WŁADYSŁAW WILK

Erzeugung der Unterfunktionssysteme in den Funktionssystemen

In der vorliegenden Arbeit will ich auf das Problem der Erzeugung von Unterfunktionssystemen und Unterfunktionssystemen mit Einheitselement in den Funktionssystemen eingehen. Einen Einblick in den Ursprung der Begriffs des Funktionssystems und die Beschreibung der Grundmodellen von dieser Struktur kann der Leser in den Arbeiten von B.Schweizer und A.Sklar ([1], [2], [3]) gewinnen. Die Ausgangsdefinitionen und -sätze in meiner Arbeit stammen auch aus einer der obengenannten Arbeiten ([1]).

Das Grundproblem, mit dem ich mich befasse, ist die Konstruktion der durch eine nichtleere Teilmenge des Funktionssystems erzeugten Unterfunktionssysteme und der Unterfunktionssysteme mit Einheitselement. Hervorzuheben sind folgende wesentliche Punkte: die Sätze, die die Konstruktion der erzeugten Unterfunktionssysteme betreffen (Sätze 10 und 12); die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des erzeugten Unterfunktionssystems mit Einheitselement

(Satz 13); und der Satz, der den Zusammenhang zwischen dem durch die gegebene Menge erzeugten Unterfunktionssystem mit Einheitselement (soweit es vorhanden ist) und dem einfachen, durch diese Menge erzeugten Unterfunktionssystem festlegt (Satz 14).

1. Einführung

DEFINITION 1. (s.[1]). Funktionssystem - kürzer: F-System - nennen wir eine Struktur $(A, \circ, L, R)$, die aus einer nichtleeren Menge A, einer binären Operation $\circ$ und zwei unären Operationen L und R besteht, die auf der Menge A definiert sind und folgenden Axiomen genügen:

AXIOM 1.

(A.1) Das Paar $(A, \circ)$ ist eine Halbgruppe.

AXIOM 2.

Für jedes $a \in A$ gilt:

(A.2a) $LRa = Ra, \quad RLa = La;$

(A.2b) $La \circ a = a = a \circ Ra.$

AXIOM 3.

Für jedes Paar $a, b \in A$ gilt:

(A.3a) $L(a \circ b) = L(a \circ Lb), \quad R(a \circ b) = R(Ra \circ b);$

(A.3b) $La \circ Rb = Rb \circ La;$

(A.3c) $Ra \circ b = b \circ R(a \circ b).$

DEFINITION 2. (s.[1]). Ein Element s des F-Systems $(A, \circ L, R)$ nennen wir ein Untereinheitselement dann und nur dann, wenn ein Element $a \in A$ existiert, das die Gleichung

$s = Ra$ erfüllt.

SATZ 1. (s.[1]). In jedem F-System $(A, \circ, L, R)$ sind folgende Bedingungen gleichwertig:

(A) s ist ein Untereinheitselement;

(B) $s = Ls$;

(C) ein Element $a \in A$ existiert, für das $s = La$;

(D) $s = Rs$.

SATZ 2. (s.[1]). Sind s und t Untereinheitselemente, so gilt:

(a) $s \circ t = t \circ s$;

(b) $s \circ t$ ist ein Untereinheitselement.

DEFINITION 3. (s.[1]). Sei $(A, \circ, L, R)$ ein F-System und $a, b \in A$. $a \subseteqq b$ dann und nur dann, wenn $a = b \circ Ra$.

SATZ 3. (s.[1]). Die Relation $\subseteqq$ ist eine Halbordnung.

SATZ 4. (s.[1]). Für alle Elemente a, b des F-Systems $(A, \circ, L, R)$ gilt:

$$L(a \circ b) \subseteqq La, \quad R(a \circ b) \subseteqq Rb.$$

SATZ 5. (s.[1]). Ist s ein Untereinheitselement und $a \subseteqq s$, so ist a ein Untereinheitselement und es bestehen die Gleichungen $a \circ s = s \circ a = a$.

DEFINITION 4. (s.[1]). Ein F-System wird ein F-System mit Einheitselement genannt dann und nur dann, wenn die Halbgruppe $(A, \circ)$ das Einheitselement besitzt.

