ANDRZEJ MACH

Sur les décompositions invariantes du demi-groupe du groupe abélien linéairement ordonné

Soit $(G,+,\leqslant)$ un groupe abélien, linéairement ordonné. Par G^+ désignons le demi-groupe de ces éléments non-négatifs.

Nous parlons qu'une famille des ensembles $\{E_k\}_{k\in K}$ forme une décomposition invariante du demi-groupe G^+, si

A) $$\bigwedge_{k\in K}(E_k \neq \emptyset) \quad \text{et} \quad G^+ = \bigcup_{k\in K} E_k,$$

B) $$\bigwedge_{\substack{k,l\in K\\ k\neq l}} E_k \cap E_l = \emptyset,$$

C) $$\bigwedge_{k\in K}\ \bigwedge_{x\in G^+}\ \bigvee_{l\in K}(E_k + x \subseteq E_l\ .$$

Dans le cas, si le groupe G est archimédien, toutes les décompositions invariantes du demi-groupe G^+ ont été données par Z. Moszner dans [3] et chaque d'elles est de la forme suivante:

1) il existe un intervalle $[0,x_0| \subset G^+$, droitement fermé ou non, dont chaque élément forme une composante de la décomposition considerée (il peut se passer aussi, que $[0,x_0| = \emptyset$),

2) les autres composantes de la décomposition considerée, conclues dans $G^+ - [0,x_0|$, ces sont les restrictions à l'ensemble $G^+ - [0,x_0|$ des classes d'équivalence du groupe G par rapport à un sous-groupe G^*.

Dans [3] sont donnés aussi les exemples des décompositions invariantes du demi-groupe G^+ dans le cas si G n'est pas archimédien, lesquelles ne sont pas de la forme mentionnée ci-dessus.

Nous présenterons d'abord les remarques, qui permettront - profitant des décompositions invariantes du demi-groupe dans le cas archimédien - de donner encore les autres exemples des décompositions invariantes du demi-groupe G^+ pour le groupe G non-archimédien. Puis, nous decrirons toutes les décompositions invariantes du demi-groupe G^+.

Soit Z le sous-groupe convexe et non-trivial du groupe G.

R e m a r q u e 1. Les classes d'équivalence $\{Z+x\}_{x \in G}$ sont des ensembles convexes.

En effet. Prenons un élément arbitraire x de G. Si $z_1, z_2 \in Z$ et $a \in G$ ainsi que $z_1+x \leqslant a \leqslant z_2+x$, donc

$$z_1 \leqslant a - x \leqslant z_2$$

et de la convexité du sous-groupe Z nous avons $a-x \in Z$ et alors $a \in Z+x$.

R e m a r q u e 2. Nous pouvons définir dans le groupe quotient G/Z la relation "$\preceq$", donnant l'ordre linéaire, comme suit:

$$Z + x \preceq Z + y \Longleftrightarrow [Z + x = Z + y \vee (Z + x \neq Z + y \wedge x < y)].$$

Il résulte de la convexité du sous-groupe Z que la relation "$\preceq$" est bien définie. En effet. Supposons qu'un élément de la classe d'équivalence $Z+x$, par exemple z_1+x est plus petit qu'un élément z_2+y de l'autre classe d'équivalence $Z+y$. Soit z_3+x un élément arbitraire de la classe d'équivalence $Z+x$. S'il existerait un élément z_4+y appartenant à $Z+y$ et tel que $z_3+x > z_4+y$ donc d'après susdit nous aurions

$$z_3 - z_4 > y - x > z_1 - z_2$$

et d'après la convexité de Z nous obtenons $y-x \in Z$, donc la contradiction.

La réflexivité de la relation "$\preceq$" est évidente. Nous démontrerons que la relation "$\preceq$" est antisymétrique. Soit $Z+x \preceq Z+y$ et $Z+y \preceq Z+x$. Supposons que $Z+x \neq Z+y$. De la définition de la relation "$\preceq$" nous avons $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, et puisque la relation "$\leqslant$" est antisymétrique, donc $x = y$, alors $Z+x = Z+y$, donc la contradiction.

Nous démontrerons la transitivité de la relation "$\preceq$". Soit $Z+x \preceq Z+y$ et $Z+y \preceq Z+t$. Si $Z+x = Z+y$ ou $Z+y = Z+t$

nous avons évidemment $Z+x \preceq Z+t$. Dans le cas contraire nous avons de la définition de la relation "$\preceq$"

$$x \leqslant y \quad \text{et} \quad y \leqslant t$$

et puisque la relation "$\leqslant$" est transitive, donc $x \leqslant t$, et alors $Z+x \preceq Z+t$.

La remarque 2 est donc démontrée, puisque la connexité de la relation "$\preceq$" résulte automatiquement de la définition "$\preceq$" et de la connexité de la relation "$\leqslant$".

Désignons par "$\oplus$" l'addition des classes d'équivalence.

Supposons supplémentairement qu'il n'existe pas le sous-groupe convexe et non-trivial du groupe G différent de Z et concluant Z, et alors Z est le maximum (dans le sens l'inclusion) dans l'ensemble des sous-groupes convexes et non-triviaux du groupe G.

R e m a r q u e 3. Le groupe $(G/Z, \oplus, \preceq)$ est archimédien.

Pour montrer cela nous démontrerons qu'il n'existe pas le sous-groupe convexe et non-trivial du groupe G/Z. Supposons, par "reductio ad absurdum", que B soit tel sous-groupe. Alors, $Z_1 := \varphi^{-1}(B)$, où $\varphi: G \rightarrow G/Z$ est un homomorphisme naturel, est le sous-groupe du groupe G concluant Z et différent de Z et de G. Il suffit maintenant démontrer que Z_1 est convexe, puisque ce fait contradit la supposition que Z est le maximum susdit. Soit donc $z_1, z_2 \in Z_1$ et soit $x \in G$. Supposons que $z_1 < x < z_2$.

Puisque l'homomorphisme φ est monotonique, cela veut dire

$$x \leqslant y \Longrightarrow \varphi(x) \preceq \varphi(y)$$

alors de susdit

$$\varphi(z_1) \preceq \varphi(x) \preceq \varphi(z_2)$$

Puisque $\varphi(z_1), \varphi(z_2) \in B$ et B est convexe, donc $\varphi(x) \in B$ et de là $x \in Z_1 = \varphi^{-1}(B)$, et alors Z_1 est convexe.

