KAZIMIERZ DANKIEWICZ, ZENON MOSZNER

Prolongements des homomorphismes et des solutions de l'équation de translation

L'objet de cette note est la liaison entre les conditions pour le prolongement des homomorphismes donnés dans [1] et les conditions pour le prolongement des solutions de l'équation de translations formulées dans [2]. Il s'agit de prolongement des homomorphismes et des solutions de (1) d'un groupe G à un sur-groupe $\bar{G}$.

Si nous avons une solution $F(\alpha, x): \Gamma \times G \to \Gamma$, où Γ est un ensemble arbitraire, de l'équation de translation

(1) $$F(F(\alpha, x), y) = F(\alpha, xy)$$

nous pouvons considérer $h(x) := F(\cdot, x)$ comme un homomorphisme de G dans la famille des fonctions Γ^Γ, avec la superposition comme opération. Il semblerait donc que le problème du prolongement de cette solution F à la solution de (1) sur $\Gamma \times \bar{G}$ c'est le cas particulier du prolongement d'homomorphisme h. En effet cette situation a lieu si nous ne changeons pas de l'ensemble des valeurs (le contre-domaine) d'homomorphisme h. Dans le cas contraire il peut se passer que le contre-domaine d'un homomorphisme $\bar{h}$ prolongé de h a aussi les éléments qui n'appartiennent pas à Γ^{Γ}, donc le prolongement $\bar{h}$ ne peut pas être considéré comme une solution de (1).

Dans [1] il y a les théorèmes suivants au sujet de prolongement d'un homomorphisme. Soit K un ensemble et "." un opération dans cet ensemble: ".": $K \times K \to K$.

THÉORÈME 1. L'homomorphisme h du groupe G dans K peut être prolongé à l'homomorphisme $\bar{h}$ du groupe $\bar{G}$ dans K tel que $\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} \bar{h}$, si et seulement s'il existe un sous-groupe invariant $\bar{G}_1$ du groupe $\bar{G}$ tel que

(2) $\ker h = G \cap \bar{G}_1$,

(3) $\bar{G} = \bar{G}_1 \cdot G$.

THÉORÈME 2. Soit h un homomorphisme du groupe G sur le groupe H. Il existe un sur-groupe $\bar{H}$ du groupe H tel qu'il existe l'homomorphisme $\bar{h}$ du groupe $\bar{G}$ dans $\bar{H}$, étant le prolongement de h, si et seulement s'il existe un sous-groupe invariant $\bar{G}_1$ du groupe $\bar{G}$ tel que (2) a lieu.

THÉORÈME 3. Si G est un sous-groupe du groupe $\bar{G}$, tel que les conditions suivantes ont lieu

(4) $$\bigwedge_{a,b \in \bar{G} \setminus G} a.b \in G,$$

(5) $$\bigvee_{e' \in \bar{G} \setminus G} \ \bigwedge_{a \in G} (a \cdot e' = e' \cdot a \wedge e' \cdot e' = e),$$

où e est un élément neutre du groupe G, dans ce cas chaque homomorphisme h du groupe G dans H peut être prolongé à l'homomorphisme $\bar{h}$ du groupe $\bar{G}$ dans H.

Dans [2] on donne une condition au sujet du prolongement de la solution de (1).

THÉORÈME 4. Soit F une solution de (1) sur $\Gamma \times G$, transitive, c'est-à-dire telle que

$$\bigwedge_{\alpha,\beta\in\Gamma}\ \bigvee_{x\in G} F(\alpha,x) = \beta$$

et soit G_1 un sous-groupe de G de la stabilité de cette solution F, c'est-à-dire

$$G_1 = \{x \in G\colon F(\alpha,x) = \alpha\}$$

pour un α de $F(\Gamma,G)$ (G_1 est nommé le groupe de la stabilité de l'élément α). On peut prolonger F à $\tilde{F}$, où $\tilde{F}$ est une solution de (1) sur $\Gamma\times\bar{G}$, si et seulement s'il existe un sous-groupe $\tilde{G}_1$ du groupe $\bar{G}$ tel que

(6) $\bar{G} = \tilde{G}_1 \cdot G$,

(7) $G_1 = \tilde{G}_1 \cap G$.