Die oben angeführten Eigenschaften des F-Systems haben mich veranlasst, die Menge von Untereinheitselementen des

F-Systems zu unterscheiden.

DEFINITION 5. Sei $(A, \circ, L, R)$ ein F-System. Die Menge

$$E(A) = \{s \in A:\ s \text{ ist ein Untereinheitselement}\}$$

nennen wir das untere Halbgitter von Untereinheitselementen (oder kürzer gesagt: Halbgitter) dieses F-Systems [1].

B e m e r k u n g 1. Aus dem Satz 1 folgt, dass L und R die Menge A auf die Menge $E(A)$ abbilden und Identitäten auf einer beliebigen nichtleeren Teilmenge des Halbgitters $E(A)$ sind.

SATZ 7. Ein Element n des F-Systems $(A, \circ, L, R)$ ist das Einheitselement dieses F-Systems genau dann, wenn $n = \max E(A)$ [2].

Sei $F(X)$ eine Menge von allen partiellen Abbildungen der Menge X in sich. $F(X)$ ist nun eine Menge von Relationen besonderen Typs - die leere Relation wollen wir auch als eine Abbildung betrachten. Nehmen wir an, dass die einfache Komposition der Relationen die binäre Operation $\circ$ in der Menge $F(X)$ sein soll. Für $f \in F(X)$ definieren wir Rf und Lf folgendermassen:

$$Rf = id_{Df} \quad \text{und} \quad Lf = id_{Cf},$$

womit id_{Df} die Identität auf dem Bereich der Abbildung f ist und id_{Cf} die Identität auf dem Wertbereich der Abbildung f. Bei so bestimmten Operationen ist das Komplex

[1] $(E(A), \subseteq)$ ist ein unteres Halbgitter, dann für alle Elemente $a, b \in E(A)$ gilt $a \circ b = \inf(a,b)$.

[2] Im Sinne der Relation $\subseteq$.

$(F(X), \circ, L, R)$ ein Funktionssystem mit Einheitselement $j = id_X$. Relation $\subsetneq$ ist in diesem Fall die einfache Einschränkung der Abbildung (s.[3]).

DEFINITION 6. Eine nichtleere Teilmenge D der Grundmenge des F-Systems $(A, \circ, L, R)$ nennen wir ein Unterfunktionssystem - kürzer: F-Untersystem -(Unterfunktionssystem mit Einheitselement - kürzer: F-Untersystem mit Einheitselement) dieses F-Systems dann und nur dann, wenn wir nach den Einschränkung der Operationen: $\circ$, L, R auf die Menge D ein F-System (ein F-System mit Einheitselement) erhalten.

Weiterhin wollen wir für Bezeichnung der Operationen im F-System und dessen F-Untersystem dieselbe Zeichen anwenden, was jedoch keine Unverständlichkeit herbeiführen soll.

B e m e r k u n g 2. Als unmittelbare Folge von Satz 1 und Definition 6 erhalten wir: wenn D ein F-Untersystem ist, so gilt

(1) $$E(D) = D \cap E(A).$$

Sätze 1 und 2 lassen die Behauptung zu, dass $E(A)$ ein kommutatives F-Untersystem des F-Systems $(A, \circ, L, R)$ ist.

SATZ 8. Ist D eine nichtleere Teilmenge der Grundmenge des F-Systems $(A, \circ, L, R)$, so:

(a) ist D ein F-Untersystem genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(E) für jedes Paar $a, b \in D$ gilt $a \circ b \in D$,

(F) für jedes $a \in D$ gilt $La, Ra \in D$;

(b) ist D ein F-Untersystem mit Einheitselement genau dann, wenn ausser (E) und (F) folgende Bedingung erfüllt ist:
(G) in A existiert ein Element n, so dass $n = \max D \cap E(A)$.

B e w e i s. Aus ersichtlichen Gründen ist die erste These richtig. Die These (b) folgt unmittelbar aus Satz 7 und Gleichung (1).

