KAZIMIERZ JARACZ, JOLANTA LUDWIN-ZIELIŃSKA

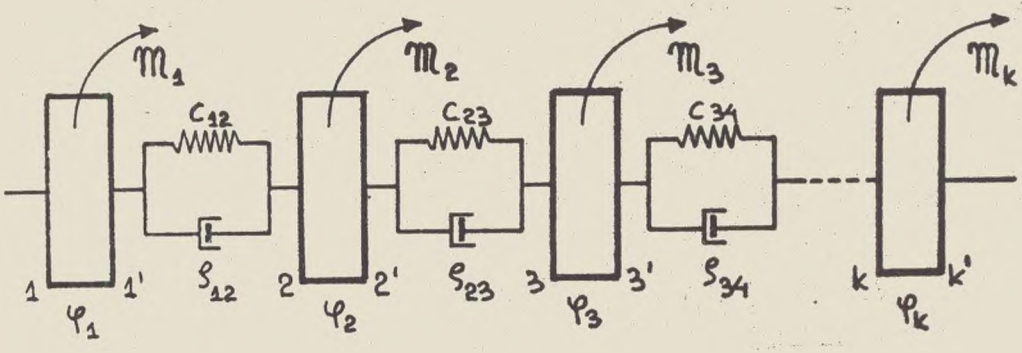
Modele i częstotliwość własna systemu łańcuchowego z elementami sprężystymi

1. WSTĘP

W praktyce układów napędowych występuje wiele przypadków istotnych wpływów elementów sprężystych(wałów pośredniczących)w przekazywaniu momentu obrotowego. Badania dynamiki takiego systemu wymagają konstrukcji jego modelu dynamicznego.

2. OGÓLNE RÓWNANIA RUCHU SYSTEMU ŁAŃCUCHOWEGO

Rozpatrzmy system łańcuchowy złożony z k elementów sprężystych rys.1 .



Rys.1. Schemat strukturalny systemu łańcuchowego

Ogólna liczba stopni swobody tego systemu równa jest sumie stopni swobody mechanizmu z członami sztywnymi i liczbie sprężystych elementów.

Niech dane będzie k skupionych mas o momentach bezwładności $J_1, J_2, \ldots, J_k$ i współczynnikach sprężystości $c_{12}, c_{23}, \ldots, c_{k-1,k}$. Za współrzędne uogólnione przyjmiemy kąty obrotu wałów w przekrojach 1 (lub 1'), 2 (lub 2'), ..., k (lub k'). Kąty te oznaczymy odpowiednio przez $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$. Równania dynamiki układu przy pomijalnie małej dyssypacji energii $\varrho_{ij} = 0$ mają formę:

$$
\begin{aligned}
J_1 \ddot{\varphi}_1 &= \mathfrak{M}_1 - c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) \\
J_2 \ddot{\varphi}_2 &= \mathfrak{M}_2 + c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) - c_{23}(\varphi_2 - \varphi_3) \\
&\vdots \\
J_{i-1} \ddot{\varphi}_{i-1} &= \mathfrak{M}_{i-1} + c_{i-2,i-1}(\varphi_{i-2} - \varphi_{i-1}) - c_{i-1,i}(\varphi_{i-1} - \varphi_i) \\
J_i \ddot{\varphi}_i &= \mathfrak{M}_i + c_{i-1,i}(\varphi_{i-1} - \varphi_i) - c_{i,i+1}(\varphi_i - \varphi_{i+1}) \qquad (1) \\
J_{i+1} \ddot{\varphi}_{i+1} &= \mathfrak{M}_{i+1} + c_{i,i+1}(\varphi_i - \varphi_{i+1}) - c_{i+1,i+2}(\varphi_{i+1} - \varphi_{i+2}) \\
J_k \ddot{\varphi}_k &= \mathfrak{M}_k + c_{k-1,k}(\varphi_{k-1} - \varphi_k)
\end{aligned}
$$