1. Le théorème 3 est une corollaire du théorème 1 (dans [1] le théorème 3 est démontré indépendemment du théorème 1).

Posons dans ce but que

$$\bar{G}_1 = \ker h \cdot \{e,e'\}$$

et démontrons que $\bar{G}_1$ remplit (2) et (3).

Il en résulte d'après (4) et (5) que $\bar{G}_1$ est un groupe.

Démontrons que

(8) $$\bigwedge_{x\in\bar{G}}\ \bigwedge_{\bar{g}\in\bar{G}_1}\ \bigvee_{g_1\in\bar{G}_1} x\,\bar{g} = g_1 x.$$

Soit $\bar{g} \in \bar{G}_1$, alors $\bar{g} = k$ ou $\bar{g} = k\,e'$, où $k \in \ker h$. On peut trouver pour x de G, d'après l'invariabilité du sous-groupe ker h dans G, un élément k_1 de ker h pour lequel $x\,k = k_1 x$. Posons

$$(9) \quad g_1 = \begin{cases} k_1 & \text{si } \bar{g} = k, \\ k_1 e' & \text{si } \bar{g} = k\,e'. \end{cases}$$

Nous voyons d'après (5) que (8) est rempli.

Dans le cas si $x \in \bar{G} \setminus G$ d'après $x\,e' \in G$ nous trouverons un k_1 de $\ker h$ tel que $(x\,e')\,k = k_1(x\,e')$. En posant g_1 comme dans (9) nous voyons que (8) est aussi rempli dans ce cas.

La condition (8) démontre que pour $x \in \bar{G}$

$$x\,\bar{G}_1 \subset \bar{G}_1\,x.$$

L'inclusion dans l'autre côté a la démonstration analogue, donc $\bar{G}_1$ est un sous-groupe invariant de $\bar{G}$.

Il est évident que $\ker h \subset G \cap \bar{G}_1$. Soit $g \in G \cap \bar{G}_1$. Donc $g \in G$ et $g \in \bar{G}_1$ d'où nous concluons que g doit avoir la forme $k\,e$, où $k \in \ker h$, c'est-à-dire $g = k \in \ker h$, ce qui démontre (2).

Si $x \in G$, alors sûrement $x \in \bar{G}_1 \cdot G$. Si $x \in \bar{G} \setminus G$ alors $x = e'(e'x)$, c'est-à-dire x appartient aussi à $\bar{G}_1 \cdot G$ et comme l'inclusion $\bar{G}_1 \cdot G \subset \bar{G}$ a lieu, alors le groupe $\bar{G}_1$ remplit (3), ce qui finit la démonstration.

2. Le théorème 3 suggère la généralisation suivante

THÉORÈME 5. Soit h un homomorphisme de G à H.

S'il existe dans le groupe $\bar{G}$ un sous-groupe invariant $\bar{G}_1$ tel que

$$\ker h = G \cap \bar{G}_1$$

et s'il existe un sélecteur S de l'ensemble $\bar{G}|_{G\cdot\bar{G}_1}$ des classes d'équivalence à droit du groupe $\bar{G}$ par rapport au sous-groupe $G\cdot\bar{G}_1$ tel que $\bar{G} = (G\cdot\bar{G}_1)\cdot S$ ("$\cdot$" désigne le produit simple), alors

1) on peut prolonger l'homomorphisme h du groupe G dans un groupe H à l'homomorphisme $\bar{h}$ du groupe $\bar{G}$,

2) $\bar{h}$ est un prolongement de h sur $\bar{G}$, tel que $\bar{G}_1 \subset \ker \bar{h}$ si et seulement si $\bar{h}$ est de la forme

$$\bar{h}(x) = h(u)\cdot h^{*}(a) \quad \text{pour} \quad x = uva,$$

où $u \in G$, $v \in \bar{G}_1$, $a \in S$ et $h^{*}: S \to H$ est un homomorphisme tel que $h^{*}(S)$ commute avec $\operatorname{Im} h$.

