KAZIMIERZ JARACZ, EUGENIUSZ WACHNICKI

Metoda faktoryzacji równań różniczkowych n-tego rzędu w zastosowaniu do analizy układów liniowych. Przypadek czynników różniczkowych o wielokrotnych pierwiastkach wielomianu charakterystycznego

WSTĘP

W pracy [1] rozpatrzono przypadek faktoryzacji układu dynamicznego, dla którego pierwiastki wielomianu charakterystycznego są jednokrotne. Polega ona na zastąpieniu równania różniczkowego n-tego rzędu układem niezależnych równań różniczkowych rzędu pierwszego. Rozpatrywane tam zagadnienie różni się od znanej metody dekompozycji równania różniczkowego n-tego rzędu, sprowadzającej to równanie do równoważnej postaci zależnych równań różniczkowych stanu rzędu pierwszego. Owa niezależność równań jest zaletą metody, upraszczającą w wielu zadaniach technicznych obliczenia analityczne.

W niniejszej pracy, stanowiącej kontynuację rozważań zawartych w [1] rozpatrujemy przypadek, gdy pierwiastki wielomianu charakterystycznego są wielokrotne.

PODSTAWOWE TWIERDZENIA

Rozważmy równanie różniczkowe o stałych współczynnikach rzeczywistych a_i, $i = 1,2,\ldots,n$ postaci

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) + a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x(t) + \ldots + a_n x(t) = u(t),\quad t\in[a,b]. \quad (1)$$

Załóżmy, że wielomian $W(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ ma p różnych pierwiastków $c_1, c_2, \dots, c_p$ o krotnościach odpowiednio $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, przy czym $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = n$. Wtedy równanie (1) można przedstawić w postaci równoważnej

$$(D_t - c_1)^{\alpha_1}(D_t - c_2)^{\alpha_2} \dots (D_t - c_p)^{\alpha_p} x(t) = u(t), \quad t \in [a,b]. \quad (2)$$

Równanie (2) można również przedstawić w postaci

$$\left(\prod_{i=1}^{p} (D_t - c_i)^{\alpha_i}\right) x(t) = u(t), \quad t \in [a,b].$$

Niech

$$A_{kl} = \frac{1}{l!} \frac{d^l}{dz^l} \left[\frac{(z-c_k)^{\alpha_k}}{W(z)} \right] \Bigg|_{z = c_k}$$

dla $k = 1, 2, \dots, p$, $l = 0, 1, \dots \alpha_k - 1$.
Udowodnimy twierdzenie 1.

<u>Twierdzenie 1</u>. Jeżeli funkcja $u \in C^{n-1}([a,b])$, to każde rozwiązanie równania (2) jest postaci

$$x(t) = \sum_{i=1}^{p} x_i(t),$$

gdzie funkcje x_i, $i = 1,2,\dots,p$ są rozwiązaniami odpowiednio równań

$$(D_t - c_i)^{\alpha_i} x_i(t) = \left(\sum_{l=0}^{\alpha_i - 1} A_{il}(D_t - c_i)^l\right) u(t), \quad i = 1,\dots,p. \quad (3)$$

Ponadto funkcja x wyznacza jednoznacznie funkcje x_i.

D o w ó d. Ze wzoru interpolacyjnego Hermite'a mamy

$$1 = \sum_{k=1}^{p} \prod_{s=1}^{p} (z - c_s)^{\alpha_s} \sum_{l=0}^{\alpha_k - 1} A_{kl}(z - c_k)^l$$

dla każdej liczby zespolonej z. Przez analogię mamy

$$\left(\sum_{k=1}^{p} \prod_{s=1}^{p} (D_t - c_s)^{\alpha_s} \sum_{l=0}^{\alpha_k - 1} A_{kl}(D_t - c_k)^l\right) x(t) = x(t) \quad (4)$$

dla każdej funkcji x klasy $C^{n-1}([a,b])$.

