Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis
Folia 4 Studia Mathematica I (2001)

Zenon Moszner

Sur les généralisations du wronskien

Résumé. En généralisant le wronskien on montre que l'évanouissement de ce wronskien est équivalent à la dépendance linéaire du système des fonctions. Le théorème analogue est donné pour la décomposition d'une fonction $h(x,y)$ à la forme $a_1(x)b_1(y)+\dots+a_n(x)b_n(y)$ par la généralisation du wronskien de h. On formule aussi un théorème lié à un problème ouvert concernant cette décomposition.

1. On sait bien que l'évanouissement du wronskien

$$W(f_1,\dots,f_n) := \begin{vmatrix} f_1(x), & \dots, & f_n(x) \\ f_1'(x), & \dots, & f_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)}(x), & \dots, & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

étant une condition nécéssaire pour la dépendence linéaire des fonctions $f_1,\dots,$ f_n, n'est pas la condition suffisante (le contre-exemple est donné déjà par G. Peano [8] en 1889).

Il y a beaucoup des théorèmes qui donnent une liaison entre l'évanouissement du wronskien et la dépendence linéaire des fonctions (voir la bibliographie dans [5] et [10]).

On sait aussi [9] que l'évanouissement du déterminant de Casorati

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1), & \dots, & f_n(x_1) \\ f_1(x_2), & \dots, & f_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_n), & \dots, & f_n(x_n) \end{vmatrix}$$

est une condition équivalente à la dépendence linéaire des fonctions $f_1,\dots,f_n$.

On peut considérer le wronskien généralisé du type de Casorati sous la forme suivante

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1), & \dots, & f_n(x_1) \\ f_1'(x_2), & \dots, & f_n'(x_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)}(x_n), & \dots, & f_n^{(n-1)}(x_n) \end{vmatrix}.$$

AMS (2000) Subject Classification: 26B40, 15A03, 15A15.

Il est vrai le

THÉORÈME 1
Le fonctions $f_1, \ldots, f_n$ complexes d'une variable complexe différentiables sur un ensemble E connexe sont linéairement dépendantes si et seulement si le wronskien du type de Casorati de ces fonctions reste nul pour tous $x_1, \ldots, x_n$ dans E.

Démonstration de "seulement si". Supposons que $f_1, \ldots, f_n$ soient linéairement dépendantes, c. à d. qu'ils existent des nombres complexes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ pas tous nul et tels que

$$\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x) = 0$$

pour chaque x dans E. Il en résulte que

$$\alpha_1 f_1^{(i)}(x_i) + \cdots + \alpha_n f_n^{(i)}(x_i) = 0 \quad \text{pour } i = 0, \ldots, n-1$$

et pour tous $x_1, \ldots, x_n$ dans E. Puisque $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ne sont pas tous nul le wronskien du type de Casorati reste nul.

Démonstration de "si". Nous allons faire la démonstration par l'induction par rapport à n.

Pour $n = 1$ la supposition nous donne $f_1(x) = 0$ pour chaque x dans E, donc f_1 est linéairement dépendante.

Supposons que notre implication a lieu pour n et que le wronskien du type de Casorati de degré $n+1$ pour les fonctions $f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}$ reste nul pour tous $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ dans E.

Considérons les deux cas suivants

a) ils existent les points $x_2, \ldots, x_{n+1}$ dans E pour lesquels la matrice

$$\left(f_j^{(i-1)}(x_i)\right)_{\substack{i = 2, \ldots, n+1 \\ j = 1, \ldots, n+1}}$$

a le rang égal à n ou

b) le rang de cette matrice est plus petit que n pour chaque $x_2, \ldots, x_{n+1}$ dans E.

Dans le cas a) en développant le wronskien du type de Casorati des fonctions $f_1, \ldots, f_{n+1}$, pour x_1 arbitraire dans E et $x_2, \ldots, x_{n+1}$ comme dans a), par rapport à la ligne première nous recevons la thèse.

Dans le cas b) d'après la supposition inductive chaques n des fonctions $f_1', \ldots, f_{n+1}'$ sont linéairement dépendantes, donc ils existent des nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ pas tous nul tels que

$$\alpha_1 f_1'(x) + \cdots + \alpha_n f_n'(x) = 0$$

pour chaque x de E, d'où il existe c tel que

$$\alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x) = c.$$

Si $c = 0$ les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont linéairement dépendantes, donc aussi les fonctions $f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}$ sont les mêmes. Si $c \neq 0$ nous pouvons supposer $\alpha_1 \neq 0$ sans la restriction de la généralité, alors

$$\left(\frac{\alpha_1}{c}\right) f_1(x) + \cdots + \left(\frac{\alpha_n}{c}\right) f_n(x) = 1. \tag{1}$$

Aussi les fonctions $f_2', \ldots, f_{n+1}'$ sont linéairement dépendantes, donc ils existent des nombres $\beta_2, \ldots, \beta_{n+1}$ pas tous nul pour lesquels

$$\beta_2 f_2'(x) + \cdots + \beta_{n+1} f_{n+1}'(x) = 0,$$

d'où

$$\beta_2 f_2(x) + \cdots + \beta_{n+1} f_{n+1}(x) = d$$

pour un nombre complexe d. Si $d = 0$ la démonstration est terminée, si $d \neq 0$ nous avons

$$\left(\frac{\beta_2}{d}\right) f_2(x) + \cdots + \left(\frac{\beta_{n+1}}{d}\right) f_{n+1}(x) = 1. \tag{2}$$

En comparant les membres gauches dans (1) et (2) nous voyons que les fonctions $f_1, \ldots, f_{n+1}$ sont linéairement dépendantes puisque $\dfrac{\alpha_1}{c} \neq 0$.