3. CZĘSTOTLIWOŚĆ WŁASNA SYSTEMU ŁAŃCUCHOWEGO

Do wyznaczenia tej częstotliwości zastosować można metodę macierzy przenoszenia opisaną w pracy [1]. W przypadku rozpatrywanego układu napędowego zastosujemy metodę bezpośredniej analizy układu równań różniczkowych (1). Ograniczając się dla prostoty do trzech równań, a więc do trzech mas skupionych oraz przyjmując zerowe obciążenie zewnętrzne otrzymamy:

$$J_1\ddot{\varphi}_1 + c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

$$J_2\ddot{\varphi}_2 - c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + c_{23}(\varphi_2 - \varphi_3) = 0 \qquad (2)$$

$$J_3\ddot{\varphi}_3 - c_{23}(\varphi_2 - \varphi_3) = 0$$

Rozwiązania szczególnego układu równań (1) szukamy w formie:

$$\varphi_i = A_i \sin(\nu t + \alpha) \quad \text{dla} \quad i=1,2,\ldots,k \qquad (3)$$

tj. przyjmujemy, że w systemie występują drgania przy których wszystkie współrzędne uogólnione zmieniają się sinusoidalnie z tą samą częstotliwością ν, a fazy drgań bądź to są zgodne bądź różnią się o π.

Podstawiając (3) do (1) otrzymujemy układ jednorodny względem nieznanych amplitud $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Posiada on rozwiązanie różne od zerowego w przypadku, gdy wyznacznik macierzy układu jest równy zeru.

Dla $k = 3$ wyznacznik ten jest równy:

$$\begin{vmatrix} c_{12}-J_1\nu^2, & -c_{12}, & 0 \\ -c_{12}, & c_{12}+c_{23}-J_2\nu^2, & -c_{23} \\ 0, & -c_{23}, & c_{23}-J_3\nu^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

Po obliczeniu tego wyznacznika otrzymujemy równanie:

$$-J_1J_2J_3e_{12}e_{23}\nu^6+(J_1J_2e_{12}+J_1J_3e_{23}+J_1J_3e_{12}+J_2J_3e_{23})\nu^4+$$
$$-(J_1+J_2+J_3)\nu^2 = 0 \qquad (5)$$

gdzie:

$$e_{12} = \frac{1}{c_{12}}$$

$$e_{23} = \frac{1}{c_{23}}$$

są współczynnikami podatności.

Po uproszczeniu równanie (5) przyjmuje formę:

$$-J_1J_2J_3e_{12}e_{23}\nu^4+(J_1J_2e_{12}+J_1J_3e_{23}+J_1J_3e_{12}+J_2J_3e_{23})\nu^2+$$
$$-(J_1+J_2+J_3) = 0 \qquad (6)$$

Rozwiązując równanie (6) otrzymujemy dwa wyrażenia określające częstotliwości własne układu

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{J_1J_2e_{12} + J_1J_3e_{23} + J_1J_3e_{12} + J_2J_3e_{23} + \sqrt{\Delta}}{2\,J_1J_2J_3e_{12}e_{23}}}$$

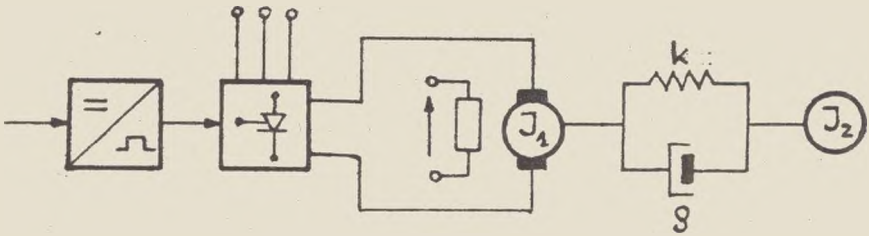
$$\nu_2 = \sqrt{\frac{J_1J_2e_{12} + J_1J_3e_{23} + J_1J_3e_{12} + J_2J_3e_{23} - \sqrt{\Delta}}{2\,J_1J_2J_3e_{12}e_{23}}} \qquad (7)$$

gdzie

$$\Delta = (J_1J_2e_{12}+J_1J_3e_{23}+J_1J_3e_{12}+J_2J_3e_{23})^2 - 4J_1J_2J_3e_{12}e_{23}(J_1+J_2+J_3)$$

4. SILNIK OBCOWZBUDNY WSPÓŁPRACUJĄCY Z MASZYNĄ ROBOCZĄ ZA POŚREDNICTWEM WAŁU SPRĘŻYSTEGO JAKO SYSTEM ŁAŃCUCHOWY

Rozpatrzmy układ napędowy przedstawiony na rys.2.