Il résulte de ce théorème l'implication "si" du théorème 1 et le théorème 3 car dans le premier cas le rôle du sélecteur S est joué par l'ensemble $\{e\}$ et dans l'autre cas ce rôle est joué par l'ensemble $\{e,e'\}$, où e est un élément neutre du groupe $\bar{G}$ et e' est un élément déterminé par la condition (5).

On peut aussi démontrer la partie 1) du théorème 5 d'après le théorème 1. Pour démontrer cela remarquons tout d'abord que le lemme suivant est vrai:

LEMME. S est un sélecteur de l'ensemble $\bar{G}|K$ des classes d'équivalence à droit du groupe $\bar{G}$ par rapport à un sous-groupe K tel que $\bar{G} = K \circ S$ si et seulement si

1) S est fermé par rapport à l'opération dans $\bar{G}$,

2) S commute avec K,

3) $e \in S$, où e est l'élément neutre de G.

D é m o n s t r a t i o n. Supposons que le sélecteur S remplit les conditions 1), 2) et 3).

a) Démontrons que S est un groupe. Dans ce but il suffit de démontrer que pour un a de S, a^{-1} appartient aussi à S.

Soit $a \in S$ et $b \in S \cap K a^{-1}$. Soit $g \in K$ cet élément pour lequel $b = g \cdot a^{-1}$. Alors $ba = g$. Il en résulte de 1) et 3) que $ba = e$ donc $g = e$, c'est-à-dire $a^{-1} = b \in S$.

b) Soit $x \in \bar{G}$. Alors x appartient à une classe W de la famille $G|K$. Soit $S \cap W = \{a\}$. Comme $W = K a$, il existe alors un élément g de K tel que $x = ga$.

c) Il en résulte d'après 2) que pour chaque g de K et s de S on a $gs = sg$.

d) Soit $g_1, g_2 \in K$, $s_1, s_2 \in S$ et $g_1 s_1 = g_2 s_2$. Alors les classes $K s_1$ et $K s_2$ sont égales, c'est-à-dire $s_1 = s_2$, donc aussi $g_1 = g_2$.

Il en résulte des a), b), c) et d) que $\bar{G} = K \circ S$.

Supposons maintenant que $\bar{G} = K \circ S$ et examinons une classe $K x$ de la famille $\bar{G}|K$. Puisque $x = ks$, où $k \in K$ et $s \in S$, alors le produit $k^{-1}x$ appartient à la classe $K x$ et à S.

Soit x un élément du groupe $\bar{G}$. Supposons qu'il existent a,b de $\bar{G}$ tels que

$$\{a,b\} \subset K\,x \cap S.$$

Comme a,b appartiennent à $K\,x$, alors ils existent g_1, g_2 de K, tels que $a = g_1 x$ et $b = g_2 x$. Il en résulte que

$$x = g_1^{-1} a \quad \text{et} \quad x = g_2^{-1} b$$

et d'après l'une des propriétés du produit simple nous obtenons que $a = b$.

Nous avons donc démontré que S est un sélecteur de $\bar{G}|K$. Evidemment d'après $\bar{G} = K \circ S$ ce sélecteur possède les propriétés 1), 2) et 3). La démonstration du lemme est donc terminée.

Passons à la démonstration de la partie 1) du théorème 5 d'après le théorème 1. Soit $\bar{G} = (G \cdot \bar{G}_1) \circ S$. Mettons $\bar{G}_2 = \bar{G}_1 \cdot S$. $\bar{G}_2$ c'est un groupe car $\bar{G}_1$ est invariant. Vérifions que $\bar{G}$, G et $\bar{G}_2$ remplissent les suppositions du théorème 1. On voit que la condition (3) est remplie puisque $\bar{G} = (G \cdot \bar{G}_1) \circ S$. Nous démontrerons que la condition (2) est aussi remplie.

