WOJCIECH SIEGEL

Niejednorodne transformacje symplektyczne w mechanice klasycznej i kwantowej

WSTĘP

Celem pracy jest przedyskutowanie w formalizmie Wignera-Moyala związku pomiędzy szczególną klasą transformacji unitarnych mechaniki kwantowej - transformacji o kwadratowym generatorze - a niejednorodnymi transformacjami symplektycznymi mechaniki klasycznej. Analiza tego szczególnego przypadku transformacji stanowi wstępny etap badania sytuacji ogólnej. Związek pomiędzy ogólnymi transformacjami unitarnymi i klasycznymi przekształceniami kanonicznymi nie jest dotąd dokładnie zbadany, postuluje się tylko relacje w przybliżeniu kwaziklasycznym - por. obszerną dyskusję w podręczniku [1].

Kwantowy formalizm fazowy Wignera-Moyala dzięki podobieństwu do formalizmu klasycznej mechaniki statystycznej pozwala porównywać wielkości występujące w obu teoriach i badać "granicę klasyczną" teorii kwantowej.

REPREZENTACJA FAZOWA MECHANIKI KWANTOWEJ

Reprezentacja mechaniki kwantowej funkcjami określonymi na przestrzeni fazowej klasycznych stanów układu została podana przez Wignera [2] w 1932 r. Dalszy rozwój formalizmu zawdzięczamy głównie pracom Groenewolda [3] i Moyala [4,5]. Przedstawimy tu tylko podstawowe jego założenia, aby wprowadzić używane dalej oznaczenia. Bardziej pełny wykład można znaleźć w [4,6] w literaturze polskiej w pozycji [7].

Rozważamy układ cząsteczek bezspinowych o n stopniach swobody, opisywany kartezjańskimi zmiennymi kanonicznymi $q_1, q_2, \dots q_n, p_1, \dots p_n$. /Dla zmiennych krzywoliniowych reprezentacja Wignera nie jest określona, można przy jej pomocy opisywać spin, czym nie będziemy się zajmowali/. Oznaczamy dla $i = 1 \dots n$ $q_i = x_i$, $p_i = x_{n+i}$ i ustawiamy 2n współrzędnych w przestrzeni fazowej w jednokolumnową macierz $\underline{x}$. Dalej podkreślenie litery oznacza macierz $2n \times 1$.

W mechanice kwantowej zmienne q, p zamieniamy na operatory samosprzężone $\hat{q}$, $\hat{p}$ - daszki oznaczają operatory liniowe w przestrzeni Hilberta stanów układu. Litera I oznaczać będzie macierz jednostkową odpowiedniego wymiaru, $\hat{I}$ - operator jednostkowy. Wprowadzamy macierz $2n \times 2n$ - macierz formy symplektycznej

$$g = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -I & 0 \end{array}\right], \quad g^T = -g, \quad g^2 = -I$$

T oznacza transpozycję. Element miary w przestrzeni fazowej ma postać

$$d\Gamma(\underline{x}) = h^{-n} d^{2n}x$$

Definiujemy operatorową funkcję $\hat{\Delta}$ na przestrzeni fazowej:

$$\hat{\Delta}(\underline{x}) = \int \exp\left[\frac{i}{\hbar}\underline{y}^T g(\hat{\underline{x}} - \underline{x})\right] d\Gamma(\underline{y})$$

Podstawowe własności operatora $\hat{\Delta}$:

1) $\left(\hat{\Delta}(\underline{x})\right)^+ = \hat{\Delta}(\underline{x})$

2) $\mathrm{Tr}\left[\hat{\Delta}(\underline{x})\right] = 1$

3) $\int \hat{\Delta}(\underline{x})\, d\Gamma(\underline{x}) = \hat{I}$

4) $\hat{\Delta}(\vec{q}, \vec{p}) =$

$$= \int \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\vec{u}\,\vec{p}\right] |\vec{q} - \tfrac{1}{2}\vec{u}\rangle\langle\vec{q} + \tfrac{1}{2}\vec{u}|\, d^n u$$

5) $\mathrm{Tr}\left[\hat{\Delta}(\underline{x})\hat{\Delta}(\underline{y})\right] = h^n\, \delta^{(2n)}(\underline{x} - \underline{y})$