Rys.2. Schemat układu silnika i maszyny roboczej ze sprężystym wałem; k - współczynnik sprężystości, ϱ - współczynnik dyssypacji energii wynikającej z tarcia lepkiego

Niech przyjęte symbole posiadają następującą interpretację fizyczną: u_a, e_a, i_a - napięcie, sem, prąd twornika, R_a, L_a - parametry obwodu twornika, c - stała silnika J_1, J_2 - momenty bezwładności odpowiednio silnika i mechanizmu, $\mathfrak{M}_s$ - moment obciążenia zewnętrznego, $\mathfrak{M}$ - moment silnika, φ_1, φ_2 - kąty obrotu na początku i końcu wału pośredniczącego, ϱ - współczynnik tarcia lepkiego elementów wirujących, $\mathfrak{M}_{sp}$ - moment sprężystości wału, k - współczynnik sprężystości wału.

Pomijając wpływ tarcia lepkiego elementów wirujących na ruch układu równania dynamiki tego układu można zapisać w formie:

$$
\begin{aligned}
u_a &= R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_a \\
e_a &= c\,\dot{\varphi}_1 \\
J_1\,\ddot{\varphi}_1 &= \mathfrak{M} - k(\varphi_1 - \varphi_2) \\
J_2\,\ddot{\varphi}_2 &= k(\varphi_1 - \varphi_2) - \mathfrak{M}_s \\
\mathfrak{M} &= c\,i_a
\end{aligned}
\tag{8}
$$