Puisque $e \in S$, alors $G \cap \bar{G}_1 \subset G \cap \bar{G}_2$. Soit g un élément de l'ensemble $G \cap \bar{G}_2$. Alors

$$g = g \cdot e \quad \text{et} \quad g = e\bar{g}s, \quad \text{où} \quad \bar{g} \in \bar{G}_1 \quad \text{et} \quad s \in S$$

et d'après la propriété du produit simple nous obtenons $g = \bar{g}$, ce qui signifie que l'inclusion $G \cap \bar{G}_2 \subset G \cap \bar{G}_1$ a lieu, c'est-à-dire que la condition (2) est remplie.

Il nous a encore resté à démontrer que $\bar{G}_2$ est invariant dans $\bar{G}$. Dans ce but nous montrerons que pour chaque x de $\bar{G}$: $x\,\bar{G}_2 \subset \bar{G}_2\, x$, car on démontre l'inclusion inverse analogiquement.

Prenons un x de $\bar{G}$ et $\bar{g}$ de $\bar{G}_2$ et présentons les sous la forme des produits

$$x = g\, s, \text{ où } g \in G \cdot \bar{G}_1 \text{ et } s \in S \text{ et}$$

$$\bar{g} = g_1 s_1, \text{ où } g_1 \in \bar{G}_1 \text{ et } s_1 \in S.$$

Nous obtenons

$$x\,\bar{g} = g\, s\, g_1\, s_1 = s\, s_1\, g\, g_1.$$

Comme $\bar{G}_1$ est invariant dans $\bar{G}$, alors il existe $g' \in \bar{G}_1$ tel que

$$s\, s_1\, g\, g_1 = g'\, s\, s_1\, g.$$

Mettons $\bar{g}' = g'\, s\, s_1\, s^{-1}$. Nous voyons que $x\,\bar{g} = \bar{g}'\, x$ et comme $\bar{g}' \in \bar{G}_2$ alors l'inclusion $x\,\bar{G}_2 \subset \bar{G}_2\, x$ est remplie, ce qui finit la vérification des suppositions du théorème 1.

La démonstration de la deuxième partie 2) du théorème 5 est évidente.

3. Le théorème 1 résulte du théorème 4. Supposons que pour l'homomorphisme h du groupe G dans K il existe un sous-groupe invariant $\bar{G}_1$ du groupe $\bar{G}$ tel que $\ker h = G \cap \bar{G}_1$ et $\bar{G} = \bar{G}_1 \cdot G$, c'est-à-dire que les conditions (2) et (3) du théorème 1 soient remplies.

Posons $\operatorname{Im} h = H$ et mettons

$$F(\alpha, x) = \alpha\, h(x) \quad \text{pour} \quad (\alpha, x) \in H \times G.$$

Ainsi signifié $F: H \times G \to H$ est une solution transitive de (1) et le sous-groupe de la stabilité de F pour l'élément neutre e du groupe H est égal à ker h. Nous voyons que si dans le théorème 4 nous adoptons le noyau d'homomorphisme h comme le groupe G_1 et le groupe $\tilde{G}_1$ comme le groupe $\bar{G}$, alors les conditions (6) et (7) de ce théorème sont remplies. Construisons, pour la solution F, un prolongement $\tilde{F}$ étant la solution de (1) sur $H \times \bar{G}$, tel que $\tilde{G}_1$ soit le sous-groupe de la stabilité pour l'élément e (il existe telle possibilité, ce qui résulte de la démonstration du théorème 4 présentée dans [3]).
Remarquons que $F(e,G) = H$ et c'est pourquoi pour un x de $\bar{G}$ il existe un u de G tel que

$$\tilde{F}(e,x) = F(e,u) = \tilde{F}(e,u).$$

Comme $\tilde{F}$ est transitive et $\tilde{G}_1$ est le sous-groupe de la stabilité pour e alors de l'équation $\tilde{F}(e,x) = \tilde{F}(e,u)$, il en résulte que x et u appartiennent à la même classe d'équivalence à droit du groupe $\bar{G}$ par rapport au sous-groupe $\tilde{G}_1$.

