

## Koncepcja wprowadzenia funkcji rozkładu Maxwella w kursie fizyki ogólnej

Najbardziej popularny i elegancki a zarazem prosty /ale tylko z formalnego punktu widzenia/ sposób wyprowadzenia funkcji rozkładu Maxwella polega na zastosowaniu rachunku wariacyjnego do maksymalizacji prawdopodobieństwa termodynamicznego makrostanu i metody mnożników Lagrange'a do rozwiązania odpowiedniego układu równań /np. E. Gumiński [5], A.K. Wróblewski i J.A. Zakrzewski [9]. Z autopsji i obserwacji wiem, że sposób ten na ogół nie przemawia do wyobraźni studentów zwłaszcza na kursie fizyki ogólnej. Sam w sobie jest dość formalny, zwykle nie poparty rzetelną dydaktyką, wykorzystuje metodę nieoznaczonych czynników Lagrange'a nie przekonywającą dla studentów, którzy zwykle w tym miejscu stykają się z nią po raz pierwszy.

Poniżej przedstawiono takie wyprowadzenie rozkładu Maxwella pędów /energii kinetycznej ruchu postępowego/ dowolnego układu cząstek klasycznych, które powinno być przydatne ze względu na prostsze ujęcie dydaktyczne.

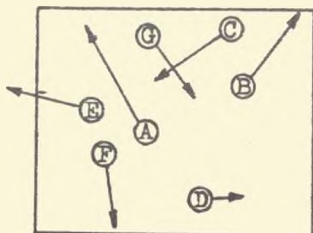
Oprócz tradycyjnego stosowania metody nieoznaczonych czynników Lagrange'a w literaturze można spotkać kilka oryginalnych sposobów wprowadzenia funkcji rozkładu Maxwella, spośród których wymienić należy sposób wykorzystujący pomysł gazu o stałej temperaturze w jednorodnym polu sił po-

dany przez Feynmana [3], a później rozszerzony znacznie przez Grassie [4] oraz sposób Gurney'a [5], który podał zaskakująco prosty merytorycznie pomysł maksymalizacji prawdopodobieństwa termodynamicznego makrostanu. Ta ostatnia metoda została rozszerzona przez Blacka, Davisa i Ogborna [1] i zaproponowana w formie gry dla studentów /"shuffling game"/ wraz ze szczegółowym opracowaniem dydaktycznym /m. in. filmy/. Inny pomysł gry dydaktycznej mającej na celu wprowadzenie pojęcia rozkładu Maxwella /bez wyprowadzenia wzoru na funkcję rozkładu/ można znaleźć w pracy P.M. Clarka, A.J. Waltona i A.J. Millingtona [2].

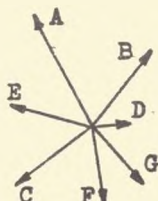
W proponowanej poniżej koncepcji prezentuję najpierw proste układy o małej liczbie cząsteczek w celu wprowadzenia zarówno samego pojęcia rozkładu Maxwella jak i innych pojęć z tym związanych. Proponuję także wyprowadzenie wzoru na funkcję rozkładu, które wymaga jedynie znajomości podstaw kombinatoryki. Szczegółowe rozpatrzenie najpierw prostszego, choć abstrakcyjnego przypadku gazu dwuwymiarowego i późniejsze uogólnienie wyniku na gaz trójwymiarowy wydało mi się korzystne ze względów dydaktycznych. Koncepcja opracowana została w postaci programu liniowego, który tu prezentowany jest w uproszczonej postaci /§1-§20/.

§ 1. Wyobraźmy sobie dwuwymiarowy gaz klasyczny zawarty w płaskim naczyniu /model względnie łatwy do realizacji przy pomocy stołu pneumatycznego/. Nie będzie nas interesował rozkład geometryczny cząsteczek tego gazu w obrębie naczynia. /Zakładam, że student już wie, że najbardziej prawdopodobnym makrostanem, w którym obserwujemy gaz w naczyniu jest rozkład o równomiernej gęstości/. Tu zajmujemy się nie położeniami cząsteczek, ale ich pędami. Każdej cząsteczce naszego gazu można w danej chwili przyporządkować wektor równy jej pędowi /rys.1/. Wektory te można następnie przesunąć równolegle tak, aby miały one wspólny początek /rys.2/. Otrzymuje się w ten sposób płaskiego "jeża", którego

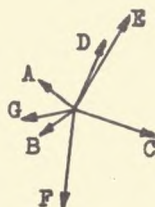
wygląd zmienia się w chwilach zderzeń cząsteczek ze sobą i ze ścianami naczynia tak, że po pewnym czasie nasz "jeź" może wyglądać tak jak na rys.3 lub na rys.4 albo jeszcze inaczej.