Désignons par $(G/Z)^+$ le demi-groupe des éléments non-négatifs du groupe G/Z.

R e m a r q u e 4. Si $\{\tilde{E}_k\}_{k \in K}$ est une décomposition invariante du demi-groupe $(G/Z)^+$, donc $\{E_k := \varphi^{-1}(\tilde{E}_k) \cap G^+\}_{k \in K}$, où $\varphi : G \to G/Z$ est l'homomorphisme naturel, est la décomposition invariante du demi-groupe G^+.

Nous démontrerons seulement la condition C) dans la définition de la décomposition invariante, car A) et B) sont évidentes. Prenons arbitraire $k \in K$ et $x \in G^+$. Nous avons

$$\varphi(E_k + x) = \varphi(E_k) \oplus \varphi(x) = \varphi(\varphi^{-1}(\tilde{E}_k) \cap G^+) \oplus \varphi(x) \subseteq$$
$$\subseteq (\tilde{E}_k \cap (G/Z)^+) \oplus \varphi(x) = \tilde{E}_k \oplus \varphi(x).$$

Puisque la décomposition $\{\tilde{E}_k\}_{k \in K}$ est invariante, donc il existe $l \in K$ tel que

$$\tilde{E}_k \oplus \varphi(x) \subseteq \tilde{E}_l$$

De susdit

$$\varphi(E_k + x) \subseteq \tilde{E}_l$$

De là

$$E_k + x \subseteq \varphi^{-1}(\breve{E}_l),$$

et car $E_k + x$ est évidemment conclue dans G^+ nous obtenons

$$E_k + x \subseteq \varphi^{-1}(\breve{E}_l) \cap G^+ = E_l,$$

ce qui démontre que la décomposition $\{E_k\}_{k \in K}$ est invariante.

Profitant de la dernière remarque nous donnerons les exemples des décomposition invariantes du demi-groupe G^+. Soit $(\mathbb{C},+)$ désigne le groupe des nombres entiers. Soit $G := \{ax+b: a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}\}$ le groupe des polynômes avec l'addition simple. Nous définissons l'ordre dans G comme suit:

$$(ax + b < cx + d) \Longleftrightarrow (a < c) \vee (a = c \wedge b < d).$$

Le demi-groupe des éléments non-négatifs

$$G^+ = \{ax + b: a > 0, b \in \mathbb{C}\} \cup \mathbb{C}^+.$$

Nous pouvons présenter le groupe $G/\mathbb{C}$ comme ci-dessous:

$$\ldots \propto \mathbb{C} - 2x \propto \mathbb{C} - x \propto \underbrace{\mathbb{C} \propto \mathbb{C} + x \propto \mathbb{C} + 2x \propto \mathbb{C} + 3x \propto \ldots}_{(G/C)^+}$$

En prenant maintenant une arbitraire décomposition invariante $\{\tilde{E}_k\}_{k \in K}$ du demi-groupe $(G/\mathbb{C})^+$ (comme le demi-groupe du groupe archimédien $G/\mathbb{C}$) nous obtiendrons une décomposition invariante $\{E_k := \varphi^{-1}(\tilde{E}_k) \cap G^+\}_{k \in K}$ du demi-groupe G^+. Par exemple prenant une décomposition invariante du demi-groupe $(G/\mathbb{C})^+$

(I) $\tilde{E}_1 := \{\mathbb{C}\}$, $\tilde{E}_2 := \{\mathbb{C} + x, \mathbb{C} + 2x, \mathbb{C} + 3x, \ldots\}$

nous obtiendrons une décomposition invariante du demi-groupe G^+comme suit:

$$E_1 = \mathbb{C}^+, \qquad E_2 = (G \setminus \mathbb{C}) \cap G^+.$$

Si nous prenons une autre décomposition du demi-groupe $(G/\mathbb{C})^+$ par exemple

(II) $\tilde{E}_1 := \{\mathbb{C}\}$, $\tilde{E}_2 := \{\mathbb{C}+x\}$, $\tilde{E}_3 := \{\mathbb{C}+2x, \mathbb{C}+4x, \mathbb{C}+6x, \ldots\}$

$$\tilde{E}_4 := \{\mathbb{C}+3x, \mathbb{C}+5x, \mathbb{C}+7x, \ldots\}.$$

donc nous obtiendrons une décomposition invariante du demi-groupe G^+comme ci-dessous:

$$E_1 = \varphi^{-1}(\tilde{E}_1) \cap G^+ = \mathbb{C}^+ = \{0,1,2,3,4,\ldots\},$$

$$E_2 = \varphi^{-1}(\tilde{E}_2) \cap G^+ = \mathbb{C}+x = \{\ldots,x-2,x-1,x,x+1,x+2,\ldots\},$$

$$E_3 = \varphi^{-1}(E_3) \cap G^+ = (\mathbb{C}+2x) \cup (\mathbb{C}+4x) \cup (\mathbb{C}+6x) \cup \ldots =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \ldots,2x-2,2x-1,2x,2x+1,2x+2,\ldots \\ \ldots,4x-2,4x-1,4x,4x+1,4x+2,\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right\},$$

$$E_4 = \varphi^{-1}(\tilde{E}_4) \cap G^+ = (\mathbb{C}+3x) \cup (\mathbb{C}+5x) \cup (\mathbb{C}+7x) \cup \ldots =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \ldots,3x-2,3x-1,3x,3x+1,3x+2,\ldots \\ \ldots,5x-2,5x-1,5x,5x+1,5x+2,\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right\}.$$

Nous passons après ces exemples à la description de toutes les décomposition invariantes du demi-groupe G^+ des elements non-négatifs du groupe abélien G, linéairement ordonné et non-nécessairement archimédien. Nous présenterons la construction des décompositions dans le théorème 1. Avant, nous donnerons quelques définitions.

DEFINITION 1. Nous parlons que le sous-groupe G_1 du groupe G est de la sorte (n) ou convenablement de la sorte (o), si:

$$(n) \qquad \bigwedge_{x \in G^+} \bigvee_{z \in G_1} x \leqslant z,$$

$$(o) \qquad \bigvee_{x \in G^+} \bigwedge_{z \in G_1} z < x.$$

La sorte (n) désigne évidemment le sous-groupe non-majoré et la sorte (o) -le sous-groupe majoré. On peut facilement remarquer que la majorité ou la non-majorité implique convenablement la minorité ou la non-minorité. C'est pouquoi nous parlerons que G_1 est non-borné ou G_1 est borné et noter cela: $G_1 \in (n)$ ou $G_1 \in (o)$.

