ZENON MOSZNER

Sur la continuité des homomorphismes

On sait très bien depuis longtemps que la fonction réelle d'une variable réelle et additive, mesurable au sens de Lebesgue doit être continue. Le résultat analogue pour les semigroupes d'itérations est démontré par M.C.Zdun dans [2] p.10. Plus bas nous allons démontrer que par le résultat de M.C.Zdun on peut généraliser ce qui concerne la fonction additive. Plus précisement nous démontrerons le théorème suivant.

THÉORÈME. Soit $J = R_+ = (0,+\infty)$ ou $J = R_- = (-\infty,0)$ ou $J = R = (-\infty,+\infty)$. Supposons que h soit un homomorphisme de $(J,+)$ dans l'intervalle fermé Δ avec l'opération "$\circ$": $\Delta \times \Delta \to \Delta$, continue par rapport à chaque variable et associative. De plus supposons que

(a) h soit mesurable au sens de Lebesgue ou

(b) il existe

$$\lim_{J \ni t \to 0} h(t).$$

Dans ce cas h doit être continu.

Pour la démonstration citons le résultat de M.C.Zdun ([2] p.10 Th.1.1 et p.12 Th.2.1) comme le

LEMME 1. Soit J un intervalle fermé* et $\{f^t : J \to J\}_{t \in R_+}$ une famille des fonctions continues et telles que

$$f^t(f^s) = f^{t+s}$$

et pour chaque x de J la fonction $R_+ \ni t \to f^t(x)$ est mesurable (L) ou il existe $\lim\limits_{R_+ \ni t \to 0} f^t(x)$. Dans ce cas cette dernière fonction est continue.

Remarquons que d'après ce lemme nous avons aussi le

LEMME 2. Si nous remplaçons R_+ dans le Lemme 1 par R_- ou R le lemme restera vrai.

D é m o n s t r a t i o n. Dans le cas R_- remarquons que la famille $F^t(x) := f^{-t}(x)$ remplit les suppositions du Lemme 1, donc la fonction $R_+ \ni t \to F^t(x)$ est continue pour x de J et de là $R_- \ni t \to f^t(x)$ est aussi continue.

Dans le cas R au lieu de R_+, d'après ce qui précède les fonctions $R_+ \ni t \to f^t(x)$ et $R_- \ni t \to f^t(x)$ sont continues. De plus pour chaque x de J et $t_0 \neq 0$

$$f^t(x) = f^{t-t_0}(f^{t_0}(x)) \to f^{-t_0}(f^{t_0}(x)) = f^0(x)$$

pour $t \to 0$, donc $R \ni t \to f^t(x)$ est continue dans zéro.

---

* D'accord de [2] on peut être $J = [-\infty, +\infty]$.

La démonstration du Lemme 2 est donc terminée.

Remarquons que si nous remplaçons R_+ dans le Lemme 1 par $[0,+\infty)$ nous ne receverrons pas du théorème exact. En effet posons

$$f^t(x) = \begin{cases} \frac{x+|x|}{2} + t & \text{pour } t>0 \text{ et } x \in R, \\ x & \text{pour } t=0 \text{ et } x \in R. \end{cases}$$

Notre fonction, en remplissant les suppositions du Lemme 1 avec $[0,+\infty)$ au lieu de R_+, n'est pas continue dans $t=0$ pour $x<0$.

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e. Posons $f^t(x) := x \circ h(t)$ pour $(x,t) \in \Delta \times J$. Cette famille des fonctions remplit les suppositions du Lemme 1 (si $J = R_+$) ou du Lemme 2 (dans les autres cas). En effet

$$f^t(f^s(x)) = [x \circ h(s)] \circ h(t) = x \circ [h(s) \circ h(t)] =$$

$$= x \circ h(s+t) = f^{t+s}(x).$$

Si h est mesurable, donc puisque "$\circ$" est continue, la fonction $t \to f^t(x)$ est aussi mesurable. S'il existe

$$\lim_{J \ni t \to 0} h(t)$$

donc il existe aussi

$$\lim_{J \ni t \to 0} f^t(x).$$

Il en résulte que la fonction $J \ni t \to f^t(x)$ est continue.

Soit t_o fixé dans J et posons $x = h(t_o)$. On a pour $t - t_o$ de J:

$$f^{t-t_o}(h(t_o)) = h(t_o) \circ h(t-t_o) = h(t),$$

donc $h(t)$ est continue pour t tel que $t - t_o \in J$.

Si $J = R$ la fonction $h(t)$ est donc continue sur J. Pour $J = R_+$ la fonction $h(t)$ est continue pour $t > t_o$ et puisque t_o est arbitrairement choisie dans R_+, h est continue sur J. La même situation nous avons pour $J = R_-$. La démonstration du théorème est donc terminée.

Comme l'application du théorème démontré indiquons qu'on peut affaiblir la supposition de la continuité de φ à la supposition de la mesurabilité de φ dans les théorèmes au sujet des solutions de l'équation

$$\varphi(x+y) = F(\varphi(x), \varphi(y))$$

dans le travail [1].

Travaux cités

[1] Powązka Z., Über stetigen Lösungen der Funktionalgleichung $\varphi(x+y) = F(\varphi(x), \varphi(y))$, Rocznik Naukowo-Dydaktyczny WSP. Z.69, Kraków 1979, p.137-146.

[2] Zdun M.C., Continuous and differentiable iteration semigroups, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, nr 308, 1979.