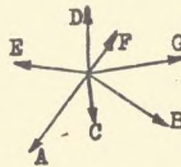
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

§ 2. Aby szybko odpowiedzieć na pytanie, ile cząsteczek posiada w danej chwili energię zawartą w określonym przedziale energii  $(\epsilon, \epsilon + \Delta\epsilon)$  o stałej szerokości  $\Delta\epsilon$  korzystnie jest na naszego "jeź" szereg koncentrycznych okręgów stanowiących "skalę energii" /rys.5/.



Rys.5

Rozważmy dwa sąsiednie okręgi o promieniach  $p$  i  $p + \Delta p$ . Cząsteczki, których koniec wektora pędu znajduje się wewnątrz tak powstałego pierścienia mają energię z przedziału

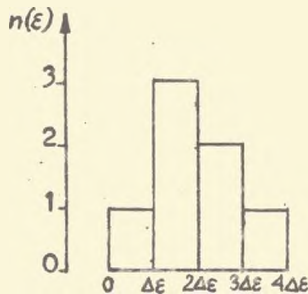
$$\left( \frac{p^2}{2m}, \frac{(p + \Delta p)^2}{2m} \right)$$

gdzie

$$\Delta \varepsilon = \frac{(p + \Delta p)^2}{2m} - \frac{p^2}{2m} \approx \frac{p \Delta p}{m}$$

/  $\Delta p$  małe w porównaniu z  $p$  /.

Ponieważ pola powierzchni  $\Delta S$  pierścieni są proporcjonalne do  $2\pi p \Delta p$ , widać stąd, że szerokości  $\Delta p$  pierścieni na rysunku muszą odpowiednio maleć ze wzrostem  $p$ , jeżeli chcemy żeby pola pierścieni były równe i tym samym szerokości przedziałów energii  $\Delta \varepsilon$  były jednakowe dla wszystkich pierścieni. /ponieważ  $\Delta S \sim \Delta \varepsilon$  /. Rys. 5 został wykonany w ten sposób, że  $\Delta \varepsilon$  jest takie samo dla każdego pierścienia. Ilość wektorów zawartych wewnątrz najmniejszego okręgu jest ilością cząsteczek o energii z przedziału  $(0, \Delta \varepsilon)$ ; ilość wektorów, których końce znajdują się wewnątrz pierwszego pierścienia jest ilością cząsteczek o energii z przedziału  $(\Delta \varepsilon, 2\Delta \varepsilon)$ ; dla następnego pierścienia mamy analogicznie  $(2\Delta \varepsilon, 3\Delta \varepsilon)$  itd. Obliczając teraz ilość końców wektorów zawartych wewnątrz każdego pierścienia można wykreślić histogram przedstawiony na rys.6.



Rys.6

$n(\varepsilon)$  oznacza ilość cząsteczek o energii zawartej w przedziale  $(\varepsilon, \varepsilon + \Delta \varepsilon)$ . Jak na razie odpowiedzieliśmy na pytanie, ile cząsteczek posiada w naszym przypadku energię z określonego przedziału energii w danej chwili.

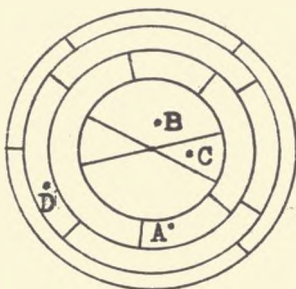
§ 3. Interesuje nas jednak odpowiedź na pytanie, ile s r e d n i o cząsteczek posiada energię zawartą w określonym przedziale energii /oczywiście przy założeniu, że

całkowita energia cząsteczek układu jest stała, a ilość cząsteczek ani wymiary pudła nie zmieniają się/. Co oznacza tutaj słowo "średnio"? Otóż gdybyśmy mogli wykonać bardzo wiele obserwacji takich jak opisana powyżej i dla każdej z nich sporządzić diagram jak na rys.6, a następnie obliczyć średnią wysokość /rzedną/ każdego ze słupków po wszystkich obserwacjach, to histogram sporządzony ze słupków o takiej uśrednionej wysokości dałby właśnie poszukiwany przez nas średni rozkład energii. Oczywiście w praktyce tak postąpić się nie da. Zatem co zrobić?