6) $\mathrm{Tr}\left[\hat{\Delta}(\underline{x})\,\hat{\Delta}(\underline{y})\,\hat{\Delta}(\underline{z})\,\hat{\Delta}(\underline{w})\right] =$

$$= (4h)^n\, \delta^{(2n)}(\underline{x} + \underline{z} - \underline{y} - \underline{w}) \exp\left[\frac{2i}{\hbar}(\underline{x}^T g \underline{y} + \underline{z}^T g \underline{w})\right]$$

Wzór 4), wyrażający $\hat{\Delta}$ w bazie położeniowej, prowadzi do oryginalnej definicji Wignera reprezentant fazowych stanów układu poprzez funkcje falowe. $\delta^{(2n)}$ jest dystrybucją delta Diraca w 2n - wymiarowej przestrzeni fazowej.

Operator $\hat{\Delta}$ pozwala określić odwzorowanie $\mathcal{W}$ przyporządkowywujące jedno-jednoznacznie operatorom na przestrzeni Hilberta stanów układu funkcji na przestrzeni fazowej:

$$\mathcal{W}: \hat{A} \to \mathcal{A}(\underline{x})$$

$$\mathcal{A}(\underline{x}) = \mathcal{W}[\hat{A}](\underline{x}) = \mathrm{Tr}\left[\hat{A}\,\hat{\Delta}(\underline{x})\right] \tag{1a}$$

$$\hat{A} = \mathcal{W}^{-1}[\mathcal{A}] = \int \mathcal{A}(\underline{x})\hat{\Delta}(\underline{x})\,d\Gamma(\underline{x}) \tag{1b}$$

Z własności operatora $\hat{\Delta}$ wynikają związki:

$$a)\quad \mathcal{W}[\hat{A}^{+}] = \overline{\mathcal{W}[\hat{A}]}$$

$$b)\quad \mathrm{Tr}[\hat{A}\hat{B}] = \int \mathcal{W}[\hat{A}](\underline{x})\,\mathcal{W}[\hat{B}](\underline{x})\,d\Gamma(\underline{x})$$

Przyjmując za operator $\hat{A}$ operator gęstości $\hat{\varrho}$ opisujący stan układu otrzymujemy rzeczywistą, na ogół niedodatnią "funkcję rozkładu". Wstawiając w b) za $\hat{B}$ dowolną obserwablę widzimy, że średnia kwantowa jest dana przez reprezentanty fazowe wzorem identycznym z definicją średniej w klasycznej mechanice statystycznej. Przyjmując $\hat{B} = \hat{I}$ otrzymujemy normalizację "funkcji rozkładu".

Ponieważ algebra operatorów nie jest izomorficzna z algebrą funkcji ze zwyczajnym mnożeniem:

$$\mathcal{W}[\hat{A}\hat{B}] \neq \mathcal{W}[\hat{A}]\,\mathcal{W}[\hat{B}]$$

Można podać wzór wyrażający reprezentantę iloczynu operatorów w postaci całki zawierającej reprezentanty czynników. Jeżeli jeden z czynników jest wielomianem w $\hat{q}$ i $\hat{p}$ bardziej użyteczny jest wzór Groenewolda

$$\mathcal{W}[\hat{A}\hat{B}](\underline{x}) = \mathcal{W}[\hat{A}](\underline{x})\exp\left[\frac{i\hbar}{2}\overleftrightarrow{\Lambda}\right]\mathcal{W}[\hat{B}](\underline{x}) \qquad (2)$$

gdzie $\overleftrightarrow{\Lambda}$ jest wyrażeniem zawierającym operatory różniczkowania działające na funkcje stojące po lewej i prawej stronie:

$$f(\underline{x})\overleftrightarrow{\Lambda}k(\underline{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}\right)^T g\left(\frac{\partial k}{\partial \underline{x}}\right) = \{f, k\} \quad \text{nawias Poissona}$$

Reprezentantę iloczynu obliczamy rozwijając eksponentę w szereg i różniczkując "w prawo" i "w lewo" odpowiednią liczbę razy.