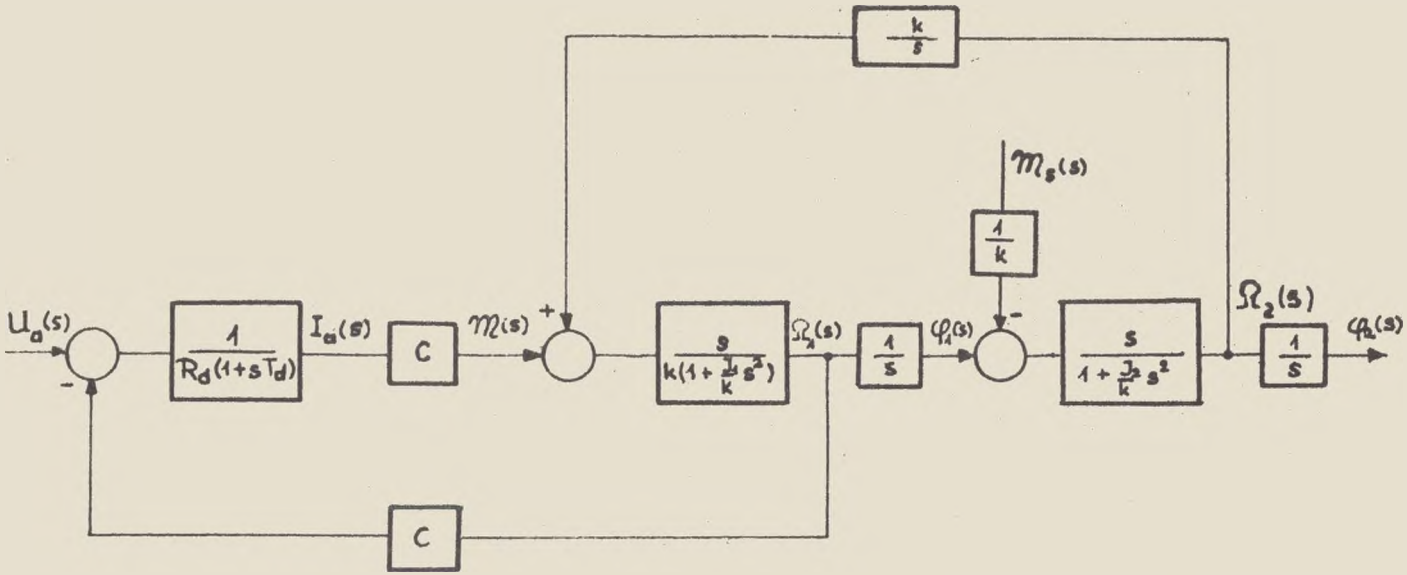
4.1. Model transmitacyjny

Układ równań (8) po transformacji Laplace'a przy zerowych warunkach początkowych przyjmie formę:

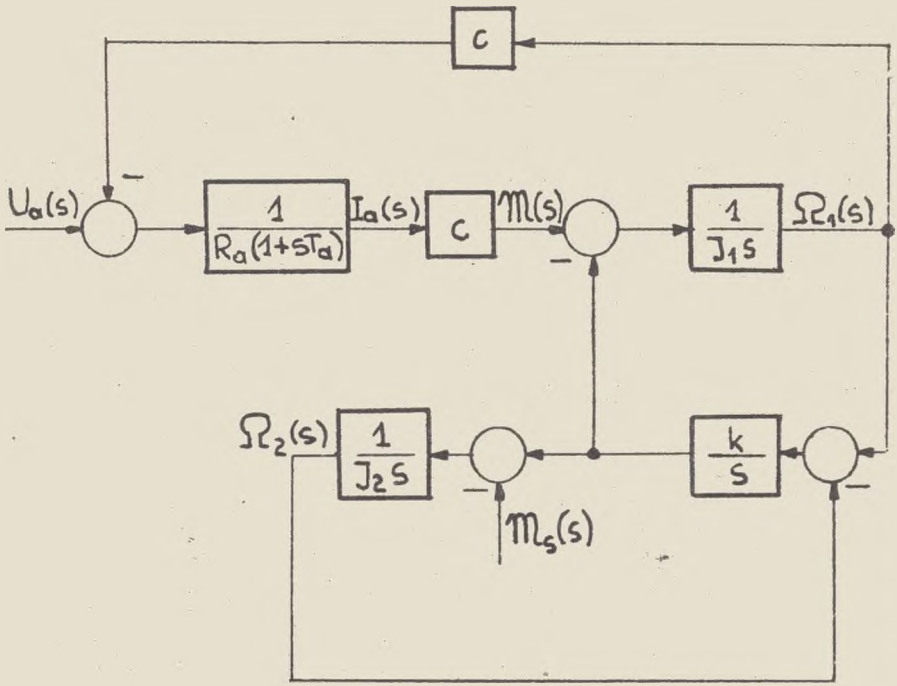
$$
\begin{aligned}
I_a(s) &= \frac{U_a(s) - c\,\Omega_1(s)}{R_a(1 + sT_a)} \\
\mathfrak{M}(s) &= c\,I_a(s) \\
\mathfrak{M}_{sp}(s) &= k\left[\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\right] \\
\Omega_1(s) &= s\,\varphi_1(s) \\
\Omega_2(s) &= s\,\varphi_2(s) \\
\Omega_1(s) &= \frac{1}{J_1 s}\left[\mathfrak{M}(s) - \mathfrak{M}_{sp}(s)\right] \\
\Omega_2(s) &= \frac{1}{J_2 s}\left[\mathfrak{M}_{sp}(s) - \mathfrak{M}_s(s)\right]
\end{aligned}
\tag{9}
$$

gdzie $T_a = \frac{L_a}{R_a}$ elektromagnetyczna stała czasowa silnika.

Układowi (9) odpowiadają równoważne schematy blokowe przedstawione na rys.3 a,b.