§ 4. W tym miejscu należy studentom zasugerować /jeżeli sami nie wpadną na ten pomysł/ teoretyczne znalezienie wszystkich możliwych sposobów podziału danej energii całkowitej  $E$  układu między  $N$  cząsteczek tego układu. Zwykle znajdzie się ktoś, kto zwróci uwagę, że takich sposobów jest nieskończenie wiele. Ma on rację, więc aby uczynić zagadnienie możliwym do rozwiązania, przyjmujemy  $\Delta \epsilon$  za jednostkę energii i umawiamy się, że cząsteczkom o energii z przedziału  $(0, \Delta \epsilon)$  przypisujemy energię 0; z  $(\Delta \epsilon, 2\Delta \epsilon)$  - energię jednostkową; z  $(2\Delta \epsilon, 3\Delta \epsilon)$  - energię 2 jednostki itd. Innymi słowy umawiamy się, że energia cząsteczki może przyjmować tylko dyskretne wartości /w naszym przypadku 0, 1, 2 itd./. W tym miejscu powinien nam zwrócić uwagę nasz "niezadowolony", że sposobów podziału energii  $E$  między  $N$  cząsteczek jest nadal nieskończenie wiele, gdyż nieskończenie wiele jest wektorów pędu o tej samej wartości, a tu "kwantując" energie cząsteczek, "kwantowaliśmy" tylko wartości ich pędów. Jak wykażemy później, w przypadku gazu dwuwymiarowego można nie uwzględniać tej reklamacji /por. § 10/. Ale równie dobrze można ją uwzględnić i nawet będzie to korzystne ze względu na dalsze cele dydaktyczne /por. § 20/.

§ 5. Tak czy inaczej chwalimy "niezadowolonego" za wnikliwość i każdy z pierścieni z rys.5 dzielimy na części,

"kwantując" tym samym kierunki wektorów pędu. Na "jeża" wektorów pędu mamy teraz nałożony szereg komórek /rys.7/. Zwróćmy uwagę, że zamiast rysować cały wektor pędu wystarczy zaznaczyć kropką tylko jego koniec. Tak więc różnym układom wektorów pędu cząsteczek i tym samym różnym sposobom podziału energii między cząsteczki odpowiada różny rozkład kropek w obrębie skonstruowanej przez nas siatki<sup>1</sup>. Oczywiście jakiegokolwiek przesunięcie któregoś z punktów w obrębie zajmowanej przez niego komórki nie zmienia rozkładu.



Rys.7

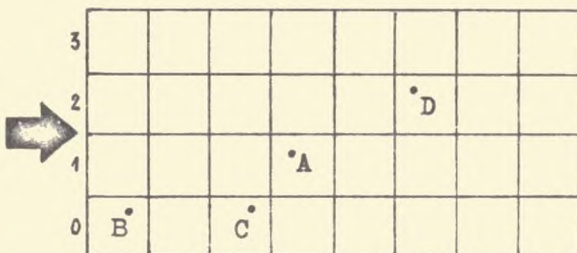
Dla siatki przedstawionej na rys.7 można znaleźć wszystkie możliwe różne rozkłady /dla energii całkowitej układu  $E=3$  jednostki i dla ilości cząsteczek  $N=4$  jest ich tutaj aż 5120<sup>\*</sup> ale czy mamy już prawo wyznaczać średni rozkład energii według zasugerowanego wcześniej sposobu? Otóż nie, gdyż podział pierścieni na komórki został dokonany zupełnie dowolnie; są tam komórki o różnych powierzchniach, a łatwo przewidzieć, że te większe będą zajmowane częściej przez nasze punkty, mniejsze - rzadziej. Co zrobić? Oczywiście podzielić pierścień nie tak, aby wszystkie komórki miały jednakową powierzchnię. W ten sposób wprowadzamy /czy też jak kto woli wykorzystujemy/ postulat równej a priori cenności statystycznej komórek.

<sup>\*</sup>Czytelnik może to sprawdzić w oparciu o kombinatorykę.

§ 6. Tak się szczęśliwie składa, że w przypadku diagramu dla gazu dwuwymiarowego, przy podziale na komórki o równej powierzchni, każdy pierścień będzie zawierał taką samą ilość komórek np.8 /jak na rys.8/. W związku z tym można okrągły diagram /rys.8/ przekształcić na diagram prostokątny /rys.9/, który jest dogodniejszy do dalszych rozważań.



Rys. 8



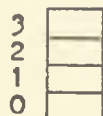
Rys. 9

/Diagram z rys.9 jest niczym innym jak modelem dydaktycznym przestrzeni fazowej  $\mu$  pomniejszonej o składowe przestrzenne dla nas nieistotne./ Punkty - końce wektorów pędu nazywają się punktami fazowymi odpowiednich cząsteczek.