TRANSFORMACJE UNITARNE

Podstawową symetrią standardowego formalizmu operatorowego mechaniki kwantowej jest transformacja zadąna unitarnym operatorem $\hat{U}$: $\hat{U}\hat{U}^+ = \hat{U}^+\hat{U} = \hat{I}$ przyporządkowująca wektorowi ψ wektor $\hat{U}\psi$, a operatorowi $\hat{A}$ operator $\hat{U}\hat{A}\hat{U}^+$. Transformacja taka nie zmienia struktury matematycznej teorii - iloczynów skalarnych, elementów macierzowych, śladów, zachowuje związki komutacyjne. Podobną rolę odgrywają w mechanice klasycznej transformacje kanoniczne.

W formalizmie fazowym transformacja unitarna zadaje odwzorowanie funkcji $\mathcal{W}[\hat{A}] \longrightarrow \mathcal{W}[\hat{U}\hat{A}\hat{U}^{+}]$.

Korzystając z (1b) można je zapisać w postaci transformacji całkowej z jądrem określonym przez $\hat{U}$:

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}[\hat{U}\hat{A}\hat{U}^{+}](\underline{x}) = \int \mathcal{F}_U(\underline{x}|\underline{y})\mathcal{W}[\hat{A}](\underline{y})d\Gamma(\underline{y}) \\ &\mathcal{F}_U(\underline{x}|\underline{y}) = \mathrm{Tr}[\hat{\Delta}(\underline{x})\hat{U}\hat{\Delta}(\underline{y})\hat{U}^{+}] \end{aligned} \tag{3}$$

Jądro można wyrazić przez reprezentantę $\hat{U}$:

$$\mathcal{U}(\underline{x}) := \mathcal{W}[\hat{U}](\underline{x})$$

Przy pomocy własności 4) operatora $\hat{\Delta}$ można przedstawić $\mathcal{U}(\underline{x})$ w postaci transformaty Fouriera elementu macierzowego $\hat{U}$ w reprezentacji położeniowej. Odwracając ten związek otrzymamy

$$\langle\vec{q}_1|\hat{U}|\vec{q}_2\rangle = h^{-n}\int \exp[\tfrac{i}{\hbar}(\vec{q}_1-\vec{q}_2)\vec{p}]\,\mathcal{U}(\tfrac{1}{2}(\vec{q}_1+\vec{q}_2),\vec{p})d^n\vec{p} \tag{4}$$

Z (3) i własności 6) operatora $\hat{\Delta}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_U(\underline{x}|\underline{y}) = 4^n\int &\mathcal{U}(\underline{z})\bar{\mathcal{U}}(\underline{x}+\underline{y}-\underline{z}) \times \\ &\times \exp[\tfrac{2i}{\hbar}((\underline{x}-\underline{y})^T g\,\underline{z}+\underline{y}^T g\,\underline{x})]d\Gamma(\underline{z}) \end{aligned} \tag{5}$$

Powyższy wynik można odwrócić, obliczając odwrotną transformatę Fouriera w zmiennej $\underline{x}-\underline{y}$ i zmieniając zmienne:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\underline{x})\bar{\mathcal{U}}(\underline{y}) = 4^n\int &\exp[\tfrac{2i}{\hbar}(\underline{x}-\underline{y})^T g\,\underline{z}] \times \\ &\times \mathcal{F}_U(\tfrac{1}{2}(\underline{x}+\underline{y})+\underline{z}\,|\,\tfrac{1}{2}(\underline{x}+\underline{y})-\underline{z})d\Gamma(\underline{z}) \end{aligned} \tag{6}$$

SZCZEGÓLNA KLASA TRANSFORMACJI UNITARNYCH

Celem niniejszej pracy jest przedyskutowanie szczególnego przypadku ogólnej transformacji unitarnej - gdy $\hat{U}$ jest eksponentą wielomianu co najwyżej drugiego stopnia w operatorach położenia i pędu. Wynikające stąd przekształcenia samych operatorów $\hat{q}$, $\hat{p}$ są liniowe. Transformacje takie odgrywają podstawową rolę w mechanice kwantowej - obroty, translacje, dylatacje, ruch oscylatora harmonicznego itp. Stanowią one jednak przypadek prosty i poniekąd "trywialny" - operatory $\hat{q}$, $\hat{p}$ transformują się dokładnie tak jak zmienne klasyczne, równania typu równania Heisenberga opisujące jednoparametrowe grupy transformacji są liniowe. Jest to jednak jedyna klasa transformacji unitarnych, dla której można się spodziewac wyników ogólnych i dokładnych. Dla rzeczywistej symetrycznej macierzy 2n x 2n M i rzeczywistej macierzy 2n x 1 $\underline{N}$ określam samosprzeżony operator

$$\hat{B} = \frac{1}{2}\,\hat{\underline{x}}^{T} M \hat{\underline{x}} + \underline{N}^{T} \hat{\underline{x}}$$