Rys.3a. Schemat blokowy systemu łańcuchowego silnik-maszyna robocza ze sprężystym wałem



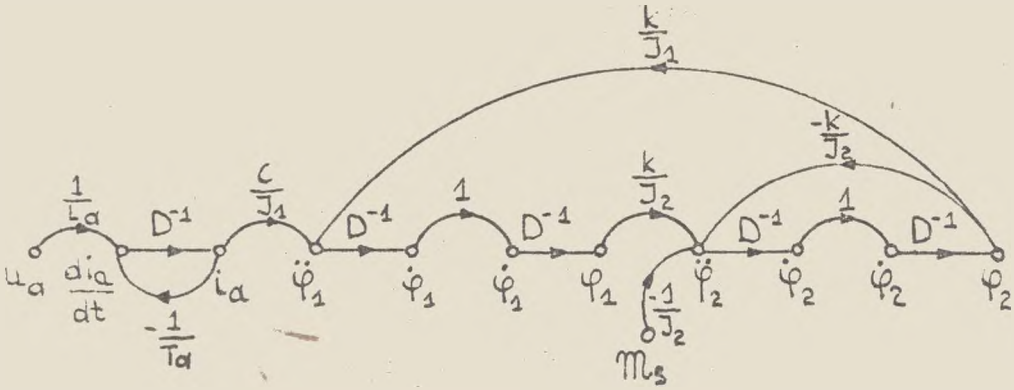
Rys.3b. Schemat blokowy systemu łańcuchowego silnik-maszyna robocza ze sprężystym wałem

4.2. Model w postaci grafu przepływu sygnałów

Układ równań (8) sprowadzamy do postaci:

$$\begin{aligned} \frac{di_a}{dt} &= -\frac{1}{T_a} i_a - \frac{c}{L_a} \dot{\varphi}_1 + \frac{1}{L_a} u_a \\ \ddot{\varphi}_1 &= \frac{c}{J_1} i_a - \frac{k}{J_1} \varphi_1 + \frac{k}{J_1} \varphi_2 \\ \ddot{\varphi}_2 &= \frac{k}{J_2} \varphi_1 - \frac{k}{J_2} \varphi_2 - \frac{1}{J_2} \mathfrak{M}_s \end{aligned} \tag{10}$$

Układowi (10) możemy przyporządkować graf przepływu sygnałów przedstawiony na rys.4.



Rys.4. Graf przepływu sygnału systemu łańcuchowego: silnik-maszyna robocza ze sprężystym wałem

4.3. Model w postaci grafu funkcyjnego

Modele tego typu stanowią źródło programów symulacyjnych niektórych języków symulacyjnych (GODYS-2, SESL). Podstawą grafu funkcyjnego jest opis matematyczny układu w postaci układu równań (10). W grafie funkcyjnym zmienne zależne i niezależne reprezentowane są przez wierzchołki [3]. Mnożenie przez stały czynnik oraz inne operacje matematyczne reprezentowane są przez krawędzie. Wyróżnia się wierzchołki spływowe i źródłowe oraz krawędzie niefunkcyjne i funkcyjne. Wierzchołkom spływowym przyporządkowana jest operacja sumowania. Wierzchołki źródłowe stanowią punkty poboru informacji i wejścia układu.

Krawędź niefunkcyjna jest to linia łącząca dwa wierzchołki z zaznaczonym przez strzałkę kierunkiem. Krawędź ta posiada określony współczynnik wzmocnienia, który posiada wartość stałą i oznaczony jest symbolem przypisanym krawędzi. Krawędź funkcyjna jest to obiekt geometryczny zorientowany, reprezentujący pewną zależność funkcyjną (całkowanie, sumowanie, mnożenie, zależności nieliniowe itp.).

Wierzchołek, który posiada tylko krawędzie odchodzące, nazywamy źródłowym, natomiast wierzchołek posiadający tylko krawędzie dochodzące - spływowym. Krawędzie funkcyjne numeruje się w dowolnej kolejności rozpoczynając od nu-

meru 3. Numery 1 i 2 są standardowo przypisane indywidualnym wierzchołkom źródłowym.

Współczynniki wzmocnienia krawędzi funkcyjnych zapisywane są z kropką dziesiętną.

Graf funkcyjny rozpatrywanego układu napędowego opisanego przez układ równań (10) przedstawia rys.5.