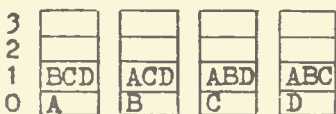
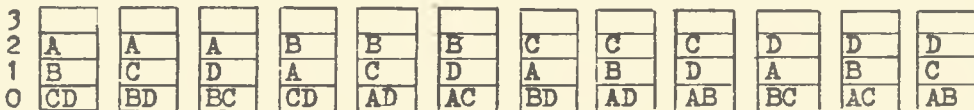
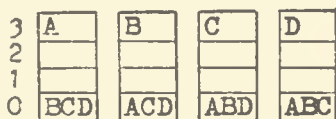
§ 7. Można teraz zdefiniować stan makro i mikro układu w sposób następujący. Stanem makro układu nazywa się każde liczbowo określone rozmieszczenie punktów fazowych pomiędzy komórki przestrzeni fazowej, natomiast stanem mikro każde dokładnie podane rozmieszczenie poszczególnych punktów fazowych w komórkach przestrzeni fazowej. Definicje te należy k o n i e c z n i e zilustrować odpowiednimi przykładami, korzystając z wprowadzonego modelu przestrzeni fazowej.

§ 8. Samo wyprowadzenie matematyczne funkcji rozkładu Maxwella należałoby poprzedzić kilkoma prostymi konkret-

nymi przykładami liczbowymi wyjaśniającymi w sposób pogłębiony ideę tego rozkładu. Oto propozycja takiego przykładu. Dwuwymiarowy gaz klasyczny złożony z  $N=4$  cząsteczek zamkniętych w płaskim pudle ma energię całkowitą  $E=3$  jednostki. Dla uproszczenia przyjmijmy, że powierzchnia komórek przestrzeni fazowej jest równa powierzchni pierścieni, a więc odpowiedni diagram prostokątny wygląda tak jak na rys.10. Później udowodnimy /por. § 10/, że to uproszczenie nie zmienia wyniku obliczeń. W naszym przypadku istnieje 20 różnych sposobów podziału energii  $E=3$  pomiędzy  $N=4$  rozróżnialne cząsteczki oznaczone literami A, B, C, D. Wszystkie te sposoby, czyli wszystkie możliwe mikrostanu przedstawiono na rys.11.



Rys. 10



Rys. 11

Widać, że mikrostanu te można podzielić na 3 grupy w zależności od liczbowego rozmieszczenia poszczególnych punktów fazowych w komórkach przestrzeni  $\mu$ . I tak, do pierwszej grupy zaliczamy mikrostanu o jednym punkcie fazowym na poziomie 3 i trzech na poziomie 0; do drugiej - o jednym na poziomie 2, jednym na poziomie 1 i dwóch na poziomie 0; do trzeciej - o trzech na poziomie 1 i jednym na poziomie 0.



W ten sposób wyróżniliśmy trzy możliwe stany makro naszego układu /tab.1/.

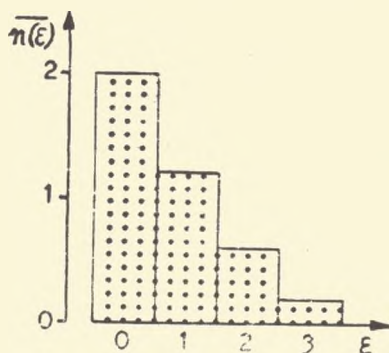
Tabela 1

Stan makro	Liczba stanów mikro realizujących dany stan makro
Liczba punktów fazowych na poziomie o energii $\epsilon$	
0 1 2 3	
3 - - 1	4
2 1 1 -	12
1 3 - -	4
	Razem 20 mikrostan.

§ 9. W oparciu o tabelę 1 łatwo sporządzić tabelę 2, która zawiera już dane bezpośrednio potrzebne do wykreślenia poszukiwanego średniego rozkładu energii /rys.12/.

Tabela 2

Poziom energii	Całkowita liczba punktów fazowych na tym poziomie we wszystkich mikrostanach $n(\epsilon)$	Średnia po mikrostanach liczba punktów fazowych na tym poziomie $\bar{n}(\epsilon) = \frac{n(\epsilon)}{20}$
0	$12 + 24 + 4 = 40$	2,0
1	$0 + 12 + 12 = 24$	1,2
2	$0 + 12 + 0 = 12$	0,6
3	$4 + 0 + 0 = 4$	0,2