Łatwo przekonać się, że $\mathcal{W}[\hat{B}] = \frac{1}{2}\,\underline{x}^{T} M \underline{x} + \underline{N}^{T} \underline{x}$

Dla rzeczywistego parametru λ rozpatrujemy operator unitarny

$$\hat{U} = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\lambda \hat{B}\right]$$

Badać będziemy realizowaną przy jego pomocy transformację unitarną. W wyniku rachunków pojawią się funkcje analityczne zmiennej macierzowej $\lambda g M$, określone przez rozwinięcie w szereg potęgowy zbieżny w otoczeniu zera. Aby szereg macierzy był zbieżny i można było korzystać ze słusznych w przypadku zmiennej liczbowej związków pomiędzy tymi funkcjami, ograniczamy parametr λ do odpowiedniego otoczenia $\lambda=0$ Otrzymane wyniki możemy potem przedłużać analitycznie w poza obszar zbieżności szeregów.

Dla badanej jednoparametrowej grupy korzystamy z oczywistych równań:

$$[\hat{B},\hat{U}]=0 \quad , \quad -i\hbar\frac{\partial}{\partial\lambda}\hat{U}=\hat{B}\hat{U}$$

W drugim równaniu możemy zamienić iloczyn operatorów na połowę antykomutatora. Znajdujemy reprezentanty obu równań korzystając z reguły Groenewolda (2). Komutator daje sinus, a antykomutator cosinus $\frac{\hbar}{2}\overleftrightarrow{\Lambda}$, z ich rozwinięcia w szereg pozostają tylko wyrazy zawierające co najwyżej drugie pochodne. Otrzymujemy $(\underline{x}^T M+\underline{N}^T)g\frac{\partial}{\partial \underline{x}}U(\underline{x},\lambda)=0$

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial\lambda}U(\underline{x},\lambda)=$$

$$=\left[\frac{1}{2}\underline{x}^T M\underline{x}+\underline{N}^T\underline{x}+\frac{\hbar^2}{8}\left(\frac{\partial}{\partial\underline{x}}\right)^T gMg\left(\frac{\partial}{\partial\underline{x}}\right)\right]U(\underline{x},\lambda)$$

Warunek początkowy dla $\lambda=0$ daje $U(\underline{x},0)=1$

Struktura powyższych równań podpowiada możliwości poszukiwania U w postaci eksponenty od wielomianu drugiego stopnia. Podstawiamy

$$U(\underline{x},\lambda)=\exp\left[\frac{1}{2}\underline{x}^T Y(\lambda)\underline{x}+\underline{z}^T(\lambda)\underline{x}+T(\lambda)\right] \qquad (7)$$

gdzie Y jest macierzą $2n\times 2n$, $\underline{z}$ kolumną $2n\times 1$ a T funkcją liczbową. Otrzymujemy układ równań różniczkowych

$$\frac{dY}{d\lambda}=\frac{i}{\hbar}M+\frac{i\hbar}{4}YgMgY \qquad (8)$$

$$\frac{d\underline{z}}{d\lambda}=\frac{i}{\hbar}\underline{N}+\frac{i\hbar}{4}YgMg\underline{N} \qquad (9)$$

$$\frac{dT}{d\lambda} = \frac{i\hbar}{8} Tr[g M g Y] + \frac{i\hbar}{8} \underline{z}^T g M g \underline{z} \qquad (10)$$

oraz układ warunków algebraicznych

$$(M g Y)^T = - M g Y \qquad (11)$$

$$M g \underline{z} = Y g \underline{N} \qquad (12)$$

$$\underline{N}^T g \underline{z} = 0 \qquad (13)$$

Warunek początkowy daje : $Y(0) = 0$, $\underline{z}(0) = \underline{0}$, $T(0) = 0$