Przykładowe rozwiązanie układu równań (10) z zastosowaniem grafu według rys.5 do programu w języku symulacyjnym SESL przedstawia rys.6.

4.4. Częstotliwość własna silnika obcowzbudnego współpracującego z maszyną roboczą za pośrednictwem sprężystego wału

Wykorzystamy wyniki rozważań punktu 3 do określenia częstotliwości własnej systemu łańcuchowego: silnik - maszyna robocza ze sprężystym wałem. W rozpatrywanym przypadku mamy dwie masy bezwładne połączone liniowym elementem sprężystym o współczynniku sprężystości równym $k = c_{12}$. Wyznacznik (3) przyjmie w rozpatrywanym przypadku formę:

$$\begin{vmatrix} k - J_1 \nu^2 , & -k \\ -k & k - J_2 \nu^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (11)$$

Po obliczeniu tego wyznacznika otrzymujemy równanie dla określenia częstotliwości własnych układu w formie:

$$J_1 J_2 e \nu^4 - (J_1 + J_2) \nu^2 = 0 \qquad (12)$$

gdzie:

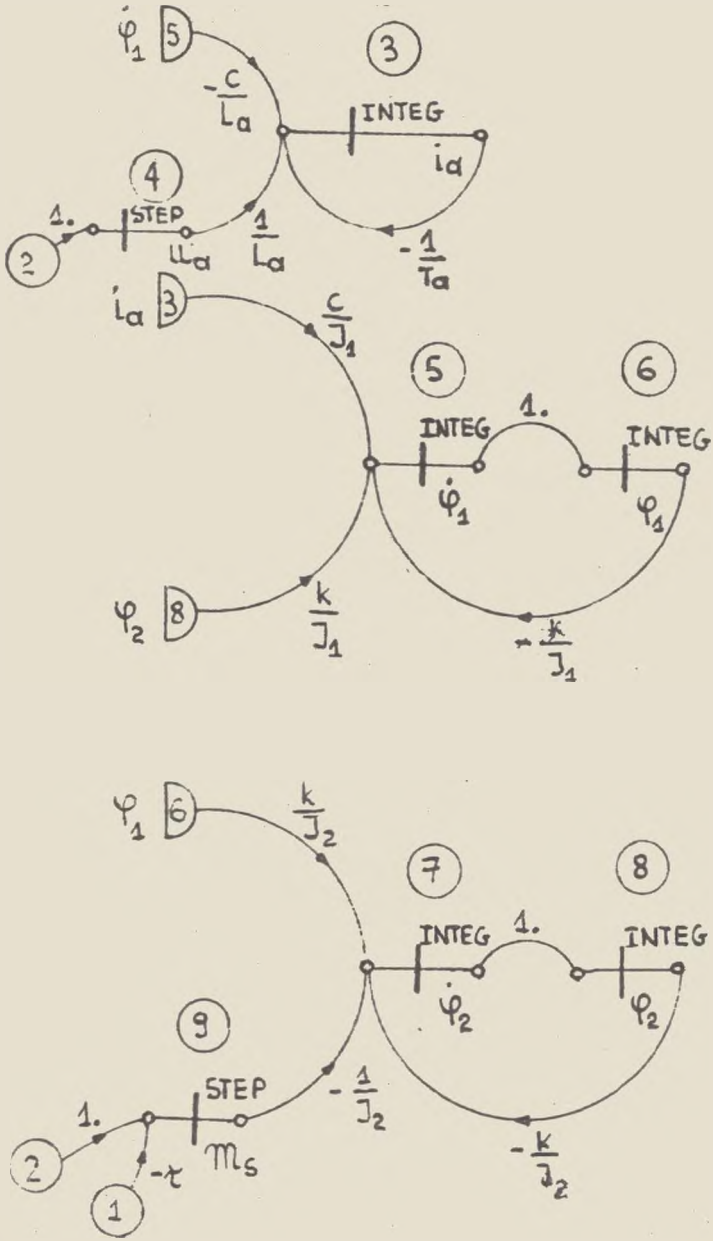
$e = \frac{1}{k}$ - współczynnik podatności sprężystego wału.