Mettons $\bar{h}(x) = \tilde{F}(e,x)$ pour $x \in \bar{G}$ et vérifions que $\bar{h}$ est l'homomorphisme de $\bar{G}$ à H. Pour x,y de $\bar{G}$ nous choisissons dans G des éléments u et v pour lesquels

$$\tilde{F}(e,x) = F(e,u) \quad \text{et} \quad \tilde{F}(e,y) = F(e,v)$$

alors

$$\bar{h}(x)\cdot\bar{h}(y) = \tilde{F}(e,x)\cdot\tilde{F}(e,y) =$$

$$= F(e,u) \cdot F(e,v) = h(u) \cdot h(v) =$$
$$= h(u \cdot v) = F(e,uv) = \tilde{F}(e,uv).$$

Mais $\tilde{G}_1$ est invariant, alors le produit uv appartient à la même classe de la famille $\bar{G}|\tilde{G}_1$ que le produit xy et c'est grâce à la transitivité de $\tilde{F}$ fait que

$$\tilde{F}(e,uv) = \tilde{F}(e,xy) = \bar{h}(xy).$$

Sûrement $\bar{h}$ est un prolongement de h sur le groupe $\bar{G}$, tel que $\operatorname{Im} \bar{h} = \operatorname{Im} h$, ce qui finit la première partie de la démonstration.

Maintenant supposons que h et $\bar{h}$ soient des homomorphismes des groupes convenablement G sur H et $\bar{G}$ sur H et que $\bar{h}$ est un prolongement de h. Ces sont les suppositions de la deuxième partie du théorème 1.

Définissons $F: H \times G \to H$ et $\tilde{F}: H \times \bar{G} \to H$ de cette manière

$$F(\alpha,x) = \alpha h(x) \quad \text{pour} \quad (\alpha,x) \in H \times G \quad \text{et}$$
$$\tilde{F}(\alpha,x) = \alpha \bar{h}(x) \quad \text{pour} \quad (\alpha,x) \in H \times \bar{G}.$$

F est la solution transitive de (1) et $\tilde{F}$ est un prolongement de F.

Il résulte du théorème 4 qu'il existe un sous-groupe $\tilde{G}_1$ du groupe $\bar{G}$ pour lequel $G_1 = G \cap \tilde{G}_1$ et $\bar{G} = \tilde{G}_1 \cdot G$. Mais G_1 comme un sous-groupe de la stabilité de F pour un élément α_0 de Γ est égal à $\ker h$. De même $\tilde{G}_1$ est ègal à $\ker \bar{h}$, car il est un sous-groupe de la stabilité pour ce α_0, ce qui résulte de la démonstration du théorème 4 dans [3]. Ça signifie que les principes

$$\ker h = G \cap \ker \bar{h} \quad \text{et} \quad \bar{G} = \ker \bar{h} \cdot G$$

sont remplis, alors la thèse de la deuxième partie du théorème 1 a lieu, ce qui finit la démonstration.

4. Le théorème 4 est plus général que le théorème 1.

Le prolongement $\bar{F}$ de F dans le théorème 4 peut avoir, comme l'application $\bar{G} \ni x \to \bar{F}(\cdot, x)$, le contre-domaine plus grand que l'application $G \ni x \to F(\cdot, x)$. En effet ces applications ont le même contre-domaine si et seulement si

$$(10) \quad \bigwedge_{y \in \bar{G}} \ \bigvee_{x \in G} \ \bigwedge_{\alpha \in \Gamma} \ \bar{F}(\alpha, y) = F(\alpha, x)$$

et cela est équivalent à

$$(11) \qquad \bar{G} = N \cdot G,$$

où

$$N = \left\{ y \in \bar{G} : \ \bigwedge_{\alpha \in \Gamma} \bar{F}(\alpha, y) = \bar{F}(\alpha, e) \right\}.$$