Równanie (8) rozwiązujemy podstawiając rozwinięcie Y w szereg potęgowy w parametrze λ . Relacja rekurencyjna dla macierzowych współczynników rozwinięcia daje

$$Y(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k M (g M)^{2k} \lambda^{2k+1} \qquad (14)$$

Relacja rekurencyjna dla liczbowych współczynników a_k, nie zależy od postaci macierzy M i od liczby stopni swobody n. Wyznaczamy je więc rozwiązując równanie (8) dla prostego przypadku M = I. Otrzymujemy

$$Y(\lambda) = -\frac{2i}{\hbar} g \, tgh\left(\frac{\lambda}{2} g M\right) \qquad (15)$$

Korzystając z rozwinięcia (14) możemy sprawdzić warunek (11). Warunek (12) sugeruje następującą postać funkcji $\underline{z}$:

$$\underline{z}(\lambda) = \frac{i}{\hbar} \lambda D\left(\frac{\lambda}{2} M g\right) \underline{N} ; \qquad D(x) = \frac{tgh(x)}{x} \qquad (16)$$

Korzystając ze związków pomiędzy funkcjami hiperbolicznymi /które są spełnione jako związki pomiędzy szeregami potęgowymi/ sprawdzamy, że spełnione jest równanie (9).

Całkując równanie (10) otrzymujemy:

$$T(\lambda) = -\frac{1}{2} \ln \det\left[\cosh\left(\frac{\lambda}{2} g M\right)\right] -$$
$$- \frac{i}{8\hbar} \underline{N}^T g \int_0^{\lambda} \vartheta^2 M g \left[D\left(\frac{\vartheta}{2} M g\right)\right]^2 d\vartheta \underline{N} \qquad (17)$$

Pierwszy składnik we wzorze (17), otrzymany przez zamianę śladu logarytmu na logarytm wyznacznika, zadaje moduł funkcji $\mathcal{U}$. Drugi składnik daje niezależny od $\underline{x}$, a więc nieistotny czynnik fazowy.

Wstawiając (7) z (15), (16), (17) do wzoru (5) obliczamy jądro transformacji całkowej $\mathcal{F}_U$. Korzystamy z twierdzenia o zamianie zmiennych w wielowymiarowej dystrybucji delta Diraca i ze związku $\mathrm{Tr}[gM] = 0$ otrzymując:

$$\mathcal{F}_U(\underline{x}|\underline{y}) = h^n \delta^{(2n)}(\underline{y} - \underline{x}'(\underline{x}))$$
$$\underline{x}'(\underline{x}) = \exp[\lambda g M]\underline{x} + \lambda F(\lambda g M) g \underline{N}, \quad F(x) = \frac{e^x - 1}{x} \qquad (18)$$

Transformacja unitarna zadana przez nasze $\hat{U}$ przekształca reprezentanty fazowe operatorów przez <u>podstawienie</u>, przy niezmienionym przepisie funkcyjnym, zamiast starych zmiennych $\underline{x}$ przetransformowanych zmiennych $\underline{x}'$: $\underline{x}' = \mathcal{W}[\hat{U}\hat{\underline{x}}\hat{U}^+]$. Zmiana zmiennych jest oczywiście liniowa.

P r z y k ł a d

Dla jednowymiarowego oscylatora harmonicznego operator ewolucji ma postać

$$\hat{U} = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right], \quad \hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{q}^2$$

Mamy więc

$$n=1\,,\quad \lambda=-t\,,\qquad M=\begin{bmatrix} m\omega^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}\,,\qquad \underline{N}=\underline{0}$$

Ponieważ $(gM)^2=(i\omega)^2 I$ mamy

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{\lambda}{2}gM\right)=-\frac{gM}{\omega}\operatorname{tg}\left(\frac{\omega t}{2}\right)\,,\quad \cosh\left(\frac{\lambda}{2}gM\right)=\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)I$$

$$\exp[\lambda gM]=\cos\omega t\, I-\sin\omega t\,\frac{gM}{\omega}$$

$$U(q,p,t)=\frac{1}{\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)}\exp\left[\frac{2i}{\hbar}\operatorname{tg}\left(\frac{\omega t}{2}\right)\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}q^2\right)\right]$$

Transformacja (18) daje zwykłą zależność zmiennych q , p od czasu. Z wzoru (4) otrzymujemy standardową funkcję Greena oscylatora harmonicznego.