DEFINITION 2. L'intervalle final d'une classe d'équivalence W d'un groupe par rapport à un sous-groupe c'est l'ensemble $A \subseteq W$ tel que

$$\bigwedge_{x \in A} \{y \in W\colon y \geqslant x\} \subseteq A.$$

DEFINITION 3. Le sous-ensemble A de G^+ nous appelons l'intervalle initial dans G^+, si:

$$\bigwedge_{x_0 \in A} \{x \in G^+\colon x \leqslant x_0\} \subseteq A.$$

Par exemple, un arbitraire intervalle $[0,\bar{x}|$ droitement fermé ou non est un intervalle initial dans G^+ ainsi que chaque l'ensemble $Z \cap G^+$, où Z est un convexe sous-groupe du groupe G.

THEOREME 1. Toutes les décompositions invariantes et seulement telles, du demi-groupe G^+ des éléments non-négatifs du groupe G linéairement ordonné et abélien, nous obtenons par la construction (K) ci-dessous:

1° Prenons une famille $\{G_s\}_{s \in S}$ des sous-groupes du groupe G formant la chaîne et telle que:

a) $\bigwedge\limits_{s \in S} G_s \in (o)$,

b) $\bigwedge\limits_{\substack{s,t \in S \\ s \neq t}} G_s \neq G_t$,

et un sous-groupe G^* de la sorte (n) et tel que:

$$G^* \supseteq \bigcup_{s \in S} G_s.$$

2° Prenons une fonction Φ de la famille $\{G_s\}_{s \in S}$ à une famille des intervalles initiaux dans G^+ et telle que:

a) $\Phi(G_s)$ est un intervalle étant la somme des restrictions à G^+ des classes d'équivalence du groupe G par rapport au sous-groupe $Z(G_s)$, où $Z(G_s)$ désigne le plus petit sous-groupe convexe et concluant G_s,

b) si $G_s \subset G_t$, donc $\Phi(G_s) \subset \Phi(G_t$.

3° Chaque l'ensemble non-vide

$$W \cap [\Phi(G_s) \setminus \bigcup_{G_t \supsetneq G_s} \Phi(G_t)], \text{ pour } W \in G/G_s \text{ et } s \in S$$

est une composante.

4° Les autres composantes ces sont les ensembles

$$V \cap [G^+ \setminus \bigcup_{s \in S} \Phi(G_s)]; \text{ pour } V \in G/G^*.$$

Nous prouverons avant de la démonstration du théorème 1 quelques lemmes et caractériserons les décompositions invariantes du demi-groupe G^+, en comparant les avec le cas du groupe G archimédien.

Soit maintenant $\{E_k\}_{k\in K}$ une arbitraire décomposition invariante du demi-groupe G^+. Soit E_{k_o} cette composante de la décomposition $\{E_k\}_{k\in K}$ à laquelle appartient zéro. Désignons

$$-E_{k_o} := \{x: -x \in E_{k_o}\}$$

Soit

$$G^o := E_{k_o} \cup (-E_{k_o}).$$

LEMME 1. G^o est le sous-groupe du groupe G.

Démonstration du lemme 1. Évidemment $0 \in G^o$. Soit $x,y \in G^o$. Nous démontrerons que $x-y \in G^o$ dans toutes les cas possibles.

1) Si $x,y \in E_{k_o}$, donc:

a) si $x-y \in G^+$ et $x-y \in E_k$, donc

$$E_{k_o} + x - y \subseteq E_k \quad (\text{car } 0 \in E_{k_o}),$$

et de là, vu que $y \in E_{k_o}$, nous obtenons $x \in E_k$, c'est pourquoi $E_k = E_{k_o}$ alors $x-y \in E_{k_o} \subset G^o$,

b) si $y-x \in G^+$ et $y-x \in E_k$, donc similairement nous démontrerons que $E_k = E_{k_o}$, et de là $x-y \in G^o$.

2) Si $x \in E_{k_o}$ et $-y \in E_{k_o}$, donc nous avons

$$E_{k_o} + x \subseteq E_{k_o} \quad \text{et} \quad E_{k_o} - y \subseteq E_{k_o}$$

et de là $E_{k_0} + x - y \subseteq E_{k_0}$, alors $x - y \in E_{k_0} \subset G^0$.

3) Si $-x \in E_{k_0}$ et $y \in E_{k_0}$, donc similairement

$$E_{k_0} + y \subseteq E_{k_0} \quad \text{et} \quad E_{k_0} - x \subseteq E_{k_0}$$

et de là $E_{k_0} + y - x \subseteq E_{k_0}$, alors $y - x \in E_{k_0}$, et de là $x - y \in G^0$.

4) Si $-x \in E_{k_0}$ et $-y \in E_{k_0}$, donc:

a) si $x - y \in G^+$, donc $E_{k_0} + x - y \subseteq E_{k_0}$, et de là $x - y \in E_{k_0} \subset G^0$,

b) si $y - x \in G^+$, donc similairement $E_{k_0} + y - x \subseteq E_{k_0}$, et de là $y - x \in E_{k_0}$ alors $x - y \in G^0$.

La démonstration du lemme 1 est donc finie.

LEMME 2. La restriction à l'ensemble G^+ de chaque classe d'équivalence du groupe G par rapport au sous-groupe G^0 est contenue dans une composante E_k.

Démonstration du lemme 2. Soit $x, y \in G^+$ et x, y appartiennent à la même classe d'équivalence du groupe G par rapport à G^0. Suppons que $y - x \in G^0 \cap G^+ = E_{k_0}$. Dans le cas contraire, si $x - y \in G^0 \cap G^+ = E_{k_0}$ nous raisonnerions analogiquement. Soit E_k cette composante de la décomposition $\{E_k\}_{k \in K}$ à laquelle appartient x. Puisque $x \in E_{k_0} + x$ donc $E_{k_0} + x \subseteq E_k$. Mais, vu que $y - x \in E_{k_0}$, nous obtenons $y \in E_k$.