Załóżmy najpierw, że x_i jest rozwiązaniem równania (3). Wtedy dla $x(t) = \sum_{i=1}^{p} x_i(t)$, na podstawie (4) mamy

$$\Big(\prod_{k=1}^{p} (D_t-c_k)^{\alpha_k}\Big)x(t) = \Big(\prod_{k=1}^{p} (D_t-c_k)^{\alpha_k}\Big) \sum_{i=1}^{p} x_i(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p}\Big(\prod_{k=1}^{p} (D_t-c_k)^{\alpha_k}\Big)x_i(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p}\Big(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p} (D_t-c_k)^{\alpha_k}\Big)(D_t-c_i)^{\alpha_i}x_i(t) =$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{p} \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p} (D_t-c_k)^{\alpha_k} \sum_{l=0}^{\alpha_i-1} A_{il}(D_t-c_i)^{l}\Big)u(t) = u(t),$$

a więc funkcja x spełnia równanie (2).

Odwrotnie, niech funkcja x spełnia w przedziale $[a,b]$ równanie (2). Połóżmy

$$x_i(t) = \Big(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p} (D_t-c_k)^{\alpha_k} \sum_{l=0}^{\alpha_i-1} A_{il}(D_t-c_i)^{l}\Big)x(t). \qquad (5)$$

Wtedy z (4) wynika bezpośrednio, że $\sum_{i=1}^{p} x_i(t) = x(t)$.

Pozostaje stwierdzić, że funkcja x_i dana wzorem (5) spełnia równanie (3) w przedziale $[a,b]$. Otóż

$$(D_t-c_i)^{\alpha_i}x_i(t) = \Big(\prod_{k=1}^{p} (D_t-c_k)^{\alpha_k} \sum_{l=0}^{\alpha_i-1} A_{il}(D_t-c_i)^{l}\Big)x(t) =$$

$$= \Big(\sum_{l=0}^{\alpha_i-1} A_{il}(D_t-c_i)^{l} \prod_{k=1}^{p} (D_t-c_k)^{\alpha_k}\Big)x(t) =$$

$$= \Big(\sum_{l=0}^{\alpha_i-1} A_{il}(D_t-c_i)^{l}\Big)u(t).$$

Z kolei udowodnimy, że funkcje x_i wyznaczone są jednoznacznie. Niech więc $x(t) = \sum_{i=1}^{p} \bar{x}_i(t)$, gdzie funkcje $\bar{x}_i$

spełniaję odpowiednio równanie (3), zaś funkcja x spełnia równanie (2).

Rozważmy operator

$$T = \prod_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{p} (D_t-c_k)^{\alpha_k} \sum_{l=0}^{\alpha_s-1} A_{sl}(D_t-c_s)^l,$$

gdzie s jest ustaloną liczbą wśród liczb 1,2,...,p.

Mamy

$$Tx(t) = \sum_{i=1}^{p} T\bar{x}_i(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \Big(\prod_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{p} (D_t-c_k)^{\alpha_k} \sum_{l=0}^{\alpha_s-1} A_{sl}\ (D_t-c_s)^l\Big)\bar{x}_i(t) =$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\i\neq s}}^{p} \Big(\prod_{\substack{k=1\\k\neq s\\k\neq i}}^{p} (D_t-c_k)^{\alpha_k} \sum_{l=0}^{\alpha_s-1} A_{sl}(D_t-c_s)^l\Big)(D_t-c_i)^{\alpha_i}\ \bar{x}_i(t) +$$

$$+ \Big(\prod_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{p} (D_t-c_k)^{\alpha_k} \sum_{l=0}^{\alpha_s-1} A_{sl}\ (D_t-c_s)^l\Big)\bar{x}_s(t) =$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\i\neq s}}^{p} \Big(\prod_{\substack{k=1\\k\neq s\\k\neq i}}^{p} (D_t-c_k)^{\alpha_k} \sum_{l=0}^{\alpha_s-1} A_{sl}(D_t-c_s)^l\Big)\sum_{q=0}^{\alpha_i-1} A_{iq}(D_t-c_i)^q u(t) +$$