TRANSFORMACJE SYMPLEKTYCZNE

Łatwo sprawdzić, że odwzorowanie $\underline{x}\rightarrow\underline{x}'$ jest liniową niejednorodną transformacją kanoniczną w sensie mechaniki klasycznej. Część jednorodna tej transformacji jest dana elementem grupy symplektycznej Sp/n,R/ - grupy rzeczywistych macierzy 2n x 2n spełniających warunek $A^T g A = g$ (19)

Równość (19) pociąga det A = 1.

Każda macierz postaci $\exp[gM]$, gdzie M jest rzeczywistą symetryczną macierzą 2n x 2n, należy do Sp/n,R/.

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, jest jednak słuszne dla macierzy symplektycznych z otoczenia macierzy jednostkowej w którym zbieżne jest rozwinięcie logarytmu naturalnego w szereg potęgowy.

W otoczeniu tym macierz $M = -g \ln A$ jest rzeczywista i symetryczna.

Dowód:

$$M^T = \ln(-g A^{-1} g) g = g \ln A^{-1} = M$$

Szereg geometryczny definiujący A^{-1} ma obszar zbieżności nie mniejszy niż szereg określający logarytm.

TWIERDZENIE ODWROTNE:
TRANSFORMACJA REALIZOWANA PRZEZ ZMIANĘ ZMIENNYCH

Transformacje unitarne rozważanej powyżej postaci prowadzą do przekształcenia reprezentant fazowych przez podstawienie nowych zmiennych za stare, bez zmiany postaci funkcji. Sprawdzamy, czy są jeszcze inne transformacje o tej własności, tzn. takie, dla których

$$\mathcal{F}_U(\underline{x}|\underline{y}) = h^n \delta^{(2n)}(\underline{y} - S(\underline{x})) \tag{20}$$

gdzie S jest jednoznacznym odwzorowaniem R^{2n} w R^{2n}, klasy C^2 /na przykład/. Wprowadzamy odwzorowanie G:

$$G(\underline{x}) = \underline{x} + S(\underline{x})$$

i zakładamy dodatkowo, że jakobian G jest wszędzie różny od 0: $\det G'(\underline{x}) \neq 0$, przez G' oznaczyliśmy macierz Jacobiego G. Podstawiamy (20) do wzoru (6). Zmieniając zmienną całkowania i korzystając z twierdzenia o zmianie argumentu dystrybucji delta otrzymujemy równanie 4^n.

$$U(\underline{x})\bar{U}(\underline{y}) = 4^n \left[\det\left(I + S'(G^{-1}(\underline{x}+\underline{y}))\right)\right]^{-1} \times$$
$$\times \exp\left[\frac{2i}{\hbar}\left((\underline{x}-\underline{y})^T g\, G^{-1}(\underline{x}+\underline{y}) - \underline{x}^T g\, \underline{y}\right)\right]$$

Możemy je przepisać jako dwa równania: na moduły i argumenty obu stron. Podstawiając $\underline{x} = \underline{y}$ i $\underline{y} = \underline{0}$ otrzymamy moduł i argument funkcji U wyrażony przez S. Podstawiając jeszcze raz do równań otrzymamy dwa równania funkcyjne na nieznane S. Równanie wynikające z porównania argumentów ma postać:

$$\underline{x}^T g\, G^{-1}(\underline{x}) - \underline{y}^T g\, G^{-1}(\underline{y}) = (\underline{x}-\underline{y})^T g\, G^{-1}(\underline{x}+\underline{y}) + \underline{y}^T g\, \underline{x} \qquad (21)$$

Różniczkując dwukrotnie po współrzędnych $\underline{x}$ i $\underline{y}$ możemy sprawdzić, że drugie pochodne odwzorowania G^{-1} są równe zeru. Zatem G^{-1}, G i S są odwzorowaniami liniowymi:

$$S(\underline{x}) = A\underline{x} + \underline{f} \quad , \quad \det(I+A) \neq 0$$