Il résulte du lemme 2 que chaque composante E_k est la somme des restrictions à G^+ des classes d'équivalence du groupe G par rapport à G^o. On peut dire aussi que la décomposition $\{E_k\}_{k \in K}$ est une somme-décomposition (voir [1]) de la décomposition aux restrictions des classes d'équivalence du groupe G par rapport à G^o.

LEMME 3. Chaque composante E_k est un intervalle final d'une classe d'équivalence du groupe G par rapport à un sous-groupe $G_k \supseteq G^o$.

Démonstration du lemme 3. Fixons k de K et définissons

$$G_k := \{y - x: \ y, x \in E_k\}.$$

Nous démontrerons que G_k est un sous-groupe du groupe G. Évidemment $0 \in G_k$. Prenons les éléments arbitraires $a, b \in G_k$ et montrons que $a - b \in G_k$. De la définition G_k nous avons

$$a = y - x \quad \text{et} \quad b = y_1 - x_1, \text{ où } \ y, x, y_1, x_1 \in E_k.$$

De là

$$a - b = y - x + x_1 - y_1.$$

Considérons les deux cas:

a) $x_1 \geqslant x$ et b) $x > x_1$.

Ad a). Désignons $c := y - x + x_1$ et $d := y_1$. Alors $a - b = c - d$. Puisque $E_k - x + x_1 \subseteq E_k$, vu que $x, x_1 \in E_k$, donc $c \in E_k$ et $d \in E_k$, et alors $a - b \in G_k$.

Ad b). Désignons $c := y$ et $d := y_1 - x_1 + x$. Similairement $a - b = c - d$. Puisque $E_k - x_1 + x \subseteq E_k$, donc $d \in E_k$ et $c \in E_k$, et alors $a - b \in G_k$. G_k est donc le sous-groupe du groupe G et d'après le lemme 2 évidemment $G_k \supseteq G^o$.

Il résulte de susdit que E_k est conclue dans une classe d'équivalence du groupe G par rapport à G_k. Pour prouver que E_k est l'intervalle final de cette classe nous démontrerons que:

si $x_1 \in E_k$ et $x_2 - x_1 \in G_k \cap G^+$, donc $x_2 \in E_k$. Supposons en utilisant "reductio ad absurdum" que $x_2 \in E_1 \neq E_k$. Nous avons $E_k + x_2 - x_1 \subseteq E_1$, car $x_1 \in E_k$. Puisque $x_2 - x_1 \in G_k$, donc ils existent $y, z \in E_k$, tels que $x_2 - x_1 = y - z$. De là $E_k + y - z \subseteq E_1$, et puisque $z \in E_k$, donc $y \in E_1 \neq E_k$, et alors la contradiction. Cela finit la preuve du lemme 3.

LEMME 4. Si le groupe G^o définié ci-dessus est de la sorte (n) donc les composantes de la décomposition $\{E_k\}_{k \in K}$ forment les restrictions à l'ensemble G^+ des classes d'équivalence du groupe G par rapport à G^o.

Démonstration du lemme 4. Prenons une composante E_k. Soit $x, y \in E_k$. Nous démontrerons que $x - y \in G^o$. De là et d'après le lemme 2 résultera déjà la thèse du lemme 4. Supposons que $x - y \in G^+$. Dans le cas contraire nous raisonnerions analogiquement. Il résulte du fait que $G^o \in (n)$ qu'il existe $z \in E_{k_o}$ (E_{k_o} est la composante à laquelle appartient zero) tel que $z \geqslant y$ et de là $z - y \in G^+$ et $x + z - y \in G^+$. Puisque $E_k + z - y \subseteq E_{k_o}$ (car $y \in E_k$), donc $x + z - y \in E_{k_o}$, et de là $E_{k_o} + x - y \subseteq E_{k_o}$. Vu que $0 \in E_{k_o}$ nous obtenons $x - y \in E_{k_o} \subset G^o$, c.q.f.d.

R e m a r q u e 5. Le lemme 4 est un équivalent du lemme 1 du travail [3] où on suppose que cette composante de la décomposition qui contient zéro posséde au moins les deux éléments. Ce fait, dans le cas du groupe archimédien, désigne évidemment que $G^o \in (n)$.

LEMME 5. Si $G^o \in (o)$ et $G^o \neq \{0\}$, donc G^o est un sous-groupe d'un sous-groupe convexe et non-trivial du groupe G.

Démonstration du lemme 5. Définissons

$$Z := \{c \in G: \bigvee_{z_1, z_2 \in G^o} z_1 \leqslant c \leqslant z_2\}.$$

Il suffit de démontrer que Z est un sous-groupe du groupe G car la convexité du groupe Z et le fait que Z contient G^o sont évidents et Z est sous-groupe non-trivial puisque $G^o \in (o)$. Soit donc $c_1, c_2 \in Z$. Ils existent donc des éléments $z_1, z_2, z_3, z_4 \in G^o$ tels que $z_1 \leqslant c_1 \leqslant z_2$ et $z_3 \leqslant c_2 \leqslant z_4$. De là $z_1 - c_2 \leqslant c_1 - c_2 \leqslant z_2 - c_2$ et puisque $z_1 - z_3 \geqslant z_1 - c_2 \geqslant z_1 - z_4$ ainsi que $z_2 - z_3 \geqslant$ $\geqslant z_2 - c_2 \geqslant z_2 - z_4$, donc $z_1 - z_4 \leqslant z_1 - c_2 \leqslant c_1 - c_2 \leqslant$ $\leqslant z_2 - c_2 \leqslant z_2 - z_3$, ce qui donne $c_1 - c_2 \in Z$, c.q.f.d.

LEMME 6. Si E_k est un intervalle final d'une classe d'équivalence du groupe G par rapport à G_k de la sorte (n), par contre E_l est un intervalle final d'une classe d'équivalence du groupe G par rapport à G_l de (o), donc:

$$\bigwedge_{\substack{x \in E_k \\ z \in E_l}} x > z.$$

Démonstration du lemme 6. S'il existerait $z \in E_1$ et $x \in E_k$ tels que $z \geqslant x$, donc $E_k + z - x \subsetneq E_1$. Nous aurions de là $G_k \subsetneq G_1$, ce qui est impossible, vu que des suppositions de G_k et G_1.