Rys. 12

§ 10. Rozkład ten sporządziliśmy przy założeniu, że każdy z pierścieni jest oddzielną komórką przestrzeni  $\mu$ . Przypuśćmy teraz, że sporządzamy analogiczny rozkład, gdy każdy z pierścieni podzielony jest na  $k$  równych komórek; wówczas dla każdego mikrostanu z rys.11 otrzymujemy  $\epsilon k^4$  nowych mikrostanów /bo mamy 4 cząsteczki, z których każdą można na  $k$  sposobów umieścić na tym samym poziomie/. A więc całkowita liczba mikrostanów wynosiłaby wówczas  $20.k^4$ . Ze sposobu w jaki wyliczaliśmy całkowitą liczbę punktów fazowych na danym poziomie energii we wszystkich mikrostanach wynika, że wzrosłaby ona również  $k^4$ -krotnie, wynosząc teraz dla danego poziomu  $n(\epsilon).k^4$ . Zatem średnia po mikrostanach liczba punktów fazowych na danym poziomie energii

$$\frac{n(\epsilon).k^4}{20.k^4} = \frac{n(\epsilon)}{20}$$

nie zmieni się, a więc kształt rozkładu z rys.12 pozostanie dokładnie taki sam. W związku z tym w przypadku gazu dwuwymiarowego nie ma potrzeby dzielić pierścieni na komórki "kwantujące" kierunek wektorów pędu.

§ 11. Można natomiast dalej dzielić pierścienie współśrodkowymi okręgami /oczywiście tak, aby powstałe nowe pierścienie miały równe pola powierzchni/ otrzymując coraz więcej węższych pasm energii i tym samym coraz dokładniejszy kształt średniego rozkładu energii. Tym sposobem można przy pomocy np. maszyny matematycznej<sup>x</sup> otrzymać dowolną ilość słupków wyznaczających tak dokładnie jak tylko sobie życzymy kształt funkcji rozkładu Maxwella. Ale nie jest to jesz-

---

<sup>x</sup> Autor opracował odpowiedni program na maszynę cyfrową.

cze żadne wyprowadzenie matematyczne, a tylko pogłędowe wprowadzenie pojęcia.

§ 12. Zostańmy jednak na razie przy zaproponowanym powyżej podziale na cztery pasma energii /0,1,2,3/ i zbadajmy, jak zmienia się ilość mikrostanów przy zwiększaniu ilości cząsteczek /oczywiście przy zachowaniu warunku, że energia całkowita układu  $E=3$  jednostki jest stała/. Niech  $N \gg 3$  będzie ilością cząsteczek w układzie. Mamy wówczas nadal trzy stany makro, takie jak podano w tabeli 3.

Tabela 3

Stan makro				Liczba stanów mikro realizujących dany stan makro
Liczba punktów fazowych na poziomie o energii $\xi$				
0	1	2	3	
(N-1)	-	-	1	N
(N-2)	1	1	-	$N \cdot (N-1)$
(N-3)	3	-	-	$\frac{1}{6} N \cdot (N-1) \cdot (N-2)$

Liczby stanów mikro realizujących dany stan makro wyliczono ze wzoru /1/ z § 13. Widać, że przy dużych  $N$  liczby te będą się bardzo różnić. Na przykład przy  $N=10^{23}$  ilość mikrostanów realizujących ostatni w tabeli stan makro będzie o kilkadziesiąt rzędów wielkości większa niż dla pozostałych makrostanów. Zatem przy dostatecznie dużej ilości cząsteczek będzie istniał praktycznie jeden stan makro zawierający "przytłaczającą" większość mikrostanów, w związku z czym będzie można przybliżyć /a praktycznie zastąpić/ średni rozkład energii przez rozkład energii w tym najbardziej prawdopodobnym stanie makro. Ponieważ rozumowanie takie można przeprowadzić przy dowolnej energii całkowitej  $E$  układu i przy podziale na dowolną ilość  $f$  pasm energii, więc nasze dalsze poszukiwania ograniczą się do rozważenia najbardziej prawdopodobnego makrostanu.

**§ 13.** Oprzemy się teraz na pomysły Gurney'a [6], który w swoim podręczniku "Introduction to Statistical Mechanics" podał pewne interesujące rozumowanie /str.13-16/. Otóż niech  $W$  oznacza prawdopodobieństwo termodynamiczne /ilość wszystkich stanów mikro/ dla pewnego makrostanu. Wówczas:

$$W = \frac{N!}{n_0! n_1! n_2! \dots n_1! \dots n_f!} \quad (1)$$

gdzie  $N$  - ilość wszystkich cząsteczek,  $n_i$  - ilość cząsteczek w tym makro stanie na  $i$ -tym spośród  $f+1$  poziomów energii.