DEFINITION 7. Es sei $(A, \circ, L, R)$ ein F-System und B - eine nichtleere Teilmenge der Menge A. Das im Sinne der Inklusion kleinste, die Menge B enthaltende F-Untersystem (F-Untersystem mit Einheitselement) heisst das durch die Menge B erzeugte F-Untersystem (F-Untersystem mit Einheitselement) dieses F-Systems. Die in der obigen Definition genannten F-Untersysteme wollen wir entsprechend mit $G(B)$ und $\overline{G(B)}$ bezeichnen.

B e m e r k u n g 3. $G(B)$ existiert immer und ist Durchschnitt einer Familie, die aus allen die Menge B enthaltenden F-Untersystemen besteht. $\overline{G(B)}$ existiert daher nicht immer, wenn auch das betreffende F-System das Einheitselement besitzt; Satz 13 wird die notwendige und hinreichende Bedingung für Existenz von $\overline{G(B)}$ angeben, wodurch das Problem der Illustrierung der obigen Behauptung am entsprechenden Beispiel völlig gelöst werden soll. Insofern $\overline{G(B)}$ existiert, so ist es Durchschnitt einer Familie, die aus allen die Menge B anthaltenden F-Untersystemen mit Einheitselement besteht.

DEFINITION 8. Eine nichtleere Teilmenge X einer halbgeordneten Menge $(Y, \leqslant)$ nennen wir einen Anfangsintervall dann und nur dann, wenn für beliebige: $y \in Y$, $x \in X$ gilt: wenn $y \leqslant x$, so liegt y in X.

SATZ 9. Ist N ein Anfangsintervall in der halbgeordneten Menge $(E(A), \subseteqq)$, so ist

$$A(N) = L^{-1}(N) \cap R^{-1}(N)$$

ein F-Untersystem des F-Systems $(A, \circ, L, R)$ und besteht folgende Gleichung:

$$E(A(N)) = N.$$

B e w e i s. Wenn $a, b \in A(N)$, so ergibt sich, dass $La, Ra \in N$. Aus Satz 4 folgt

$$L(a \circ b) \subseteqq La \quad \text{und} \quad R(a \circ b) \subseteqq Rb;$$

und da N ein Anfangsintervall in $(E(A), \subseteqq)$ ist, so gilt $a \circ b \in A(N)$. Aus der Bemerkung 1 folgt, dass $R(N) = N$, woraus

(2) $$N \subset R^{-1}(R(N)) = R^{-1}(N)$$

folgt; und in analoger Weise

(3) $$N \subset L^{-1}(N).$$

Aus (2) und (3) ergibt sich, dass $N \subset A(N)$.

Wenn nun $c \in A(N)$, so gilt $Lc, Rc \in N \subset A(N)$. Damit erhalten wir unter Berücksichtigung von Satz 8, dass $A(N)$ ein F-Untersystem ist.

Da $N \subset E(A)$ und $N \subset A(N)$, so haben wir nach (1), dass

(4) $$N \subset A(N) \cap E(A) = E(A(N)).$$

Wenn $d \in E(A(N))$, so gilt nach Satz 1 $d = Rd$. Andererseits

$$d \in E(A(N)) \subset A(N) \subset R^{-1}(N),$$

und damit

$$d = Rd \in N.$$

In (4) gilt also die Gleichheit.

2. Erzeugung der F-Untersysteme G(B). Weiterhin bezeichnen wir durch $P(X)$ die durch eine nichtleere Teilmenge X der Grundmenge des F-Systems $(A, \circ L, R)$ erzeugte Unterhalbgruppe der Halbgruppe $(A, \circ)$.

SATZ 10. Ist B eine nichtleere Teilmenge der Grundmenge des F-Systems $(A, \circ, L, R)$, so gilt

$$G(B) = P(B \cup E(G(B))).$$

B e w e i s. Setzen wir $P = P(B \cup E(G(B)))$. Die Inklusion $P \subset G(B)$ liegt auf der Hand. Dass P der Bedingung (E) genügt, ist ebenso offenbar.

Wenn $a \in P$, so gilt $a \in G(B)$ und folglich $La, Ra \in E(G(B)) \subset P$. Aus Satz 8 kann also festgestellt werden, dass P ein die Menge B enthaltendes F-Untersystem ist, woraus wir erhalten:

$$G(B) \subset P(B \cup E(G(B)))$$

und damit ist der Beweis erbracht.