A jest rzeczywistą macierzą 2n x 2n, $\underline{f}$ rzeczywistą macierzą 2n x 1. Równanie wynikające z równości modułów jest spełnione tożsamościowo, a równanie (21) sprowadza się do warunku (19) symplektyczności macierzy A. Ostatecznie:

$$U(\underline{x}) = 2^n \left[\det(I+A)\right]^{-\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \exp\left[\frac{2i}{\hbar}\left(\underline{x}^T g (I+A)^{-1}\underline{x} - \underline{x}^T g (I+A)^{-1}\underline{f} + \text{stała}\right)\right]$$

Ponieważ macierze A z otoczenia elementu jednostkowego Sp/n,R/ mają postać $\exp[\lambda g M]$, dla wszystkich takich macierzy funkcja $U(\underline{x})$ jest dana wzorami (7), (15), (16), (17). Oznacza to wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy otoczeniem transformacji tożsamościowej w grupie niejednorodnych transformacji symplektycznych a transformacjami unitarnymi dyskutowanej uprzednio postaci, z odpowiednio małym λ - wynik oczywisty.

Otrzymane powyżej wnioski powinny pozostać słuszne, jeśli zbiór punktów dla których odwzorowanie G nie jest odwracalne jest dostatecznie "porządny". Wówczas poza tym zbiorem S będzie liniowe, a w punktach tego zbioru funkcja U będzie osobliwa. Bez silnego ograniczenia klasy dozwolonych odwzorowań S trudno się spodziewać konkretnych wyników. Najważniejszy przypadek - dalekie od tożsamościowej transformacje symplektyczne będą przedmiotem dalszej analizy. Przytoczymy tylko najprostszy przykład "złego" odwzorowania:

$$S(\underline{x}) = -\underline{x}$$

Przechodząc do granicy $\lambda \to \pi$ we wzorach (7), (15), (17) dla M = I, $\underline{N} = \underline{0}$ lub bezpośrednio ze wzoru (6) otrzymujemy

$$U(\underline{x}) = \left(\frac{h}{2}\right)^n \delta^{(2n)}(\underline{x})$$

Odwzorowaniu temu odpowiada przez (1b) $\hat{U} = 2^{-n} \hat{\Delta}(\underline{0})$

czyli operator odbicia w początku układu współrzędnych [8].

BIBLIOGRAFIA

1. F o k W.A., Naczała kwantowoj mechaniki, Nauka, Moskwa 1976.
2. W i g n e r E., Phys. Rev. 40, 749 /1932/.
3. G r o e n e w o l d M.J., Physica 12, 405 /1946/.
4. M o y a l J.E., Proc. Cambridge Philos. Soc. 45, /1949/, 99.
5. B a r t l e t t M.S., M o y a l J.E. Proc.Cambridge Philos. Soc. [illegible], 545 /194[illegible]/.

6. H u g u e n i n P., Naturforsch Z., 28a , 1090 /1973/.

7. S ł a w i a n o w s k i J., Geometria przestrzeni fazowych, PWN, Warszawa 1975.

8. G r o s s m a n n A., Commun. Math. Phys. 48, 191 /1976/.

Wojciech Siegel

NONHOMOGENEOUS SYMPLECTIC TRANSFORMATIONS IN CLASSICAL AND QUANTUM MECHANICS

The connection between quantum-mechanical unitary transformations and canonical transformations of classical mechanics is discussed in the special case of nonhomogeneous symplectic transformations. The discussion is based on the Wigner-Moyal phase - space formulation of quantum mechanics. Explicit form of the Wigner transform of corresponding unitary operator is found and it is proved that only this class of unitary transformations maps the Wigner functions by a change of variables.

Войцех Зигель

НЕОДНОРОДНЫЕ СИММЕТРИЧЕСКИЕ РПЕОБРАЗОВАНИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Рассматривается связь между унитарными преобразованиями квантовой механики и классическими каноническими преобразованиями, в частном случае неоднородной симплектической группы.

Используется фазовый формализм Вигнера - Мояля. Вычисляется Вигнеровское представление унитарной экспоненты квадратичного генератора и доказывается, что это единственное преобразование, меняющее фазовые функции путём замены переменных.