En effet si (10) a lieu nous avons pour y de $\bar{G}$ et x de G:

$$\bar{F}(\bar{F}(\alpha, y), x^{-1}) = \bar{F}(F(\alpha, x), x^{-1})$$

et de là

$$\bar{F}(\alpha, y\, x^{-1}) = \bar{F}(\alpha, e),$$

donc $y\, x^{-1} \in N$. Il en résulte que $y \in N\, x$, donc $y \in N \cdot G$. De là $\bar{G} \subset N \cdot G$ et puisque l'inclusion inverse est évidente nous avons (11).

Inversement pour y de $\bar{G}$ d'après (11) nous avons $y = u\, x$ pour u de N et x de G. De là

$$\bar{F}(\alpha,y) = \bar{F}(\alpha,ux) = \bar{F}(\bar{F}(\alpha,u),x) =$$
$$= \bar{F}(\bar{F}(\alpha,e),x) = \bar{F}(\alpha,x) = F(\alpha,x),$$

c.q.f.d.

5. Les théorèmes 1 et 2 donnent les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un homomorphisme h soit prolongeable de G à $\bar{G}$ sans l'agrandissement de son contre-domaine ou avec l'agrandissement arbitraire de ce contre-domaine.

Il se pose le problème de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un homomorphisme $h: G \to K$ soit prolongeable à l'homomorphisme $\bar{h}: \bar{G} \to K$? On peut dire dans ce cas sur le prolongement avec l'agrandissement bornée (par le groupe K) du contre-domaine de h.

La réponse à cette question donne le théorème suivant:

THÉORÈME 6. L'homomorphisme $h: G \to K$ est prolongeable à l'homomorphisme $\bar{h}: \bar{G} \to K$ si et seulement s'il existe un sous-groupe invariant $\bar{G}_1$ de $\bar{G}$ tel que

$$\ker h = G \cap \bar{G}_1$$

et $\bar{G}|\bar{G}_1$ est isomorphiquement contenu dans K par un isomorphisme f tel que $f(a\,\bar{G}_1) = h(a)$ pour a de G.

D é m o n s t r a t i o n d e l a n é c e s s i t é est évidente, puisque dans la démonstration des théorèmes 1 et 2 (voir dans [1] les démonstrations des théorèmes 4 et 5) on a $\bar{G}_1 = \ker \bar{h}$.

D é m o n s t r a t i o n d e l a s u f f i s a n c e. Désignons par k l'homomorphisme canonique de $\bar{G}$ à $\bar{G}|\bar{G}_1$ et par f isomorphisme en supposition de $\bar{G}|\bar{G}_1$ à K. Dans ce cas $\bar{h} = f(k)$ est évidemment l'homomorphisme de $\bar{G}$ à K, étant en même temps le prolongement de h (voir la démonstration du théorème 5 dans [1]).

6. Considérons à présent les liaisons entre les suppositions des théorèmes 1, 2 et 4, c'est-à-dire les liaisons entre les suppositions suivantes:

(S_1) Il existe un sous-groupe invariant $\bar{G}_1$ du groupe $\bar{G}$ tel que

$$G_1 = G \cap \bar{G}_1, \quad \bar{G} = \bar{G}_1 \cdot G$$

(ce sont les suppositions (2) et (3) du théorème 1 - il suffit d'adopter $G_1 = \ker h$).

(S_2) Il existe le sous-groupe $\tilde{G}_1$ du groupe $\bar{G}$, tel que

$$G_1 = \tilde{G}_1 \cap G, \quad \bar{G} = \tilde{G}_1 \cdot G$$

(ces sont les conditions (6) et (7) du théorème 4).

(S_3) Il existe un sous-groupe invariant G_1^* du groupe $\bar{G}$, tel que

$$G_1 = G \cap G_1^*$$

(c'est la supposition du théorème 2, si nous adoptons $\ker h = G_1$).