LEMME 7. Si les composantes E_k, E_1 sont les intervalles finals des classes d'équivalence du groupe G par rapport à G_k de (o) et G_1 de (o) convenablement et $G_k \neq G_1$, donc il est remplit une et seulement une des possibilités ci-dessous:

(i) $$\bigwedge_{\substack{z \in E_1 \\ x \in E_k}} z < x ,$$

(ii) $$\bigwedge_{\substack{z \in E_1 \\ x \in E_k}} x < z .$$

Démonstration du lemme 7. Supposons, pour la preuve par l'absurde, qu'il ne soient pas remplies (i) et (ii). Ils existent alors les elements $x_1, x_2 \in E_k$ et $z_1, z_2 \in E_1$, tels que $z_1 \geqslant x_1$ et $x_2 \geqslant z_2$. Considérons les cas suivants:

a) $z_1 \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant z_2$,

b) $z_1 \geqslant x_2 \geqslant x_1 \geqslant z_2$,

c) $z_1 \geqslant x_2 \geqslant z_2 \geqslant x_1$,

d) $x_2 \geqslant z_1 \geqslant z_2 \geqslant x_1$,

e) $x_2 \geqslant z_1 \geqslant x_1 \geqslant z_2$,

f) $x_2 \geqslant z_2 \geqslant z_1 \geqslant x_1$.

Ad a), b), c). Nous avons ici $z_1 \geqslant x_2 \geqslant z_2$. De là $z_1 - x_2$, $x_2 - z_2 \in G^+$ ainsi que $E_k + z_1 - x_2 \subseteq E_l$ et $E_l + x_2 - z_2 \subseteq E_k$, et de là $G_k \subseteq G_l$ et $G_l \subseteq G_k$ alors $G_k = G_l$, donc la contradiction.

Ad d), e), f). Nous avons ici $x_2 \geqslant z_1 \geqslant x_1$. De là $x_2 - z_1$, $z_1 - x_1 \in G^+$ ainsi que $E_l + x_2 - z_1 \subseteq E_k$ et $E_k + z_1 - x_1 \subseteq E_l$, et de là $G_l \subseteq G_k$ et $G_k \subseteq G_l$ alors $G_k = G_l$, donc la contradiction.

Cela finit la preuve du lemme 7.

LEMME 8. Si G_k, $G_l \in (o)$ et $G_k \subsetneq G_l$, donc

$$\bigwedge_{\substack{z \in E_l \\ x \in E_k}} x < z.$$

Démonstration du lemme 8. Supposons en utilisant "reductio ad absurdum" que la thèse ne soit pas vraie. De là, vu que $G_k \neq G_l$ il résulte du lemme 7, que

$$\bigwedge_{\substack{z \in E_l \\ x \in E_k}} z < x.$$

Nous avons de là, pour $z_1 \in E_l$ et $x_1 \in E_k$, $E_l + x_1 - z_1 \subseteq E_k$, ce qui donne $G_l \subseteq G_k$, alors la contradiction.

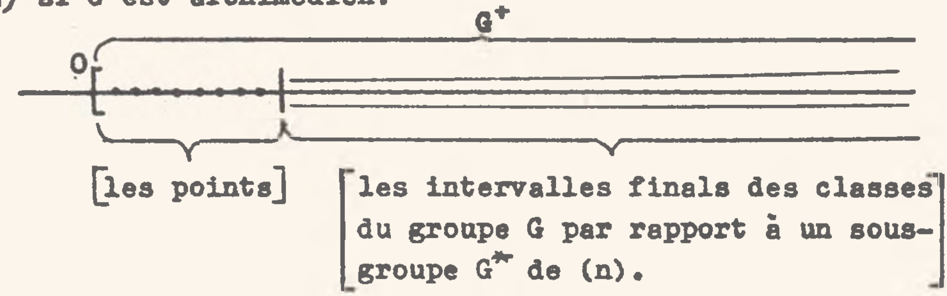
LEMME 9. Si G_k, $G_l \in (n)$, donc $G_k = G_l$.

Démonstration du lemme 9. Puisque G_k, $G_l \in (n)$, donc les classes d'équivalence du groupe G par rapport à G_k (ou à G_l) ne sont pas majorés. De là ne sont pas majorés les composantes E_k et E_l. Ils existent alors les éléments $x_1, x_2 \in E_k$ et $z_1, z_2 \in E_l$ tels que $x_1 > z_1$ et $z_2 > x_2$.

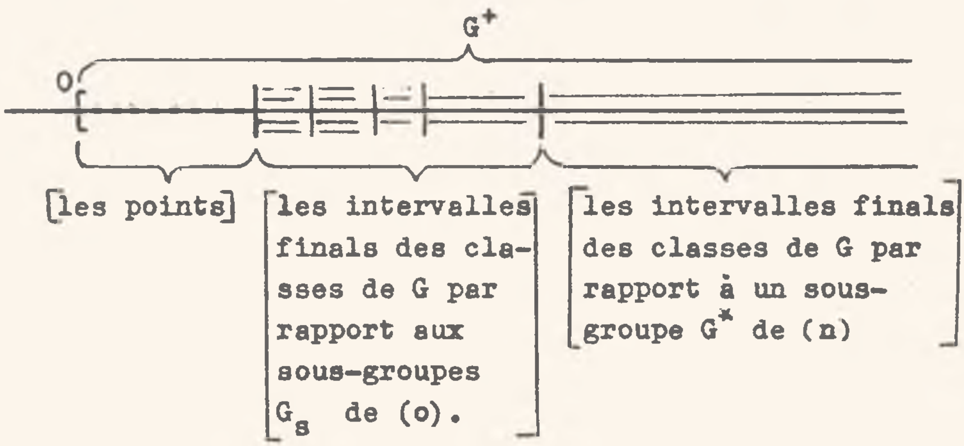
De là $E_1 + x_1 - z_1 \subseteq E_k$ et $E_k + z_2 - x_2 \subseteq E_1$, et de là $G_1 \subseteq G_k$ et $G_k \subseteq G_1$ alors $G_k = G_1$, c.q.f.d.