$$+ \Big(\prod_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{p} (D_t-c_k)^{k} \sum_{l=0}^{\alpha_s-1} A_{sl}(D_t-c_s)^l\Big)\bar{x}_s(t) =$$

$$= \Big(\sum_{\substack{i=1\\i\neq s}}^{p} \prod_{\substack{k=1\\k\neq s\\k\neq i}}^{p} (D_t-c_k)^{\alpha_k} \sum_{q=0}^{\alpha_i-1} A_{iq}(D_t-c_i)^q\Big) \sum_{l=0}^{\alpha_s-1} A_{sl}(D_t-c_s)^l u(t)$$

$$+ \Big(\prod_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{p} (D_t-c_k)^{\alpha_k} \sum_{l=0}^{\alpha_s-1} A_{sl}(D_t-c_s)^l\Big)\bar{x}_s(t) =$$

$$= \Big(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{p} \prod_{\substack{k=1\\ k\neq s\\ k\neq i}}^{p} (D_t-c_k)^{\alpha_k} \sum_{q=0}^{\alpha_i-1} A_{iq}(D_t-c_i)^q\Big)(D_t-c_s)^{\alpha_s}\,\bar{x}_s(t) +$$

$$+ \Big(\prod_{\substack{k=1\\ k\neq s}}^{p} (D_t-c_k)^{\alpha_k} \sum_{q=0}^{\alpha_s-1} A_{sq}(D_t-c_s)^q\Big)\bar{x}_s(t) =$$

$$= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{p} \Big(\prod_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{p} (D_t-c_k)^{\alpha_k} \sum_{q=0}^{\alpha_i-1} A_{iq}(D_t-c_i)^q\Big)\bar{x}_s(t) +$$

$$+ \Big(\prod_{\substack{k=1\\ k\neq s}}^{p} (D_t-c_k)^{\alpha_k} \sum_{q=0}^{\alpha_s-1} A_{sq}\,(D_t-c_s)^q\Big)\bar{x}_s(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \Big(\prod_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{p} (D_t-c_k)^{\alpha_k} \sum_{q=0}^{\alpha_i-1} A_{iq}(D_t-c_i)^q\Big)\bar{x}_s(t) = \bar{x}_s(t).$$

Stąd i z (5) wynika, że $\bar{x}_s(t) = x_s(t)$ dla $s=1,2,\dots,p$. Kończy to dowód twierdzenia 1.

Rozważmy z kolei równanie (2) w przedziale $[a,b]$ z warunkiem początkowym

$$x^{(k)}(t_o) = x_o^{(k)}, \quad t_o \in [a,b], \quad k = 0,1,\dots,n. \tag{6}$$

Stosując twierdzenie 1 i metodę dowodu podaną w pracy [3] można udowodnić twierdzenie następujące:

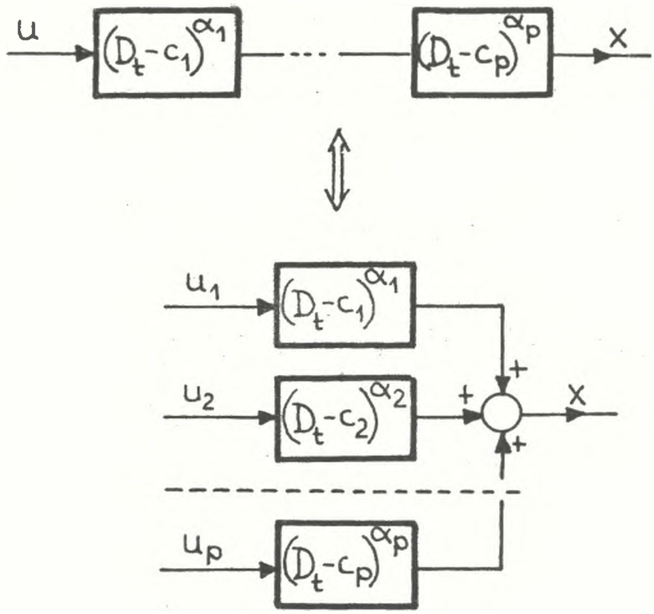
Twierdzenie 2. Problem (2), (6) równoważny jest układowi p problemów