SATZ 11. Ist $(A, \circ, L, R)$ ein F-System, B eine nichtleere Teilmenge der Menge A und $\{N_i\}_{i \in I}$ Familie von allen Teilmengen der Menge $E(A)$, so dass für jedes $i \in I$

(O) $$L(B) \cup R(B) \subset N_i,$$

(P) $$L(B \circ P(N_i)) \subset P(N_i),$$

(Q) $$R(P(N_i) \circ B) \subset P(N_i)$$

gilt, so ist folgende Gleichung:

$$E(G(B)) = \bigcap_{i \in I} P(N_i)$$

erfüllt.

B e w e i s. Die Familie $\{N_i\}_{i \in I}$ ist nicht leer, denn $E(A)$ ist ihr Element. Wir wollen zunächst beweisen, dass für jedes $i \in I$ die Menge $P_i = P(B \cup N_i)$ ein F-Untersystem ist. Zu diesem Zwecke genügt eigentlich zu zeigen, dass alle P_i Eigenschaft (F) erfüllen.

Wenn $a \in B \cup N_i$, so nach (O) und Bemerkung 1 erhalten wir:

$$Ra \in R(B \cup N_i) = R(B) \cup R(N_i) = R(B) \cup N_i = N_i \subset P(N_i).$$

Nehmen wir folgende Indunktionsvoraussetzung an: Liegt ein Element in der Menge P_i und ist dessen Darstellung in der Form des Produkts von den Elementen der Menge $B \cup N_i$ von der Länge k (k ist eine natürliche Zahl), so gehört das Resultat der Operation R auf diesem Element zu $P(N_i)$. Für $a \in P_i$ von der Darstellung

$$a = a_1 \circ \ldots \circ a_{k+1},$$

womit $a_1, \ldots, a_{k+1} \in B \cup N_i$, haben wir dann:

(a) wenn $a_{k+1} \in B$, so gilt

$$Ra = R(R(a_1 \circ \ldots \circ a_k) \circ a_{k+1}) \in P(N_i); \qquad (A.3a, (Q))$$

(b) wenn $a_{k+1} \in N_i$, so gilt

$$Ra = R(R(a_1 \circ \ldots \circ a_k) \circ a_{k+1}) = \qquad (A.3a)$$

$$= R(a_1 \circ \ldots \circ a_k) \circ a_{k+1} \in P(N_i) \circ N_i = P(N_i). \quad (S.1, S.2)$$

Änlicher Gedankengang kann für die Operation L durchgeführt werden.

Aus oben durchgeführten Betrachtungen ergibt sich, dass alle P_i zu der Familie von F-Untersystemen gehören, deren Durchschnitt $G(B)$ ist.

In Anlehnung an die vorangegangene Schlussfolgerung: dass wenn $a \in P_i$, so $Ra \in P(N_i)$ gilt - wollen wir beweisen, dass

$$E(P_i) \subset P(N_i).$$

In der Tat, wenn a zu $E(P_i)$ gehört, so $Ra = a$ liegt in P_i, und damit $a \in P(N_i)$.

Die Inklusion $P(N_i) \subset E(P_i)$ liegt auf der Hand.

Aus der Gleichung $E(P_i) = P(N_i)$ und oben dargestellten Eigenschaften der F-Untersysteme P_i folgt

$$E(G(B)) \subset \bigcap_{i \in I} P(N_i). \tag{5}$$

Da $E(G(B)) \in \{N_i\}_{i \in I}$, so gilt in (5) Gleichheit.

SATZ 12. Es sei B eine nichtleere Teilmenge der Grundmenge des F-Systems $(A, \circ, L, R)$. Setzen wir

$$N^0 = L(B) \cup R(B).$$

Es sei nun

$$N^i = L(B \circ P(N^{i-1})) \cup R(P(N^{i-1}) \circ B)$$

für $i = 1,2,3,\ldots$; es sei ferner

$$\bar{N} = \bigcup_{i=0}^{\infty} N^i.$$

Dann besteht die Gleichung

$$E(G(B)) = P(\bar{N}).$$

B e w e i s. Zunächst wollen wir beweisen, dass

(6) für jedes $i = 0,1,2,\ldots$ gilt $N^i \subset N^{i+1}$.