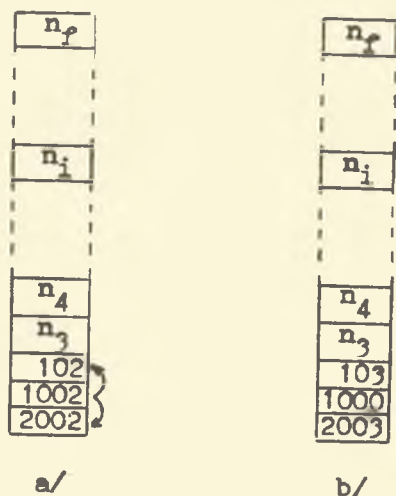
Oczywiście 
$$\sum_{i=0}^f n_i = N$$

Zbadajmy, czy i jak zmienia się  $W$ , jeżeli dokonamy niewielkiego przemieszczenia punktów fazowych /np. tylko dwóch/ na poziomach energii. Jeżeli weźmiemy pod uwagę dwa punkty fazowe na jakimś poziomie energii i jeden z nich przesuniemy na poziom wyższy, a drugi na poziom niższy, to /przy podziale na poziomy energii o równej szerokości, jaki założyliśmy poprzednio/ całkowita energia układu nie zmieni się. Otrzymamy nowy makro stan mało różniący się od poprzedniego. Oznaczmy prawdopodobieństwo termodynamiczne tego nowego makrostanu przez  $W^*$ .

**§ 14.** Rozpatrzmy konkretny przykład liczbowy\* makrostanu, w którym na poziomie 0 energii 0 znajdują się 2 002 punkty fazowe, na poziomie 1 - 1 002 punkty fazowe, na poziomie 2 - 102 punkty fazowe. Na razie nie interesują nas wartości liczb  $n_3, n_4$  itd. - ilości punktów fazowych na wyższych poziomach. Prawdopodobieństwo termodynamiczne tego makrostanu wynosi

$$W = \frac{N!}{2002! 1002! 102! n_3! n_4! \dots n_f!}$$

\*Przykład liczbowy zaczerpnięty z książki R.W.Gurney'a [6].



Rys. 13

Jeżeli teraz z poziomu 1 przesuniemy jeden punkt fazowy na poziom 2 i jedno na poziom 0 /rys.13 a/, to otrzymamy nowy makrostan /rys.13 b/ o prawdopodobieństwie termodynamicznym

$$W^* = \frac{N!}{2003! \cdot 1000! \cdot 103! \cdot n_3! \cdot n_4! \cdot \dots \cdot n_f!}$$

Stosunek  $W^*$  do  $W$  wynosi:

$$\frac{W^*}{W} = \frac{2002! \cdot 1002! \cdot 102!}{2003! \cdot 1000! \cdot 103!} = \frac{1002 \cdot 1001}{2003 \cdot 103} = \frac{1003001}{206309}$$

Widzimy, że dokonując tak niewielkiego przestawienia punktów fazowych zwiększyliśmy prawie pięciokrotnie prawdopodobieństwo termodynamiczne makrostanu. Wnioskujemy stąd, że zaproponowany powyżej rozkład liczbowy punktów fazowych na trzech najniższych poziomach energii jest daleki od optymalnego /najbardziej prawdopodobnego/. Widzimy również, że aby otrzymać makrostan o większym  $W$  musimy przenieść część cząsteczek z poziomu 1 na poziomy 0 i 2.

§ 15. Można wykonać szereg innych "doświadczeń liczbowych", które ilustrują nasze rozumowanie. Przypuśćmy, że z poziomu 1 przenieśliśmy 140 punktów fazowych na poziom 2 i 140 na poziom 0 otrzymując makrostan, w którym  $n_0=2142$ ,  $n_1=722$ ,  $n_2=242$ . Zbadajmy, jak w tym przypadku zmieni się  $W$ , gdy w sposób analogiczny jak poprzednio dokonamy niewielkiego przestawienia punktów fazowych otrzymując nowe wartości  $n_0^*=2143$ ,  $n_1^*=720$ ,  $n_2^*=243$ . W tym przypadku stosunek  $W^*$  do  $W$  daje

$$\frac{W^*}{W} = \frac{2142! \cdot 722! \cdot 242!}{2143! \cdot 720! \cdot 243!} = \frac{722 \cdot 721}{2143 \cdot 243} = \frac{520562}{520749}$$

a zatem jest on prawie równy jedności, z czego wnioskujemy, że ostatni podany rozkład jest bliski najbardziej prawdopodobnemu. Czytelnik może sprawdzić, że w tym przypadku jest to rozkład o największym  $W$ . Widać, że jeżeli dla pewnego makrostanu

$$\frac{W^*}{W} = 1, \quad (2)$$

to jest to makrostan o największym prawdopodobieństwie termodynamicznym.