$$(D_t-c_i)^{\alpha_i}\, x_i(t) = \sum_{l=0}^{\alpha_i-1} A_{il}(D_t-c_i)^l u(t)$$

$$x_i^{(k)}(t_o) = x_{oi}^{(k)}, \quad k = 0,1,\dots,\alpha_i-1, \quad i = 1,\dots,p,$$

gdzie liczby $x_{oi}^{(k)}$ wyznaczamy z układu

$$\sum_{i=1}^{p} x_{oi}^{(o)} = x_o^{(o)}$$



Rys.1

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{\alpha_i-1} a_{sj}(c_i)x_{oi}^{(j)} = x_o^{(s)} - \sum_{k=1}^{p}\sum_{r=1}^{s} a_{r-1,\alpha_k-1}(c_k) \times$$

$$\times \sum_{l=0}^{\alpha_k-1} A_{kl}\frac{d^s}{dt^s}(D_t-c_k)^r u(t)\Big|_{t=t_o}, \quad s=1,\ldots,n.$$

Liczby $a_{sj}(c_i)$ określone są następująco:

$$a_{sj}(c_i) = \begin{cases} 0 & \text{dla } s \neq j,\ s<\alpha_i, \\ 1 & \text{dla } s = j,\ s<\alpha_i, \\ -(-c_i)^{\alpha_i-j}\binom{\alpha_i}{j} & \text{dla } s = \alpha_i \end{cases}$$

oraz dla $s>\alpha_i$

$$a_{so}(c_i) = -(-c_i)^{\alpha_i} a_{s-1,\alpha_i-1}(c_i),$$

$$a_{sj}(c_i) = a_{s-1,\alpha_i-1}(c_i)a_{\alpha_i j}(c_i) + a_{s-1,j-1}(c_i).$$

PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA

Zaprezentowaną metodę dekompozycji równania różniczkowego n-tego rzędu na układ równań niezależnych korzystnie jest stosować w przypadkach, w których znane są z góry pierwiastki wielomianu charakterystycznego. W elektrotechnice i automatyce istnieją takie układy. Przykładem niech będzie łańcuch n idealnych filtrów aktywnych. Załóżmy, że w łańcuchu tym znajduje się p grup filtrów, a w każdej grupie liczba jednakowych filtrów niech wynosi odpowiednio $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. Każdy z filtrów aktywnych odwraca fazę. Schemat tego łańcucha przedstawia rys.2.

Równanie dla łańcucha czwórników wzajemnie się nie obciążających, którego schemat przedstawiony jest na rys.2, ma postać

$$(D_t-c_1)^{\alpha_1}(D_t-c_2)^{\alpha_2}\ldots(D_t-c_p)^{\alpha_p}\,x(t) = \pm\prod_{r=1}^{p}\left(\frac{k_r}{T_r}\right)^{\alpha_r}u(t), \quad (7)$$

gdzie $c_i = -\frac{1}{T_i} = -\frac{1}{R_{si}C_{si}}$, $i = 1,2,\ldots,p$. Znak "+" występuje, jeśli $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, p są liczbami parzystymi, znak "-" gdy którakolwiek z tych liczb jest nieparzysta. Równanie (7) wynika ze złożenia równań dla poszczególnych grup filtrów rozpatrywanego łańcucha, które mają postać