Gehört x zu N^0, so existiert ein Element $a \in B$, so dass $x = La$ oder $x = Ra$. Nehmen wir $x = Ra$ an. Dann gehört La zu N^0 und folglich

$$x = R(La \circ a) \in R(N^0 \circ B) \subset R(P(N^0) \circ B) \subset N^1. \qquad (A.2b)$$

Der Beweis im anderen Fall wird in analoger Weise durchgeführt.

Aus der Voraussetzung

$$N^i \subset N^{i+1}$$

ergibt sich

$$P(N^i) \subset P(N^{i+1}),$$

woraus folgt

$L(B \circ P(N^i)) \subset L(B \circ P(N^{i+1}))$ und $R(P(N^i) \circ B) \subset R(P(N^{i+1}) \circ B)$,

d.h.

$$N^{i+1} \subset N^{i+2}.$$

Die Bedingung (6) ist also erfüllt.

Nun wollen wir nachweisen, dass $\bar{N}$ eine der Mengen der im Satz 11 definierten Familie $\{N_i\}_{i \in I}$ ist.

Dass die Menge $\bar{N}$ der Bedingung (0) genügt, ergibt sich unmittelbar aus (6).

Nun wollen wir beweisen, dass

$$L(B \circ P(\bar{N})) \subset P(\bar{N}).$$

Es sei $x \in L(B \circ P(\bar{N}))$. Dann existieren: $a \in B$, $a_{i_1} \in N^{i_1}$, $a_{i_2} \in N^{i_2}, \ldots, a_{i_k} \in N^{i_k}$, womit $i_1, i_2, \ldots, i_k$, k natürliche Zahlen sind, so dass

$$x = L(a \circ (a_{i_1} \circ a_{i_2} \circ \ldots \circ a_{i_k})).$$

Aus (6) folgt aber, dass $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k} \in N^s$, womit $s = \max(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, woraus wir haben:

$$a_{i_1} \circ a_{i_2} \circ \ldots \circ a_{i_k} \in P(N^s);$$

und folglich

$$x \in L(B \circ P(N^s)) \subset N^{s+1} \subset P(\bar{N}).$$

Entsprechend beweisen wir, dass

$$R(P(\bar{N}) \circ B) \subset P(\bar{N}).$$

Nach Satz 11 können wir also behaupten, dass

$$E(G(B)) \subset P(\bar{N}).$$

Andererseits sind alle N^i in $E(G(B))$ enthalten, woraus unter Berücksichtigung von Satz 2 folgt

$$P(\bar{N}) \subset E(G(B))$$

und damit ist der Beweis erledigt.

Die Sätze 10 und 12 gestatten das F-Untersystem $G(B)$ effektiv zu konstruieren.

In manchen Fällen kann man diese Konstruktion wesentlich vereinfachen:

- Ist im F-System $(A, \circ, L, R)$ die Operation $\circ$ kommutativ, so gilt $R = L$ (vergl. [2], Korollar nach Satz 2), dann ist die Gleichung

$$\bar{N} = P(R(B))$$

erfüllt, woraus folgt

$$G(B) = P(B \cup R(B)) .$$

- Ist im F-System $(A, \circ, L, R)$ das Halbgitter $E(A)$ eine endliche Menge, so existiert nur eine endliche Anzahl von verschiedenen Mengen N^i, was wesentlich die Ausführung der Konstruktion des F-Untersystems $G(B)$ erleichtert.

Kommt keiner der obigen Fälle vor, so kann, aber nicht unbedingt, $\bar{N}$ die Vereinigung von unendlicher Anzahl verschiedener Mengen N^i sein, wenn auch eine der Mengen N^i eine Unterhalbgruppe der Halbgruppe $(E(A), \circ)$ ist. Diese Behauptung wollen wir an folgenden Beispiel veranschaulichen.

