PETER VOLKMANN

Caractérisation de la fonction $f(x) = x$ par un système de deux inéquations fonctionnelles

Dédié à la mémoire de Dieter Keith Ross

En désignant par N,Z,Q,R les ensembles des nombres entiers naturels, entiers relatifs, rationnels et réels, respectivement $(N = \{1,2,3,\ldots\})$, nous avons comme but de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME. Soit $f: R \to R$ une fonction satisfaisant aux inéquations

(1) $f(x+1) \geqslant f(x) + 1 \qquad (x \in R),$

(2) $f(xy) \geqslant f(x)f(y) \qquad (x,y \in R).$

Alors $f(x) = x$.

<u>Démonstration</u>. 1. Considérons d'abord seulement les inéquations (1) et

(3) $f(x^2) \geqslant f(x)^2 \qquad (x \in R).$

De ces inéquations on obtient facilement les relations

(4) $f(x) \geqslant 0 \qquad (x \geqslant 0),$

(5) $f(1) = 1,\ f(0) = 0,\ f(-1) = -1,$

(6) $f(x+n) \geqslant f(x) + n \qquad (x \in R,\ n \in N),$

d'où en particulier $(x = 0)$

(7) $f(n) \geqslant n \qquad (n \in N)$

et $(x = -n)$

(8) $f(-n) \leqslant -n \qquad (n \in N).$

2. Désormais nous utiliserons les inéquations (1), (2). Montrons que

(9)
$$f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}.$$

Pour cela, observons d'abord que (2), (5) entraînent

(10) $f(-x) \geqslant f(-1)f(x) = -f(x) \qquad (x \in R),$

d'où en particulier

(11)
$$f(-\tfrac{1}{2}) \geqslant -f(\tfrac{1}{2}).$$

De (4), (7) on obtient

$$f(\tfrac{1}{2}) \geqslant 0, \quad f(2) \geqslant 2,$$

et en tenant compte de (2), (5), il résulte que

$$1 = f(1) \geqslant f(\tfrac{1}{2})f(2) \geqslant f(\tfrac{1}{2})\cdot 2,$$

d'où

(12)
$$\tfrac{1}{2} \geqslant f(\tfrac{1}{2}).$$

La formule désirée (9) découle des relations (1),(11),(12):

$$\tfrac{1}{2} \geqslant f(\tfrac{1}{2}) = f(-\tfrac{1}{2}+1) \geqslant f(-\tfrac{1}{2})+1 \geqslant -f(\tfrac{1}{2})+1 \geqslant -\tfrac{1}{2}+1 = \tfrac{1}{2}.$$

3. En utilisant (2),(6),(9) il est facile de voir que la fonction

$$f_1(x) = \tfrac{1}{2} f(2x) \qquad (x \in R)$$

satisfait également aux inéquations (1) et (2):

$$f_1(x+1) = \frac{1}{2} f(2x+2) \geqslant \frac{1}{2}(f(2x)+2) = f_1(x) + 1 \quad (x \in R),$$

$$f_1(xy) = \frac{1}{2} f(\tfrac{1}{2}(2x)(2y)) \geqslant \frac{1}{2} f(\tfrac{1}{2})f((2x)(2y)) =$$

$$= \frac{1}{4} f((2x)(2y)) \geqslant \frac{1}{4} f(2x)f(2y) =$$

$$= f_1(x)f_1(y) \quad (x,y \in R).$$

De même, les fonctions

$$f_k(x) = \frac{1}{2^k} f(2^k x) \qquad (x \in R)$$

$(k=1,2,3,\ldots)$ satisfont aux (1), (2). (Démonstration par récurrence:

$$f_k(x) = \frac{1}{2} f_{k-1}(2x) \qquad (k \in N,\ x \in R),$$

où $f_0 = f$.) La formule (5) est donc aussi valable pour f remplacée par les f_k:

$$f_k(1) = 1,$$

d'où

(13) $$f(2^k) = 2^k \qquad (k \in N).$$

4. La relation (13) est la relation de base pour établir

(14) $$f(m) = m \qquad (m \in Z).$$

Soit d'abord $m > 0$: Soit $n \in N$ tel que

$$m + n = 2^k,$$

donc

$$f(m+n) = m + n.$$

Alors (6), (7) entraînent

$$m + n = f(m+n) \geqslant f(m) + n \geqslant m + n,$$

d'où

$$f(m) = m.$$

Soit maintenant $m < 0$ (donc $-m \in N$ et $f(-m) = -m$): En tenant compte de (8), (10) il résulte que

$$m = -f(-m) \leqslant f(m) \leqslant m.$$

5. Montrons que

(15) $$f(r) = r \quad (r \in Q).$$

Soit donc $r \in Q$, $r = p/q$, où $p,q \in Z$ et $q \neq 0$. Les relations (2), (14) fournissent

$$p = f(p) = f(q(p/q)) \geqslant f(q)f(p/q) = qf(p/q),$$

d'où

$$r \geqslant f(r)$$

(si l'on fait $q > 0$) et

$$r \leqslant f(r)$$

(si l'on fait $q < 0$).