Nous pouvons sur la base des lemmes mentionnés ci-dessus déjà caractériser les décompositions invariantes du demi-groupe G^+. Les composantes, lesquelles sont les points, sont au commencement. Puis nous avons les composantes, lesquelles sont les intervalles finals des classes d'équivalence du groupe G par rapport aux sous-groupes $\{G_s\}_{s \in S}$ non-triviaux de la sorte (o) et formants la chaîne, et après, les composantes étants les intervalles finals des classes d'équivalence du groupe G par rapport à un sous-groupe G^* de la sorte (n) et tel que $G^* \supseteq \bigcup_{s \in S} G_s$. On peut se passer évidemment qu il n'existent pas les composantes, lesquelles sont les points. Dans le théorème 1 cela convient de la situation que la chaîne $\{G_s\}_{s \in S}$ ne commence pas de sous-groupe $\{0\}$. Également on peut se passer qu il n'existent pas les composantes, lesquelles sont les intervalles finals des classes d'équivalence du groupe G par rapport à un sous-groupe non-trivial de la sorte (o) ou de la sorte (n). On voit de cette description que les décompositions invariantes mentionnées ci-dessus contiennent les décompositions invariantes du demi-groupe des éléments non-négatifs du groupe archimédien, dans lequel il n'existent pas évidemment les sous-groupes non-triviaux de la sorte (o). On peut le présenter comme suit:

a) si G est archimédien:



b) si G est non-archimédien:



Démonstration du théorème 1. On voit que par la construction (K) nous obtenons les décompositions invariantes du demi-groupe G^+. Nous démontrerons alors seulement qu'on peut obtenir chaque décomposition invariante du demi-groupe G^+ par la construction (K). Soit $\{E_k\}_{k \in K}$ une arbitraire décomposition invariante du demi-groupe G^+. Considérons les deux cas:

(α) $G^0 = E_{k_0} \cup (-E_{k_0})$, où E_{k_0} est une composante à laquelle appartient zéro, est de la sorte (n),

(β) $G^0 \in$ (o).

Ad(α). En vertu du lemme 4 la décomposition $\{E_k\}_{k\in K}$ est une restriction à l'ensemble G^+ de la famille G/G^o. Dans ce cas la chaîne des sous-groupes de la sorte (o) dans la construction (K) est vide, similairement comme la fonction $\bar{\Phi}$. Nous acceptons par contre $G^* := G^o$. Toutes les composantes sont alors définiées dans le point 4^o de la construction (K), comme:

$$V \cap G^+ , \quad \text{pour} \quad V \in G/G^*.$$

Ad(β). Désignons par $\{G_s\}_{s\in S}$ la famille de toutes les sous-groupes différents et de la sorte (o), de l'ensemble $\{G_k\colon k\in K\}$, où G_k ce sont les sous-groupes définiés dans le lemme 3. Désignons par $\bar{E}_s$, pour arbitraire s de S, la somme de ces composantes E_k de la décomposition $\{E_k\}_{k\in K}$, lesquelles sont les intervalles finals des classes d'équivalence du groupe G par rapport à G_s. Nous démontrerons d'abord que l'ensemble $\bar{E}_s$, pour chaque s de S, est convexe et il est la somme des intervalles finals des classes d'équivalence du groupe G par rapport à $Z(G_s)$. Fixons s de S. Soit $x_1, x_2 \in \bar{E}_s$ et soit $x_1 < x_2$. Prenons un element c de G^+ et tel que $x_1 \leqslant c \leqslant x_2$. Supposons que $c \in E_l \in \{E_k\}_{k\in K}$. Prenons cette composante $E_k \subset \bar{E}_s$ à laquelle appartient x_1 ainsi que cette composante $E_m \subset \bar{E}_s$ à laquelle appartient x_2. Nous obtenons de susdit
$E_k + c - x_1 \subsetneq E_l$ et $E_l + x_2 - c \subsetneq E_m$ et de là $G_s \subsetneq G_l$ et $G_l \subsetneq G_s$, alors $G_l = G_s$. Cela veut dire $E_l \subset \bar{E}_s$. De là $c \in \bar{E}_s$. Nous avons donc démontré que l'ensemble $\bar{E}_s$ est

convexe. Pour prouver que $\bar{E}_s$ est la somme des intervalles finals des classes d'équivalence du groupe G par rapport à $Z(G_s)$, il suffit de démontrer que

$$(*) \qquad \bigwedge_{x \in \bar{E}_s} \; \bigwedge_{u \in Z(G_s) \cap G^+} (u + x \in \bar{E}_s),$$

puisque les classes d'équivalence du groupe G par rapport à $Z(G_s)$ sont convexes et $\bar{E}_s$ est convexe et nous avons de (*) que avec chaque élément x appartenant à $\bar{E}_s$, tous les éléments plus grand que x de la meme classe d'équivalence du groupe G par rapport à $Z(G_s)$ à laquelle appartient x, aussi appartiennent à $\bar{E}_s$.

Soit alors $u \in Z(G_s) \cap G^+$ et $x \in \bar{E}_s$ ainsi que $u + x \in E_1 \in \{E_k\}_{k \in K}$. Puisque $Z(G_s)$ est le plus petit sous-groupe convexe et concluant G_s, donc il existe un élément v de G_s tel que $v \geqslant u$. Soit E_k une composante telle que $x + v \in E_k$. Puisque $x \in \bar{E}_s$, $v \in G_s$ et $x + v \geqslant x$, donc il est évident que $E_k \subset \bar{E}_s$. De susdit $E_1 + v - u \subseteq E_k$, et de là $G_1 \subseteq G_s$. Il résulte de là que $G_1 \in (o)$ et vu que $u + x \geqslant x$ et $u + x \in E_1$, nous avons d'après le lemme 8 $G_1 = G_s$, et alors $E_1 \subset \bar{E}_s$, donc $u + x \in \bar{E}_s$.

Définissons, pour chaque s de S, l'intervalle initial dans G^+ comme suit:

$$P_s := \Big\{x \in G^+ : \bigvee_{y \in \bar{E}_s} x \leqslant y\Big\}.$$

Il résulte de susdit que chaque intervalle P_s est la somme des restrictions à G^+ des classes d'équivalence du groupe G par rapport à $Z(G_s)$.

Définissons la fonction Φ comme suit:

$$\bigwedge_{s \in S} \Phi(G_s) := P_s.$$

Nous démontrerons que les sous-groupes $\{G_s\}_{s \in S}$ forment la chaîne telle comme dans le point 1^o de la construction (K) et la fonction Φ a les propriétés telles comme dans le point 2^o de cette construction.