B e i s p i e l. Betrachten wir ein F-System $(F(\mathbb{R}), \circ, L, R)$, womit $\mathbb{R}$ die Menge der reelen Zahlen ist. Die Funktion $f: [0;1] \ni x \to 2x \in \mathbb{R}$ ist ein Element dieses F-Systems. Für die Erzeugendenmenge $B = \{f\}$ erhalten wir:

$$N^i = \{ id_{\left[0;\frac{1}{2^n}\right]} : n \in \{-1, 0, 1, 2, \ldots, i\} \},$$

mit $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Dagegen für $B = \{g\}$, mit $g: [0;31] \ni x \to 2x + 1 \in \mathbb{R}$ gibt es nur fünf verschiedene Mengen N^i $(\bar{N} = N^5)$.

3. Erzeugung der F-Untersysteme $\overline{G(B)}$.

SATZ 13. Ist $(A, \circ, L, R)$ ein F-System und B eine nichtleere Teilmenge der Menge A, so existiert $\overline{G(B)}$ dann und nur dann, wenn die Menge von allen zu $E(A)$ gehörenden Majoranten der Menge $L(B) \cup R(B)$ das Maximum besitzt oder die Menge von allen zu $E(A)$ gehörenden Majoranten der Menge $L(B) \cup R(B)$ nur ein Element enthält.

B e w e i s.

$(\Longrightarrow)$

Bezeichnen wir mit n das Einheitselement des F-Untersystems $\overline{G(B)}$. Dann ist nach Satz 7 offenbar, dass $n = \max E(\overline{G(B)})$. Da die Inklusion $L(B) \cup R(B) \subset E(\overline{G(B)})$ besteht, so ist n eine Majorante der Menge $L(B) \cup R(B)$. Nun genügt es zu beweisen, dass wenn $n \notin L(B) \cup R(B)$, so ist n die einzige zu $E(A)$ gehörende Majorante dieser Menge. Angenommen, dass $n \notin L(B) \cup R(B)$, stellen wir folgende Hypothese auf: in $E(A)$ existiert ein Element m, so dass $m \neq n$ und m eine Majorante der Menge $L(B) \cup R(B)$ ist. Dann ist die Menge

(7) $X(B) = \{t \in E(A):$ in $L(B) \cup R(B)$ existiert ein Element s, so dass $t \subseteqq s\}$

ein Anfangsintervall in $(E(A), \subseteqq)$. Satz 9 gestattet folgende Behauptung:

$$A(X(B)) = L^{-1}(X(B)) \cap R^{-1}(X(B))$$

ist ein B umfassendes F-Untersystem.

Beweisen wir zunächst, dass die Menge $A(X(B)) \cup \{m\}$ ein F-Untersystem mit dem Einheitselement m ist. Wenn $a \in A(X(B)) \cup \{m\}$, so gilt

$$a \circ m = (a \circ Ra) \circ m = \qquad (A.2b)$$

$$= a \circ (Ra \circ m) = \qquad (A.1)$$

$$= a \circ Ra = a. \qquad (T.5, A.2b)$$

Entsprechend ergibt sich, dass $m \circ a = a$. Da $m \in E(A)$, so gilt $m = Lm = Rm$. Somit ist $A(X(B)) \cup \{m\}$ ein Element der Familie von den B enthaltenden F-Untersystemen. Offenbar ist, dass $n \notin A(X(B)) \cup \{m\}$, denn gesetzt, dass die abgeleitete Schlussfolgerung nicht richtig wäre, könnten wir behaupten, dass $n \in X(B)$ und schliesslich $n \in L(B) \cup R(B)$, was jedoch im Widerspruch zur angenommenen Voraussetzung steht. Sobald $n \notin A(X(B)) \cup \{m\}$, so gilt $n \notin \overline{G(B)}$, was den Widerspruch darstellt.