6. Soient $x,y \in R$, $0 < x < y$. Il en résulte que

$$y = (t+1)x$$

où $t > 0$, donc (selon (1),(4))

$$f(t+1) \geqslant f(t) + 1 \geqslant 1,$$

ce qui fournit (en vertu de (2), (4))

$$f(y) \geqslant f(t+1)f(x) \geqslant f(x),$$

ou, en résumant,

$$f(x) \leqslant f(y) \quad (0 < x < y).$$

La fonction f est donc monotone non-décroissante sur l'intervalle $(0,\infty)$. De ce fait et avec (15) on obtient

(16) $f(x) = x \qquad (x \geqslant 0).$

Pour terminer la démonstration, il suffit de montrer finalement que

$$f(x) = x \qquad (x < 0).$$

Soit donc $x \in R$, $x < 0$. Soit $n \in N$ tel que $x + n > 0$. La formule (16) entraîne que

$$f(-x) = -x, \qquad f(x+n) = x + n,$$

d'où (en tenant compte de (6), (10))

$$x + n = f(x+n) \geqslant f(x) + n \geqslant -f(-x) + n = x + n.$$

Remarques supplémentaires. 1. M. Radulescu [3] a démontré qu'une fonction $f\colon C(X) \longrightarrow C(X)$ ($C(X)$ désignant l'espace des fonctions continues $x\colon X \longrightarrow R$ sur un espace de Hausdorff compact X) satisfaisant aux inéquations fonctionnelles

(17) $$f(x+y) \geqslant f(x) + f(y), \qquad f(xy) \geqslant f(x)f(y)$$

($x,y \in C(X)$) est de fait additive et multiplicative, c.-à-d.

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad f(xy) = f(x)f(y)^{*/}.$$

De là Radulescu a obtenu facilement les solutions $f\colon R \to R$ de (17) (avec $x,y \in R$), à savoir $f(x) \equiv 0$ et $f(x) = x$. On a donc l'énoncé suivant:

Soit $f\colon R \longrightarrow R$ une fonction satisfaisant aux inéquations (17) et à la condition

(18) $f(1) = 1$,

alors $f(x) = x$.

Il est clair que le théorème de la présente note améliore cet énoncé. Une autre amélioration (voir [4]) consiste à

---

*/ Ce résultat avait été généralisé en remplacant $C(X)$ par des anneaux plus abstraits (voir [6] et notamment l'article de J. Dhombres [1]).

remplacer (17), (18) par

(19) $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$, $f(x^2) \geq f(x)^2$, $f(1) = 1$ $(x,y \in R)$.

Le fait que (19) entraine $f(x) = x$ a reçu récemment une généralisation décisive par Z. Powązka [2].

Observons que les inéquations (1), (3) (qui entraînent (5), donc $f(1) = 1$) ne suffisent pas pour caractériser $f(x)=x$. La fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & (x \geq 1) \\ x & (x < 1) \end{cases}$$

satisfait aussi ces inéquations. Mais si l'on remplace (1), (3) par les équations fonctionnelles correspondantes, à savoir

$$f(x+1) = f(x) + 1, \quad f(x^2) = f(x)^2 \quad (x \in R),$$

alors on a nécessairement $f(x) = x$ (voir [5]).

2. Si l'on considère $f: Z \to R$ satisfaisant aux inéquations figurant dans (1), (2) seulement pour $x,y \in Z$, on n'obtient pas nécessairement $f(x) = x$ $(x \in Z)$. Contre-exemple*/: $f(x) = x^3$ $(x \in Z)$.

Références

[1] Dhombres J., Sur les fonctions simultanément suradditives et surmultiplicatives. C.R.Math. Acad. Sci. Canada 5, (1983), 207-210.

---

*/ Dû à Herbert Weigel de Karlsruhe.

[2] Powązka Z., Volkmann type results for some functional inequalities. Zeszyty Nauk. Akad. Górn.-Hutn. Kraków, Dział Mat., à paraître.

[3] Radulescu M., On a supra-additive and supra-multiplicative operator of C(X). Bull.Math. Soc. Sci. Math. R.S. Roumanie (N.S.) 24(72), No 3, (1980), 303-305.

[4] Volkmann P., Sur un système d'inéquations fonctionnelles. C.R. Math. Acad. Sci. Canada 4, (1982), 155-158.

[5] ———, Caractérisation de la fonction f(x) = x par un système de deux équations fonctionnelles, Ibid. 5, (1983), 27-28.

[6] ———, Sur les fonctions simultanément suradditives et surmultiplicatives, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie (N.S.), à paraître.