§ 16. W oparciu o ten warunek zajmiemy się poszukiwaniem najbardziej prawdopodobnego rozkładu energii w przypadku ogólnym. Wiemy już, że prawdopodobieństwo termodynamiczne stanu makro wynosi

$$W = \frac{N!}{n_0! \dots n_{i-1}! n_i! n_{i+1}! \dots n_f!}$$

Jeżeli teraz z poziomu  $i$ -tego jeden punkt fazowy przenieśliśmy na poziom  $i-1$  oraz jeden na poziom  $i+1$ , to otrzymamy nowy makrostan o prawdopodobieństwie

$$W^* = \frac{N!}{n_0! \dots (n_{i-1}+1)! (n_i-1)! (n_{i+1}+1)! \dots n_f!}$$

Stosunek  $W^*$  do  $W$  wynosi:

$$\frac{W^*}{W} = \frac{n_{i-1}! n_i! n_{i+1}!}{(n_{i-1}+1)! (n_i-2)! (n_{i+1}+1)!} = \frac{n_i (n_i-1)}{(n_{i-1}+1) (n_{i+1}+1)}$$

W praktyce mamy do czynienia z ilością cząsteczek rzędu  $10^{23}$ , w związku z czym wartości  $n_{i-1}$ ,  $n_i$ ,  $n_{i+1}$  są olbrzymie, więc ostatni wynik można przybliżyć przez

$$\frac{W^*}{W} = \frac{n_i^2}{n_{i-1} \cdot n_{i+1}}$$

W myśl warunku (2) otrzymujemy, że

$$\frac{n_i^2}{n_{i-1} \cdot n_{i+1}} = 1 \quad \text{czyli} \quad \frac{n_{i-1}}{n_i} = \frac{n_i}{n_{i+1}} \quad (3)$$

lub inaczej

$$\frac{n_0}{n_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{n_2}{n_3} = \frac{n_3}{n_4} : \dots \quad (4)$$

§ 17. Z (3) lub (4) widać, że  $n_i$  tworzą postęp geometryczny. Oznaczmy iloraz tego postępu przez  $e^{-\beta}$ , gdzie  $e$  jest podstawą logarytmu naturalnego, a  $\beta$  pewną stałą. Wówczas można napisać, że

$$n_i = n_0 (e^{-\beta})^i$$

Ponieważ ciąg  $n_i$  musi maleć, więc  $e^{-\beta} < 1$ , czyli  $\beta > 0$ . Zwróćmy uwagę, że ze względu na przyjętą przez nas jednostkę energii możemy zastąpić  $i$  przez  $\varepsilon_i$  /liczbę jednostek energii, która jest tożsama z  $i$ /. Wówczas stała  $\beta$  ma wymiar odwrotności energii. Otrzymujemy więc

$$n_i = n_0 \cdot e^{-\beta \varepsilon_i}$$

co stanowi poszukiwany przez nas najbardziej prawdopodobny rozkład energii cząsteczek dwuwymiarowego gazu doskonałego.

### § 18. Rozważmy teraz trójwymiarowy gaz klasyczny.

Podobnie jak w przypadku gazu dwuwymiarowego przyporządkujemy każdej cząsteczce wektor jej pędu w danej chwili. Po przesunięciu równoległym tych wektorów tak, aby miały one wspólny początek - otrzymujemy trójwymiarowego "jeża" wektorów pędu. Postępując analogicznie jak w przypadku gazu dwuwymiarowego nakładamy na naszego przestrzennego "jeża" szereg koncentrycznych sfer stanowiących "skalę energii". Podobnie jak poprzednio odległości między sąsiednimi sferami maleją /ze wzrostem  $p$ / tak, że szerokości odpowiednich przedziałów energii  $\Delta \varepsilon$  są stałe.  $\Delta \varepsilon$  obieramy za jednostkę energii. Przy pomocy prostego rachunku przekonujemy się, że objętości obszarów między sferami nie są sobie równe /w przypadku gazu dwuwymiarowego powierzchnie pierścieni były równe/, w związku z czym w tym przypadku nie możemy stosować postulatu równej a priori cenności statystycznej komórek w odniesieniu do obszarów między sferami.

§ 19. Aby móc stosować ten postulat, musimy obszary między sferami podzielić na komórki o równej objętości  $V_0$ . Objętość obszaru między sąsiadującymi sferami o promieniach  $p$  i  $p + \Delta p$  wynosi:

$$\Delta V = \frac{4}{3} \pi (p + \Delta p)^3 - \frac{4}{3} \pi p^3 \approx 4 \pi p^2 \Delta p$$

Ponieważ

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m}, \quad \Delta \varepsilon = \frac{p \Delta p}{m}$$

czyli

$$p = \sqrt{2m\varepsilon}, \quad p \Delta p = m \Delta \varepsilon$$

więc

$$\Delta V = 4 \pi \sqrt{2m\varepsilon} m \Delta \varepsilon$$

Dzieląc teraz  $V$  przez  $V_0$  otrzymujemy liczbę  $g(\varepsilon, V_0)$  komórek o objętości  $V_0$  w obszarze między sferami odpowiadającymi energiom  $\varepsilon$  i  $\varepsilon + \Delta \varepsilon$ .



$$g(\varepsilon, v_0) = \frac{1}{V_0} \sqrt{32} \pi m^{3/2} \sqrt{\varepsilon} \Delta\varepsilon$$

lub inaczej

$$g_i = \text{const.} \sqrt{\varepsilon_i}$$

gdzie  $g_i$  oznacza ilość komórek o stałej objętości na  $i$ -tym poziomie energii. Liczba  $g_i$  nazywa się "krotnością zwyrodnienia" danego poziomu energii lub jego wagę statystyczną.