Le fait

$$\bigwedge_{s \in S} G_s \in (o)$$

est évident. Soit $s,t \in S$ et $s \neq t$. Soit $x_1 \in E_k \subset \overline{E}_s$ et $y \in E_l \subset \overline{E}_t$. Il résulte de la connexité de la relation "$\leqslant$", que $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$ et de là $E_k + y - x \subseteq E_l$ ou $E_l + x - y \subseteq E_k$, ce qui donne $G_s \subsetneq G_t$ ou $G_t \subsetneq G_s$. Les sous-groupes $\{G_s\}_{s \in S}$ forment donc la chaîne.

Le fait que chaque l'intervalle initial $P_s = \Phi(G_s)$, pour s de S, est la somme des restrictions à G^+ des classes d'équivalence du groupe G par rapport au sous-groupe $Z(G_s)$, nous avons remarqué plus tôt. On voit facilement, d'après le lemme 8, que la fonction Φ a la propriété 2^ob).

Supposons que $x \in E_l \subset \overline{E}_s$, pour un s de S, donc $x \in \Phi(G_s)$. Il n'est pas possible que $x \in \bigcup_{G_t \subsetneq G_s} \Phi(G_t)$, puisque dans le cas contraire nous aurions

$$\bigvee_{\substack{t \in S \\ y \in E_k \subset \overline{E}_t}} x \leqslant y \quad \text{et} \quad G_t \subsetneq G_s.$$

De là $E_l + y - x \subsetneq E_k$, alors $G_s \subseteq G_t$, donc la contradiction.

Nous avons alors que

$$\bigwedge_{s\in S} E_s \subsetneq \Phi(G_s) - \bigcup_{G_t \subsetneq G_s} \Phi(G_t).$$

Pour démontrer l'inclusion inverse supposons que $x\in\Phi(G_s)$ et $x\notin\Phi(G_t)$, pour chaque $G_t \subsetneq G_s$. De là

$$\bigvee_{y\in E_1\subset E_s} x \leqslant y$$

et alors si $x\in E_k\subset\Phi(G_k)$ et $E_k\not\subset E_s$, donc $E_k+y-x \subsetneq E_1$, et de là $G_k \subsetneq G_s$ et $x\in\Phi(G_k)$, ce qui contradit avec

$$x\notin \bigcup_{G_t\subsetneq G_s} \Phi(G_t).$$

Nous avons alors

$$\bigwedge_{s\in S} E_s = \Phi(G_s) - \bigcup_{G_t\subsetneq G_s} \Phi(G_s).$$

Nous démontrerons maintenant que

$$\bigwedge_{s\in S} \bigwedge_{E_k\subset E_s} \bigvee_{W\in G/G_k} (E_k = W\cap E_s).$$

Cela désignera que les composantes bornées sont telles comme dans le poin 3° de la construction (K). Fixons alors $s\in S$ ainsi que $E_k\subset E_s$. Nous savons d'après le lemme 3 que chaque E_k est l'intervalle final de la classe d'équivalence du groupe G par rapport à $G_k = G_s$. Il existe donc $W\in G/G_s$ tel que $E_k\subsetneq W$. Évidemment

$$\bigwedge_{\begin{pmatrix} E_1\subset E_s \\ E_1\neq E_k\end{pmatrix}} (W\cap E_1 = \emptyset),$$

et de là car $E_s = \bigcup_{G_1=G_s} E_1$ nous obtenons

$$W \cap \overline{E}_s = W \cap \bigcup_{G_l = G_s} E_l = \bigcup_{G_l = G_s} (W \cap E_l) = W \cap E_k = W.$$

Il résulte d'après le lemme 9 qu'il existent au plus un sous-groupe G^* de la sorte (n) appartenant à l'ensemble $\{G_k : k \in K\}$. Chaque composante non-bornée est alors un intervalle final d'une classe d'équivalence du groupe G par rapport à G^*. Il résulte du lemme 6 que si E_k est la composante non-bornée, donc

$$\bigwedge_{s \in S} \; \bigwedge_{x \in \overline{E}_s} \; \bigwedge_{y \in E_k} \; x < y.$$

et de là

$$\bigwedge_{s \in S} \; \bigwedge_{x \in E_l \subset \overline{E}_s} \; \bigwedge_{y \in E_k} \; E_l + y - x \subsetneq E_k,$$

et alors

$$\bigwedge_{s \in S} \; G_s \subsetneq G^*.$$

Nous avons donc

$$G^* \supsetneq \bigcup_{s \in S} G_s.$$

Nous démontrerons maintenant que chaque composante non-bornée est telle comme dans le point 4^0 de la construction (K). Soit donc E_k une composante arbitraire et non-bornée. Soit $V \in G/G^*$ ainsi que $E_k \subsetneq V$. Puisque

$$G^+ - \bigcup_{s \in S} \Phi(G_s) = \bigcup_{G_l = G^*} E_l,$$

donc vu que

$$\bigwedge_{\substack{E_l \neq E_k \\ G_l = G^*}} E_l \cap V = \emptyset ,$$

nous obtenons

$$V \cap (G^+ - \bigcup_{s \in S} \Phi(G_s)) = V \cap \bigcup_{G_1 = G^*} E_1 =$$

$$= \bigcup_{G_1 = G^*} (V \cap E_1) = V \cap E_k = E_k.$$

Cela finit la preuve du théorème 1.

Les exemples. Soit $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres entiers et $G = \{ax + b: a, b \in \mathbb{C}\}$ le groupe des polynômes défini déjà plus tôt. Prenons la chaîne des sous-groupes de la sorte (o), telle:

$\{0\} \subset \mathbb{C}$ ainsi que le sous-groupe $G^* = G$.

Définissons la fonction Φ :

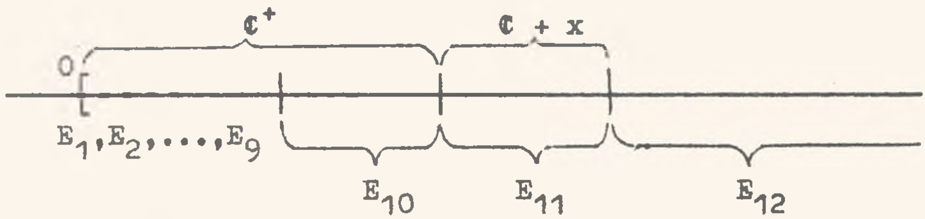
$$\Phi(\{0\}) := [0,10),$$
$$\Phi(\mathbb{C}) := \mathbb{C}^+ \cup (\mathbb{C} + x).$$

Chaque point de l'intervalle $[0,10)$ est la composante de la décomposition. L'ensemble $\mathbb{C}^+ - [0,10)$ est aussi une composante ainsi que $\mathbb{C} + x$. L'ensemble

$$G^+ - (\mathbb{C}^+ \cup (\mathbb{C} + x)) = (\mathbb{C} + 2x) \cup (\mathbb{C} + 3x) \cup \ \ldots$$

est la composante dernière.