($\Longleftarrow$)

Es sei nun $\{B_i\}_{i \in I}$ eine Familie von allen die Menge B umfassenden F-Untersystemen mit Einheitselement. Nehmen wir zunächst an, dass die Menge $L(B) \cup R(B)$ das Maximum n_1 besitzt. In diesem Fall ist die Familie $\{B_i\}_{i \in I}$ nicht leer, denn das in (7) definierte F-Untersystem $A(X(B))$ ist ihr Element. Der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} B_i$ ist ein F-Untersystem des F-Systems $(A, \circ, L, R)$ (Satz 8). Ebenso ist es bekannt, dass n_1 in $(\bigcap_{i \in I} B_i) \cap E(A)$ liegt. Gehört nun s zu $(\bigcap_{i \in I} B_i) \cap E(A)$, so gilt $s \in A(X(B)) \cap E(A)$, woraus wir unter Benutzung von Satz 1 erhalten: $s \in X(B)$. Da zugleich n_1 die Majorante der Menge $L(B) \cup R(B)$ ist, so gilt $s \subsetneqq n_1$. Wir haben nun:

$$n_1 = \max (\bigcap_{i \in I} B_i) \cap E(A).$$

Satz 8 gestattet die Bahauptung, dass $\bigcap_{i \in I} B_i$ ein die Menge B umfassendes F-Untersystem mit Einheitselement ist, d.h. $\overline{G(B)}$ existiert.

Ferner nehmen wir an, dass die Menge von zu $E(A)$ gehörenden Majoranten der Menge $L(B) \cup R(B)$ nur ein Element enthält. Bezeichnen wir diese einzige Majorante mit n_2. In diesem Fall ist die Familie $\{B_i\}_{i \in I}$ ebenso nicht leer, denn $A(X(B)) \cup \{n_2\}$ ist ihr Element. Jedes F-Untersystem B_j der Familie $\{B_i\}_{i \in I}$ besitzt das Einheitselement n_j. Wir wissen auch (Satz 8), dass $n_j = \max B_j \cap E(A)$ gilt. Satz 8 und (1) gestatten folgende Behauptung:

$$L(B) \cup R(B) \subset E(B_j) = B_j \cap E(A),$$

damit ist n_j eine Majorante der Menge $L(B) \cup R(B)$, woraus wir die Gleichung $n_j = n_2$ erhalten. Somit besitzen alle F-Systeme der Familie $\{B_i\}_{i \in I}$ dasselbe Einheitselement n_2; unter Berücksichtigung von der obigen Schlussfolgerung und den Sätzen 7 und 8 haben wir:

$$n_2 = \max \bigcap_{i \in I} (B_i \cap E(A)) = \max (\bigcap_{i \in I} B_i) \cap E(A),$$

womit der Satz bewiesen ist.

SATZ 14. Existiert $\overline{G(B)}$, so ist die Gleichung

$$\overline{G(B)} = G(B) \cup \{n\}$$

erfüllt, womit n die kleinste zu $E(A)$ gehörende Majorante der Menge $L(B) \cup R(B)$ ist.

B e w e i s. Es sei $\{B_i\}_{i \in I}$ $(\{C_j\}_{j \in J})$ eine Familie von allen die Menge B enthaltenden F-Untersystemen (F-Untersystemen mit Einheitselement) des F-Systems $(A, \circ, L, R)$. Bemerken wir, dass folgende Inklusion:

$$\{C_j\}_{j \in J} \subset \{B_i\}_{i \in I}$$

besteht, woraus folgt

$$G(B) = \bigcap_{i \in I} B_i \subset \bigcap_{j \in J} C_j = \overline{G(B)}$$

(angenommene Voraussetzungen garantieren, dass beide Familien nicht leer sind). Es gilt $n \in \overline{G(B)}$, denn, wie es sich aus Beweis des Satzes 13 ergibt, n ist das Einheitselement des F-Systems $\overline{G(B)}$. Daher haben wir:

$$G(B) \cup \{n\} \subset \overline{G(B)}.$$

Es ist leicht zu zeigen, dass $G(B) \cup \{n\}$ ein B umfassendes F-Untersystem mit Einheitselement ist, woraus

$$\overline{G(B)} \subset G(B) \cup \{n\}$$

folgt und der Beweis ist erledigt.

Literaturverzeichnis

[1] Schweizer B., and Sklar A., Function systems, Math. Ann. 172(1967), S.1-16.

[2] --- ---, The algebra of functions, Math. Ann. 139(1960), S.366-382.

[3] --- ---, A grammer of functions, Aequationes Math. 2(1968), S.62-85.