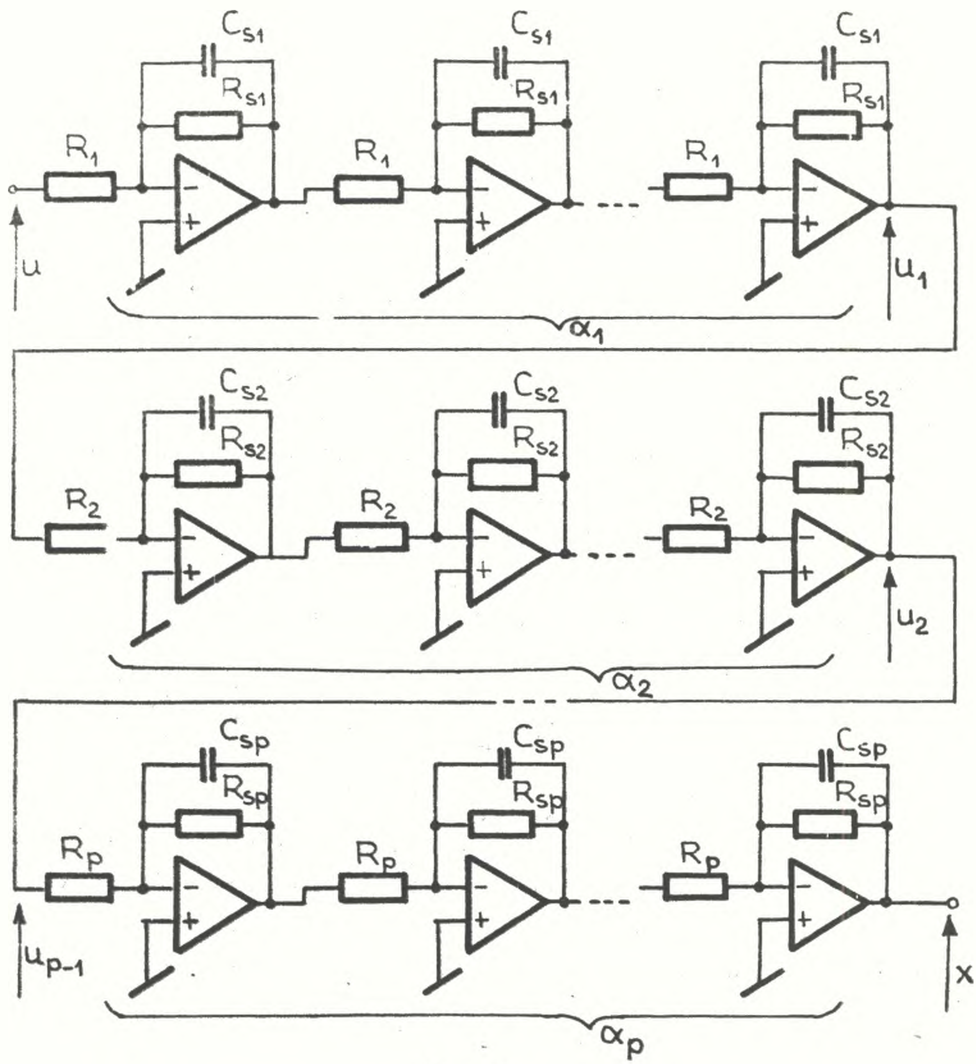
$$(D_t-c_1)^{\alpha_1}u_1(t) = \left(\frac{k_1}{T_1}\right)^{\alpha_1}u(t),$$

$$(D_t-c_2)^{\alpha_2}u_2(t) = \left(\frac{k_2}{T_2}\right)^{\alpha_2}u_1(t),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(D_t-c_p)^{\alpha_p}x(t) = \left(\frac{k_p}{T_p}\right)^{\alpha_p}u_{p-1}(t)$$

dla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ parzystych oraz



Rys.2

$$(D_t - c_1)^{\alpha_1} u_1(t) = -\left(\frac{k_1}{T_1}\right)^{\alpha_1} u(t),$$

$$(D_t - c_2)^{\alpha_2} u_2(t) = -\left(\frac{k_2}{T_2}\right)^{\alpha_2} u_1(t),$$

. . . .

$$(D_t-c_p)^{\alpha_p} x(t) = -(\frac{k_p}{T_p})^{\alpha_p} u_{p-1}(t)$$

dla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ nieparzystych.