§ 20. W tak skonstruowanej przestrzeni fazowej dla gazu trójwymiarowego można już stosować postulat równej a priori cenności statystycznej komórek. Widać zatem, że prawdopodobieństwo znalezienia się punktu fazowego danej cząsteczki na  $i$ -tym poziomie energii będzie  $g_i$  razy większe niż w przypadku gazu dwuwymiarowego, w związku z czym we wszystkich możliwych mikrostanach, punkty fazowe cząsteczek wystąpią na danym poziomie  $\varepsilon_i$  -  $g_i$  razy częściej niż w przypadku gazu dwuwymiarowego. Tak więc dla gazu trójwymiarowego rozkład Maxwella będzie miał postać:

$$n_i = g_i \cdot e^{-\beta \varepsilon_i}$$

lub

$$n_i = \text{const.} \cdot \sqrt{\varepsilon_i} \cdot e^{-\beta \varepsilon_i}$$

Charakterystyczne maksimum, jakie posiada ta ostatnia funkcja jest wynikiem wprowadzenia trzeciego wymiaru w naszych rozważaniach.

Powyższa koncepcja powinna być użyteczna w dydaktyce fizyki w szkole wyższej. Sądzę, że nie trywializując treści merytorycznych udało mi się uczynić bardziej przystępnym na poziomie kursu fizyki ogólnej nie tylko pojęcie rozkładu Maxwella, ale także inne pojęcia z fizyki statystycznej oraz wyprowadzenie matematyczne funkcji rozkładu /zwykle realizowane w trudny merytorycznie abstrakcyjny sposób/.

## BIBLIOGRAFIA

1. Black P.J., Davies P., Ogborn J.,  
Am. J. Phys. 39, 1154 /1971/.
2. Clark P.M., Walton A.J., Millington  
A.J., Phys. Ed. 9 234 /1974/.
3. Feynman R.P., Leighton R.B., Sands  
M., Feynmana wykłady z fizyki, t. I, cz.2, Warszawa  
1974.
4. Grassie A.D.C., Contemp. Phys. 7, 81 /1965/.
5. Gumiński K., Elementy chemii teoretycznej,  
Warszawa 1964.
6. Gurney R.W., Introduction to Statistical Mecha-  
nics, London 1949.
7. Reif F., Fizyka statystyczna, Warszawa 1971.
8. Spice J.E., Contemp. Phys. 7, 89 /1965/.
9. Wróblewski A.K., Zakrzewski J.A.,  
Wstęp do fizyki, t.I, Warszawa 1976.

Jerzy Ogar

### THE CONCEPTION OF INITIATION MAXWELL DISTRIBUTION FUNCTION IN A GENERAL PHYSICS COURSE

In the conventional teaching of the Maxwell distribution law to the beginners, the calculus of variation and Lagrange's method of undetermined multipliers are used. As a result the beginner must frequently employ mathematics beyond his present knowledge. In this paper the approach is suggested in which only the theory of combinations is used.

The method is based on counting the number of distinguishable ways into which a group of localized particles can share out a given amount of energy. Then a simple inductive statistical argument /following R.W. Gurney/ is given and Maxwell distribution function is deduced. The approach presented here introduces the student not only to Maxwell distribution but to the other basic conceptions of statistical physics as well. The method ought to be helpful for students and useful in teaching physics.

Ежи Огар

#### КОНЦЕПЦИЯ ВВЕДЕНИЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В КУРСЕ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

В типичном изложении закона Максвелла-Больцмана для начинающих студентов, преподаватели очень часто пользуются вариационным исчислением и методом неопределённых множителей Лагранжа. Начинающий весьма часто должен применять несвоенные им в школьной практике математические методы. В этой статье предложен такой дидактический подход, в котором нужны только основные знания по комбинаторике. Представлено также простое индуктивно-статистическое доказательство (по Р.В.Гурнею) и выведение функции распределения Максвелла. В предложенной концепции введена не только функция Максвелла, но тоже другие основные понятия по статистической физике. Представленный мною метод должен пригодиться студентам и быть полезным в преподавании физики.