En dessin:



Si nous prenons une autre fonction Φ , par exemple

$$\Phi(\{0\}) := \mathbb{C}^+, \qquad \Phi(\mathbb{C}) := G^+,$$

donc nous obtiendrons la décomposition dans laquelle chaque point appartenant à C^+ est une composante et chaque classe d'équivalence $\mathbb{C} + x$, $\mathbb{C} + 2x$, ... est aussi une composante.

Prenons maintenant une autre chaîne des sous-groupes de la sorte (o) par exemple:

$\mathbb{C}_4 \subset \mathbb{C}_2 \subset \mathbb{C}$, où

$\mathbb{C}_4 := \{\ldots,-4,0,4,8,\ldots\}$ et $\mathbb{C}_2 := \{\ldots,-2,0,2,4,\ldots\}$

Définissons Φ comme il suit:

$$\Phi(\mathbb{C}_4) := \mathbb{C}^+,$$

$$\Phi(\mathbb{C}_2) := \mathbb{C}^+ \cup (\mathbb{C} + x) \cup (\mathbb{C} + 2x),$$

$$\Phi(\mathbb{C}) := G^+,$$

Nous recevons la décomposition suivante:

$E_1 = \{0,4,8,12,\ldots\}$,

$E_2 = \{1,5,9,13,\ldots\}$,

$E_3 = \{2,6,10,14,\ldots\}$,

$E_4 = \{3,7,11,\ldots\}$,

$E_5 = \mathbb{C}_2 + x$,

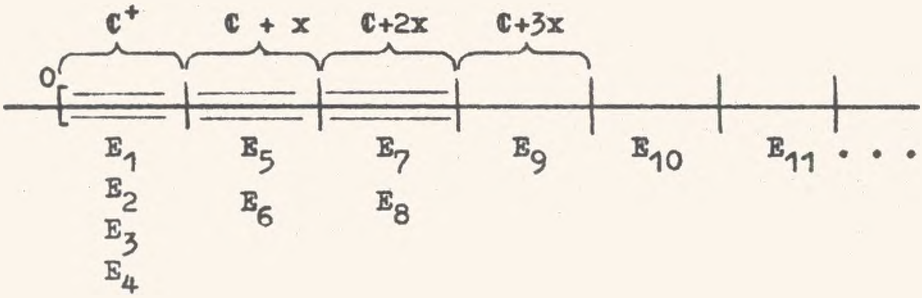
$E_6 = \mathbb{C}_{\sim 2} + x$, où $\mathbb{C}_{\sim 2} := \mathbb{C} - \mathbb{C}_2$,

$E_7 = \mathbb{C}_2 + 2x$,

$E_8 = \mathbb{C}_{\sim 2} + 2x$,

$E_9 = \mathbb{C} + 3x$, $E_{10} = \mathbb{C} + 4x$, $E_{11} = \mathbb{C} + 5x$, ...

En dessin:



R e m a r q u e 6. Remarquons qu'il existe toujours le sous-groupe G^* de (n) tel que $G^* \supseteq \bigcup_{s \in S} G_s$ pour chaque chaîne des sous-groupes $\{G_s\}_{s \in S}$ (on peut poser $G^* = G$), mais la fonction Φ n'existe pas toujours. Donnons l'exemple suivant. Soit $S := \{2,4,8,16,\dots\}$ et $G = \{ax + b\colon a,b \in \mathbb{C}\}$. Soit

$$\bigwedge_{s \in S} G_s := \mathbb{C}_s , \quad \text{où} \quad \mathbb{C}_s := \{c \cdot s\colon c \in \mathbb{C}\}.$$

Alors

$$\mathbb{C}_2 \supset \mathbb{C}_4 \supset \mathbb{C}_8 \supset \mathbb{C}_{16} \supset \dots$$

On voit qu il n'existe pas la fonction Φ remplissant la condition 2^oa) et telle que

$$\Phi(\mathbb{C}_2) \supset \Phi(\mathbb{C}_4) \supset \Phi(\mathbb{C}_8) \supset \dots$$

En effet. Fixons s_o de S. La fonction Φ serait une injection de l'ensemble infini $\{G_s\colon G_s \subset G_{s_o}\}$ à l'ensemble fini des intervalles initiaux $P_s \subset P_{s_o}$ remplissants la condition dans le point 2^oa), ce qui est impossible.

Remarquons encore que la fonction Φ existe toujours pour la chaîne $\{G_s\}_{s \in S}$ telle que

$$\overline{\overline{\{G_s\colon Z(G_s) \text{ est stable}\}}} < \chi_o$$

puisque la puissance de l'ensemble $G/Z(G_s)$ est toujours infinie. Chaque élément $a, a+a, a+a+a, \ldots$ pour $a \in G^+ - Z(G_s)$ appartient à une autre classe d'equivalence du groupe G par rapport à $Z(G_s)$.

R e m a r q u e 7. Nous supposons dans nos considérations que le groupe G soit abélien. Il n'est pas difficile d'apercevoir que cette supposition intervient essentiellement dans les preuves des lemme 1 et 3. Dans les autres preuves et considérations nous pouvons raisonner sans cette supposition. Le problème des décompositions invariantes du demi-groupe G^+ sans la supposition que le groupe G est abélien est ouvert.

Travaux cités

[1] Krupińska A., Rozwiązanie równania translacji na kategorii, Zesz.Nauk. WSP w Rzeszowie, 2/18, 1972, 13-106.

[2] Kurosz A.G., Algebra Ogólna, PWN, Warszawa 1965.

[3] Moszner Z., Décompositions invariantes du demi-groupe des éléments non-négatifs du groupe archimédien, Tensor 31, 1, 1980, 8-10.