a_j^+ a_i^+ a_i^+ (a_1^+)^N |0\rangle +$$

$$- \frac{1}{n} a_k^+ a^k a_i^+ a_i^+ (a_1^+)^N |0\rangle = N(N-1) (a_1^+)^N |0\rangle +$$

$$+ Nn (a_1^+)^N |0\rangle - \frac{N^2}{n} (a_1^+)^N |0\rangle$$

czyli:

$$B_2 = N(N+n-1) - \frac{N^2}{2} = \frac{n-1}{n} N(N+n)$$

### P r z y p i s II

Aby znaleźć wymiary włókien  $E_x \perp^{Ex} / D_x$  zdefiniowanych następująco:

$$D_x = (F_x \cap \bar{F}_x) \cap T_x; E_x = (F_x \cup \bar{F}_x) \cap T_x; \dim D_x = k$$

wybieramy wektory bazowe przestrzeni  $F_x$

$$[\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n]$$

gdzie:

$$\hat{e}_i = a_i + ib_i$$

Przestrzeń  $\bar{F}_x$  zgodnie z jej określeniem będzie rozpięta przez wektory bazowe postaci  $[\bar{\hat{e}}_1, \dots, \bar{\hat{e}}_n]$

gdzie:

$$\bar{\hat{e}}_i = a_i + ib_i; \quad \hat{e}_i \cap \bar{\hat{e}}_i = a_i$$

Przy takim wyborze wektorów bazowych każdy wektor  $f \in F_x$ , oraz  $g \in \bar{F}_x$  można zapisać następująco:

$$f = z_1 \hat{e}_1 + \dots + z_n \hat{e}_n; \quad z^i \in \mathbb{C}$$

$$g = \xi_1 \bar{\hat{e}}_1 + \dots + \xi_n \bar{\hat{e}}_n; \quad \xi_i \in \mathbb{C}$$

Zgodnie z definicją przestrzeni  $D_x$  jest ona napięta przez wektory  $[a_1, \dots, a_k]$  oraz każdy wektor  $h \in F_x \cap \bar{F}_x$  można zapisać w postaci:

$$h = \eta^1 a_1 + \dots + \eta^k a_k; \quad \eta^i \in \mathbb{C}$$

Natomiast wektor  $k \in (F_x \cap \bar{F}_x) \cap T_x$  ma postać:

$$k = x^1 a_1 + \dots + x^k a_k, \quad x^i \in \mathbb{R}$$

Z powyższego rozumowania wynika, że przestrzenie  $F_x$  oraz  $\bar{F}_x$  mają następujące bazy:

$$F_x = [a_1 \dots a_k, \hat{e}_{k+1} \dots \hat{e}_n]$$

$$\bar{F}_x = [a_1 \dots a_k, \bar{\hat{e}}_{k+1} \dots \bar{\hat{e}}_n]$$

A za tym suma mnogościowa  $F_x \cup \bar{F}_x$  ma bazę postaci:

$$[a_1 \dots a_k, \hat{e}_{k+1} \dots \hat{e}_n, \bar{\hat{e}}_{k+1} \dots \bar{\hat{e}}_n]$$

Wymiar przestrzeni  $F_x \cup \bar{F}_x$  jest równy  $(2n-k)$ , zaś wymiar przestrzeni  $E_x / D_x$  jest równy  $2(n-k)$ .

### P r z y p i e III

Aby wyjaśnić postać 5.7 funkcji falowej w F-reprezentacji należy wprowadzić pojęcie pół-formy, które jest ściśle związane z pojęciem metaliniowych struktur. Wiadomo, że grupa fundamentalna grupy  $GL(n, \mathbb{C})$  jest nieskończenie cykliczna oraz istnieje jednospójne podwójne nakrycie  $\xi$  grupy  $GL(n, \mathbb{C})$

$$\xi : ML(n, \mathbb{C}) \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

Grupa  $ML(n, \mathbb{C})$  jest nazwana grupą metaliniową. Jądro odwzorowania  $\xi$  jest izomorficzne z addytywną grupą liczb całkowitych modulo 2, którą oznaczamy  $Z_2$ .

Odwzorowanie:  $k : Z_2 \rightarrow ML(n, \mathbb{C})$

jest monomorfizmem, dla którego zachodzi następujący związek:

$$k(Z_2) = \ker \xi$$

Niech:  $\mathbb{T} : B^F \rightarrow X$  oznacza wiązkę liniowych baz zespolonych przestrzeni liniowej / tzn.  $\bigwedge_{x \in X} B_x^F$  oznacza zbiór wszystkich baz przestrzeni  $F_x$ . Zdefiniowana wiązkę liniowych baz jest główną wiązką włóknistą z grupą struktury  $GL(n, \mathbb{C})$  /  $n = \dim F$ . Metaliniową wiązkę baz polaryzacji F jest główna wiązkę włóknista  $\bar{\mathbb{T}} : \bar{B}^F \rightarrow X$  z grupą struktury  $ML(n, \mathbb{C})$  oraz odwzorowaniem:  $\mathcal{C} : \bar{B}^F \rightarrow B^F$

takim, że diagram:

$$\begin{array}{ccc} \hat{B}^F \times ML(n, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \tilde{B}^F \\ \tau \times \xi \downarrow & & \downarrow \tau \\ B^F \times GL(n, \mathbb{C}) & \longrightarrow & B^F \end{array}$$

jest przemienny /poziome wiersze oznaczają działanie grupy/. Metaliniowa wiązka baz  $\tilde{B}^F$  jest podwójną nakrywającą wiązki  $B^F$  wraz z odwzorowaniem  $\tau$ .