Na podstawie twierdzenia 1 mamy bezpośrednio układ p równań niezależnych postaci

$$(D_t-c_i)^{\alpha_i} x_i(t) = \sum_{l=0}^{\alpha_i-1} A_{il}(D_t-c_i)^l u(t), \quad i = 1,2,\dots,p, \qquad (8)$$

przy czym

$$A_{kl} = \frac{1}{l!}\frac{d^l}{dz^l}\left[\frac{(z-c_k)^{\alpha_k}}{(z-c_1)^{\alpha_1}(z-c_2)^{\alpha_2}\dots(z-c_p)^{\alpha_p}}\right]_{z=c_k}$$

dla $k = 1,2,\dots,p$, $l = 0,1,\dots,\alpha_k-1$.

Rozwiązaniem równania (8) są całki

$$x_i(t) = \frac{1}{(\alpha_i-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha_i-1} \exp[c_i(t-\tau)]\, u_i(\tau)d\tau,$$

gdzie

$$u_i(t) = \sum_{l=0}^{\alpha_i-1} A_{il}(D_t-c_i)^l u(t), \quad i = 1,2,\dots,p.$$

Ostatecznie, na podstawie twierdzenia 1 rozwiązaniem ogólnym rozpatrywanego zadania jest

$$x(t) = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(\alpha_i-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha_i-1} \exp[c_i(t-\tau)]\, u_i(\tau)d\tau.$$

WNIOSKI

Przedstawiony wariant metody równań niezależnych będący uogólnieniem wyników zaprezentowanych w [1] korzystnie jest stosować w układach, w których znamy pierwiastki wielomianu charakterystycznego. Nakład pracy przy rozwiązywaniu równania różniczkowego dynamiki układu jest wtedy mniejszy niż przy stosowaniu metody zmiennych stanu. Stosując bowiem metodę zmiennych stanu otrzymujemy dla rozważanego przykładu macierz układu $\underline{A}$ postaci

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\prod_{i=1}^{p}(-c_i)^{\alpha_i} & -\sum_{i=1}^{p}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq i}}^{p}(-c_s)^{\alpha_s}(-c_i)^{\alpha_i-1} & \cdots & -\sum_{i=1}^{p}\alpha_i(-c_i) \end{bmatrix}$$

posiadającą wielokrotne wartości własne. Sprowadzenie jej do postaci diagonalnej powoduje występowanie na głównej przekątnej klatek Jordana. Konieczne - do rozwiązania równania stanu - obliczenie funkcji macierzy $\exp(\underline{A}t)$ jest bardziej złożone.

LITERATURA

[1] Jaracz K., Wachnicki E., Metoda równań różniczkowych niezależnych analizy układów liniowych, WN AGH Kraków (w druku),

[2] Hermite Ch., Sur la formule d'interpolation de Lagrange, J. Reine Angew. Math. 84(1878), 70-79.

[3] Wachnicki E., On boundary value problems for some partial differential equations of higher order, Comment. Math. XX (1977), 215-233.

Kazimierz Jaracz, Eugeniusz Wachnicki

METHODE DER FAKTORZERLEGUNG DIFFERENTIALGLEICHUNGEN N-TER ORDNUNG UND IHRE ANWENDUNG ZUR ANALYSE LINEARER SYSTEME. DER FALL DER MEHRFACHEN WURZELN DES CHARAKTERISTISCHEN POLYNOMS

Im Arbeit wurde eine neue Methode der Analyse linearer zeitinvarianter Systeme der Elektrotechnik und Automatik vorgeschlagen. Sie erlaubt die Systeme n-ter Ordnung mit von unabhängigen Gleichungen zu beschreiben. Die genannte Unabhängigkeit der Differentialgleichungen dieses Systems ist der wesentliche Vorteil der Methode. Die Arbeit setzt die Überlegungen vort die in [1] enhalten sind.