Po uproszczeniu równanie (12) przyjmie formę:

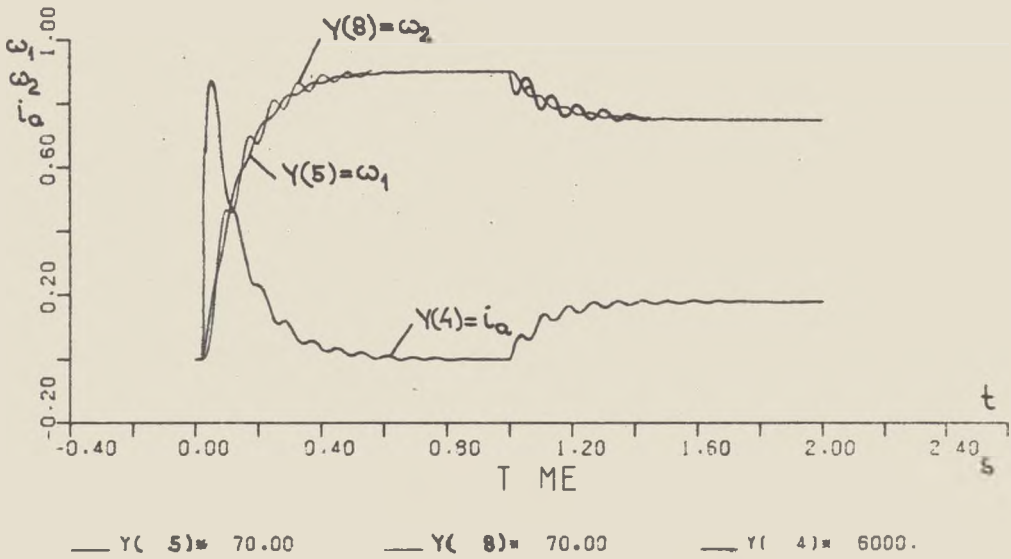
$$J_1 J_2 e \nu^2 = J_1 + J_2 \qquad (13)$$

Zatem częstotliwość własna rozpatrywanego systemu jest równa:

$$\nu = \sqrt{\frac{J_1 + J_2}{e J_1 J_2}} \qquad (14)$$



Rys.5. Graf funkcyjny systemu łańcuchowego: silnik - maszyna robocza ze sprężystym wałem



Rys.6. Przebiegi: $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $i_a(t)$ układu napędowego: silnik-maszyna robocza, połączone sprężystym wałem

4.5. Zachowanie się układu sprężystego w warunkach obciążenia harmonicznego

Rozpatrzmy zachowanie się układu napędowego z liniowym wałem sprężystym - rys.1 (ograniczając się dla prostoty do wymiaru $k = 2$), w warunkach obciążenia układu momentem zredukowanym o postaci przebiegu harmonicznego o wartości średniej $\mathfrak{M}_0$ i amplitudzie $\Delta\mathfrak{M}_s$:

$$\mathfrak{M}_s = \mathfrak{M}_0 + \Delta\mathfrak{M}_s \sin\omega t$$

Załóżmy, że przy dostatecznie dużej mocy silnika i dużej wartości J_1 prędkość kątową jego wirnika $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$ można uznać za stałą. Wówczas drugie równanie z przedstawionego układu równań (1) jest niezależne od pierwszego i może być

rozwiązane niezależnie. Wybierzmy za współrzędną uogólnioną:

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \tag{15}$$

Wówczas

$$J_2 \ddot{\varphi} + c_{12} \varphi = \mathfrak{M}_s \tag{16}$$

Stosując zamianę współrzędnych określoną następująco:

$$\varphi = \xi + \frac{\mathfrak{M}_0}{c_{12}}$$

można równanie (16) przedstawić w formie:

$$\ddot{\xi}(t) + \nu^2 \xi(t) = \frac{\Delta \mathfrak{M}_s}{J_2} \sin \omega t \tag{17}$$

gdzie $\nu^2 = \frac{c_{12}}{J_2}$ jest kwadratem częstotliwości własnej układu.