(a) Evidemment (S_1) implique (S_2) et de (S_1) il en résulte (S_3).

(b) Il en résulte de l'exemple plus bas que (S_2)

n'implique pas (S_3).

E x e m p l e 1. Considérons le groupe symétrique S_3 dont les éléments désignons par:

$$I_1 = (1,2,3), \quad I_2 = (1,3,2), \quad I_3 = (3,2,1),$$
$$I_4 = (2,1,3), \quad I_5 = (3,1,2), \quad I_6 = (2,3,1).$$

Posons $\bar{G} = S_3 \circ S_3$ ("$\circ$" - le produit simple défini par le produit cartésien), $G = S_3 \circ \{I_1, I_2\}$, $G_1 = \{I_1, I_2\} \circ \{I_1\}$ et $\tilde{G}_1 = \{I_1, I_2\} \circ \{I_1, I_5, I_6\}$. Dans ce cas

1) $$G \cap \tilde{G}_1 = \{(I_1, I_1), (I_2, I_1)\} = G_1,$$

alors on a (7).

2) Soit $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

Alors

$$(I_k, I_1) = (I_1, I_1)(I_k, I_1), \quad (I_k, I_2) = (I_1, I_1)(I_k, I_2),$$
$$(I_k, I_3) = (I_1, I_5)(I_k, I_2), \quad (I_k, I_4) = (I_1, I_6)(I_k, I_2),$$
$$(I_k, I_5) = (I_1, I_5)(I_k, I_1), \quad (I_k, I_6) = (I_1, I_6)(I_k, I_1)$$

alors

$$\bar{G} = \tilde{G}_1 \cdot G.$$

Nous prouverons que dans le groupe $\bar{G}$ il n'existe pas le sous-groupe G_1^* réalisant (S_3). Dans ce but remarquons que l'ensemble G_1^* ne peut pas être l'ensemble des paires telles qui sur la première place n'ont que les éléments I_1 ou I_2. En effet si sur la première place de la paire il n'y a que I_1 l'ensemble G_1^* ne réalise pas (2), si sur la première place de la paire est toujours I_2, l'ensemble G_1^* ne forme pas du groupe et si dans G_1^* il y a des paires de deux types précédents le G_1^* n'est pas invariant (il suffit d'examiner les classes $(I_3,I_1)G_1^*$ et $G_1^*(I_3,I_1)$). Pour que le groupe G_1^* réalise (S_3) il doit alors refermer un élément tel qui sur la première place a un élément de l'ensemble $\{I_3,I_4,I_5,I_6\}$. Alors sur la deuxième place dans une telle paire il ne peut être ni I_1 ni I_2, car une telle paire serait dans le produit $G \cap G^*$ et elle ne serait pas dans G_1. Remarquons encore que la paire (I_2,I_1) doit être dans G_1^* et supposons que la paire (I_3,I_4) est dans G_1^*. Alors

$$(I_5,I_4) = (I_3,I_4)(I_2,I_1)$$

est aussi dans G_1^* et

$$(I_4,I_1) = (I_5,I_4)(I_3,I_4)$$

est aussi dans G_1^*.

Mais la paire (I_4,I_1) est ainsi dans G ce qui signifie qu'elle est aussi dans $G \cap G_1^*$, bien qu'elle ne soit pas dans G_1.

On peut réaliser un tel raisonnement aussi pour d'autres cas, ce qui nous donne la conclusion que chaque sous-groupe invariant G_1^* ne remplit pas les conditions (S_3).

(c) Il en résulte de (b) que $(S_2) \not\Rightarrow (S_1)$. On peut donner ici un exemple plus simple. Prenons

$$G = \{I_1,I_5,I_6\}, \quad G_1 = \{I_1\}, \quad G_1 = \{I_1,I_2\}$$

où $I_1,\ldots,I_6$ ont les mêmes signification que dans l'exemple 1. Nous pouvons facilement vérifier que les seuls sous-groupes invariants du groupe $\bar{G} = S_3$ ce sont les sous-groupes banals et le groupe G, mais aucun d'eux ne remplit les conditions exigées dans (S_1).