Definicja: Niech odwzorowanie:  $\chi: ML(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  oznacza jednoznaczny pierwiastek kwadratowy zespolonego charakteru grupy  $ML(n, \mathbb{C})$ .

$$\chi = \sqrt{\text{Det } \xi}$$

Zakładamy, że odwzorowanie to spełnia warunek:  $\chi(1) = 1$

Niech  $\phi$  oznacza działanie metaliniowej grupy  $ML(n, \mathbb{C})$  określone następująco:

$$\phi(\alpha, z) = \overline{\chi(\alpha^{-1})} z, \quad \alpha \in ML(n, \mathbb{C}), z \in \mathbb{C}$$

Niech  $N$  oznacza wiązkę włóknistą stowarzyszoną z wiązką główną  $\tilde{B}^F$  z włóknem standardowym  $\mathbb{C}$  oraz grupą struktury  $ML(n, \mathbb{C})$  działającą na  $\mathbb{C}$  poprzez odwzorowanie  $\phi$ .

Przekroje wiązki stowarzyszonej  $N$  nazywamy pół-formami  $\gamma$  określonymi na polaryzacji  $F$ .

Pół-formę  $\gamma$  określoną na  $F$  można rozpatrywać jako funkcję:

$$\gamma: \tilde{B}^F \rightarrow \mathbb{C}$$

taką, że dla każdego  $b \in \tilde{B}^F$  oraz każdego  $a \in ML(n, \mathbb{C})$  zachodzi:

$$\gamma(b) = \overline{\chi(a)} \gamma(ba)$$



## B I B L I O G R A F I A

1. R u h l H., Comm. Math. Phys. V.27, p.53, 1972.
2. B a r u t A.O., Dynamical Groups and Generalised Symmetries in Quantum Theory /Univ. of Canterbury Publications New Zealand 1971/.
3. A b r a h a m A.L., Foundations of Mechanics /W.A.Benjamin New York 1967/.
4. J a u c h J. and H i l l E., Phys. Rev. V 57 p.641 1940.
5. S u d e r s c h a n, E. M u k u n d a N., Phys.Rev.Lett. V 19,p.332, 1965.
6. B o e r n e r H., Representations of Groups /North Holland 1970/.
7. W e y l H., The Classical Groups /Princeton Univ.Press 1946/.
8. B u d i n i P. , Nuovo Cim. V 41A, p.339, 1966.
9. B a r u t a n d B o h m A.O., Phys. Rev. V.139B p.1107, 1966.
10. B u d i n i P. and F r o n s d a l C., Phys. Rev. Lett. V.14, p.142, 1965.
11. R a c a h G., Group Theory and Spectroscopy /Springer Tracts in Modern Physics V.37/.
12. H w a R.C. and N u y t s J., Phys. Rev. V.145,p.1188, 1966.
13. B i s i a c c i G. and B u d i n i B., Nuovo Cim. V. 44, p.418, 1966.
14. R o s e M.E., Spectroscopic and Group Theoretical Methods in Physics /North Holland 1968/.
15. M e s s i a h A., Quantum Mechanics /North Holland 1961/.
16. K o s t a n t B., Quantisations and unitary representations /Lecture Notes in Math.V.170 Springer 1970/.
17. S i m m s D., Geometric Quantisation of The Harmonic oscillator /Int.Coll. on Groups Theor. Meth. in Phys. Nijmegen 1973/.

18. S i m m s D., Metalinear Structures and Geometric Quantization of The Harmonic Oscillator /Int. Coll. on The Symplectic Geometry Aix-en-Provence 1974/.
19. N i l s o n C., Deformacja Atomnych Jader /Moskwa 1958/.

Maria Lasocka

#### COMPARISON OF THE ALGEBRAIC AND GEOMETRIC METHODS OF QUANTIZATION FOR THE HARMONIC OSCILLATOR

Two descriptions of the energy levels and states of a quantum harmonic oscillator are discussed: the method using its symmetry group  $SU(n)$  and the "geometric quantization" method. The operator creating arbitrary  $n, l, m$  - states of the oscillator is constructed.

Мария Лясоцка

#### СРАВНЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО И ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЕТОДА КВАНТОВАНИЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

В работе обсуждаются методы описания энергетических уровней и состояний квантового гармонического осциллятора, при использовании группы  $SU(n)$  симметрии и метода "геометрического квантования". Разрабатываются формулы для построения оператора рождения для любого состояния " $n, l, m$ " осциллятора.