Jeśli $\omega \neq \nu$ rozwiązanie równania (17) jest opisane funkcją:

$$\xi(t) = \xi_0 \cos \nu t + \frac{1}{\nu} \dot{\xi}_0 \sin \nu t - \frac{\Delta \mathfrak{M}_s \omega}{J_2 \nu (\nu^2 - \omega^2)} \sin \nu t + \frac{\Delta \mathfrak{M}_s}{J_2 (\nu^2 - \omega^2)} \sin \omega t \tag{18}$$

$$\xi_0 = \xi(0)$$

Pierwsze dwie składowe opisują drgania swobodne układu z częstotliwością ν. Trzecia składowa opisuje drgania harmoniczne o częstotliwości ν i amplitudzie zależnej od momentu. Czwarta składowa opisuje drgania wymuszone o częstotliwości ω i amplitudzie

$$\frac{\Delta \mathfrak{M}_s}{J_2 (\nu^2 - \omega^2)}$$

Przy $\omega < \nu$ faza drgań wymuszonych jest równa fazie ωt momentu. Przy $\omega > \nu$ czwarta składowa w wyrażeniu (18) powinna mieć postać:

$$\frac{\Delta \mathfrak{M}_s}{J_2 (\omega^2 - \nu^2)} \sin(\omega t + \pi)$$

tj. faza drgań wymuszonych jest przeciwna do fazy momentu wymuszającego. Stąd wynika, że amplituda swobodnych drgań zmiennej ξ przy dowolnych relacjach ω i ϑ określona jest:

$$A = \frac{\Delta \mathfrak{M}_s}{J_2 \, |\vartheta^2 - \omega^2|}$$

D e f i n i c j a

Stosunek D amplitudy $\Delta \mathfrak{M}_s$ składowej harmonicznej momentu do amplitudy A nazywamy sprężystością dynamiczną. Zatem

$$D = \frac{\Delta \mathfrak{M}_s}{A} = J_2 \, |\vartheta^2 - \omega^2|$$

D e f i n i c j a

Odwrotność sprężystości dynamicznej nazywamy podatnością dynamiczną.

Amplituda A wzrasta w miarę gdy ω momentu wymuszającego przybliża się do częstotliwości własnej ϑ.

Rozpatrzmy stan rezonansowy układu $(\omega = \vartheta)$.

Przy $\omega = \vartheta$ równanie różniczkowe (17) można przedstawić w formie:

$$\ddot{\xi}(t) + \vartheta^2 \xi(t) = \frac{\Delta \mathfrak{M}_s}{J_2} \sin \vartheta t \qquad (19)$$

Rozwiązanie tego równania przyjmuje postać:

$$\xi(t) = \xi_0 \cos \vartheta t + \dot{\xi}_0 \frac{1}{\vartheta} \sin \vartheta t + \frac{\Delta \mathfrak{M}_s}{2 J_2 \vartheta^2} \sin \vartheta t + - \frac{\Delta \mathfrak{M}_s t}{2 J_2 \vartheta} \cos \vartheta t \qquad (20)$$

tj. w odróżnieniu od rozwiązania przy $\omega \neq \vartheta$ składnik wyrażający drgania wymuszone posiadałby amplitudę wzrastającą w czasie, gdyby w układzie nie wystąpił opór tarcia.

LITERATURA

1. Lewitskij N.I., Teorija mechanizmow i maszin. Izd. "Nauka", Moskwa 1979.

2. Szklarski L., Jaracz K., Wybrane zagadnienia dynamiki napędów elektrycznych prądu stałego. WN AGH, Kraków 1981.
3. Jakubowski R., Król J., Użytkowanie języka symulacyjnego bazującego na grafach funkcyjnych. Podstawy sterowania, t.2, z.1, s.47-70.

MODELS AND EINGENFREQUENCY OF CHAIN SYSTEM WITH ELASTIC ELEMENTS

Summary

In research of dynamic systems great influence has take a care on elastic of mechanical transfer elements. This paper presented same analysis of simple model of elastic intermediate shaft in transfer rotative moment.