(d) L'exemple plus bas montre que de (S_3) il n'en résulte pas (S_2).

Exemple 2. Posons $\bar{G} = Z_4$, $G = \{0,2\}$, $G_1 = \{0\}$, $G_1^* = \{0\}$. Les groupes cités remplissent évidemment les conditions (S_3). Dans le groupe $\bar{G}$ les seuls sous-groupes ce sont les groupes banals et le groupe G et comme on le voit aucun d'eux ne remplit (S_2).

(e) Exemple 2 peut servir pour la démonstration que de (S_3) il n'en résulte pas (S_1).

Remarquons qu'il suffit d'ajouter aux conditions (S_2) la supposition d'invariabilité du sous-groupe G_1 dans le groupe G pour que les conditions (S_3) soient remplies.

En effet supposons que (S_2) soit rempli et que G_1 soit invariant dans G. Mettons

$$G_1^* = \bigcap_{a \in \bar{G}} a^{-1} \tilde{G}_1 a.$$

Le sous-groupe G_1^* est évidemment invariant dans $\bar{G}$. Nous démontrerons qu'il remplit la relation: $G_1 = G \cap G_1^*$. Sûrement $G_1^* \subset \tilde{G}_1$, alors aussi $G \cap G_1^* \subset G \cap \tilde{G}_1 = G_1$. Soit $a \in \bar{G}$. Conformément à (S_2) nous avons

$$a = x\,y, \quad \text{où} \quad x \in \tilde{G}_1 \quad \text{et} \quad y \in G.$$

De là

$$a^{-1}\tilde{G}_1 a = y^{-1}x^{-1}\tilde{G}_1 x\,y.$$

Mais $x^{-1}\tilde{G}_1 x = \tilde{G}_1$, alors $a^{-1}\tilde{G}_1 a = y^{-1}\tilde{G}_1 y$.

De (S_2) il en résulte ensuite que $G_1 \subset \tilde{G}_1$ d'où

$$a^{-1}\tilde{G}_1 a = y^{-1}\tilde{G}_1 y \supset y^{-1}G_1 y. \tag{12}$$

Comme $y \in G$ et G_1 est invariant dans G, nous avons

$$y^{-1}G_1 y = G_1. \tag{13}$$

De (12) et (13) il en résulte que

$$a^{-1}\tilde{G}_1 a \supset G_1$$

d'où

$$G_1^{*} = \bigcap_{a \in \bar{G}} a^{-1}\tilde{G}_1 a \supset G_1,$$

alors aussi

$$G \cap G_1^{*} \supset G \cap G_1 = G_1.$$

Nous avons donc $G_1 = G \cap G_1^{*}$, ce qui finit la démonstration.

On peut donner aussi une démonstration de ce fait par le théorème 4. Soit $K = G|G_1$, h - l'homomorphisme canonique $G \to K$ et posons

$$F(\alpha, x) = \alpha h(x) \quad \text{sur} \quad K \times G.$$

Tous les sous-groupes de la stabilité de F sont égaux aux G_1, les suppositions du théorème 4 sont donc remplies. Il existe donc le prolongement $\bar{F}$ de F de $K \times G$ à $K \times \bar{G}$. Le noyau d'homomorphisme $\bar{G} \ni y \to \bar{F}(\alpha, y)$ remplit les suppositions pour G_1^{*}.

Travaux cités

[1] Grząślewicz A., On extension of homomorphisms, Aequationes Mathematicae 17 (1978), p.199-207.

[2] Moszner Z., Sur le prolongement des objets géométriques transitifs, Tensor 26 (1972), p.239-242.
[3] Moszner Z., Structure de l'automate plein, réduit et inversible, Aequationes Mathematicae 9/1 (1973), p.46-59.