La démonstration du Théorème 1 est donc terminée.

2. Pour la fonction $h(x, y)$ de deux variables l'évanouissement du wronskien de la forme

$$\begin{vmatrix} h(x,y), & h_y(x,y), & \ldots, & h_{y^{n-1}}(x,y) \\ h_x(x,y), & h_{yx}(x,y), & \ldots, & h_{y^{n-1}x}(x,y) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{x^{n-1}}(x,y), & h_{yx^{n-1}}(x,y), & \ldots, & h_{y^{n-1}x^{n-1}}(x,y) \end{vmatrix}$$

est une condition nécéssaire pour cette fonction soit de la forme

$$h(x, y) = a_1(x)b_1(y) + \cdots + a_{n-1}(x)b_{n-1}(y), \tag{3}$$

n'étant pas en même temps de la condition suffisante (le contre-exemple premier est donné par Th.M. Rassias en 1986, voir [9] ou [10] p. 32).

Si nous remplaçons le wronskien plus haut par le déterminant du type de Casorati de la fonction h:

$$\begin{vmatrix} h(x_1,y_1), & h(x_1,y_2), & \ldots, & h(x_1,y_n) \\ h(x_2,y_1), & h(x_2,y_2), & \ldots, & h(x_2,y_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h(x_n,y_1), & h(x_n,y_2), & \ldots, & h(x_n,y_n) \end{vmatrix},$$

son évanouissement est équivalent à la forme (3) de la fonction h (le résultat de F. Neuman, voir [7] ou le Théorème 22.2.1 à la page 36 et la Remarque 2.2.2 (ii) à la page 38 dans [10]).

On peut considérer le wronskien de la fonction h du type de Casorati

$$\begin{vmatrix} h(x_1,y_1), & h_y(x_1,y_2), & \dots, & h_{y^{n-1}}(x_1,y_n) \\ h_x(x_2,y_1), & h_{yx}(x_2,y_2), & \dots, & h_{y^{n-1}x}(x_2,y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{x^{n-1}}(x_n,y_1), & h_{yx^{n-1}}(x_n,y_2), & \dots, & h_{y^{n-1}x^{n-1}}(x_n,y_n) \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Nous avons le

THÉORÈME 2

Pour une fonction h complexe de deux variables complexes, ayant les dérivées jusqu'à

$$h_{y^{n-1}x^{n-1}}$$

sur $X \times Y$, où X et Y sont des ensembles connexes dans $\mathbb{C}$, le wronskien du type de Casorati reste nul pour tous $x_1, \dots, x_n$ dans X et $y_1, \dots, y_n$ dans Y si et seulement si la fonction h est de le forme (3)*, où $a_k : X \longrightarrow \mathbb{C}$ et $b_k : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ pour $k = 1, \dots, n-1$.*

Démonstration de "si". Le wronskien du type de Casorati de h c'est le même que le wronskien du type de Casorati des fonctions

$$h(x_1,y_1), h_y(x_1,y_2), \dots, h_{y^{n-1}}(x_1,y_n)$$

comme les fonction de x_1 avec $y_1, \dots, y_n$ fixés arbitrairement dans Y. D'après le Théorème 1 il suffit donc montrer que ces fonctions sont linéairement dépendantes dans X. Nous avons

$$h(x_1,y_1) = a_1(x_1)b_1(y_1) + \dots + a_{n-1}(x_1)b_{n-1}(y_1),$$

$$h_{y^i}(x_1,y_{i+1}) = a_1(x_1)b_1^{(i)}(y_{i+1}) + \dots + a_{n-1}(x_1)b_{n-1}^{(i)}(y_{i+1})$$

pour $i = 1, \dots, n-1$. Il en résulte que les n fonctions

$$h(x_1,y_1), h_y(x_1,y_2), \dots, h_{y^{n-1}}(x_1,y_n)$$

sont des combinaisons linéaires des $n-1$ fonctions $a_1(x_1), \dots, a_{n-1}(x_1)$ ($y_1, \dots, y_n$ sont fixés!), donc elles doivent être linéairement dépendantes.

Démonstration de "seulement si". Par l'induction par rapport à n.

Pour $n = 1$ la thèse est évidente. Supposons l'implication à prouvée pour $n-1$ et que le wronskien (4) reste nul et considérons les deux cas siuvants:

a) ils existent $x_2, \dots, x_n$ dans X et $y_2, \dots, y_n$ dans Y tels que le déterminant

$$\begin{vmatrix} h_{yx}(x_2,y_2), & \dots, & h_{y^{n-1}x}(x_2,y_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{yx^{n-1}}(x_n,y_2), & \dots, & h_{y^{n-1}x^{n-1}}(x_n,y_n) \end{vmatrix} \tag{5}$$

est différent de zéro ou

b) ce déterminant reste nul pour tous $x_2, \ldots, x_n$ dans X et pour tous $y_2, \ldots, y_n$ dans Y.

Dans de la cas a) en posant dans (4) pour $x_2, \ldots, x_n$ et $y_2, \ldots, y_n$ les nombres qui existent d'après a) et en développant le wronskien (4) par rapport à la ligne première nous pouvons compter $h(x_1, y_1)$ sous la forme (3).

Dans le cas b) puisque le déterminant (5) c'est le wronskien du type de Casorati de la fonction h_{yx} de degré $n-1$, d'après la supposition inductive nous avons

$$h_{yx}(x,y) = a_1(x)b_1(y) + \cdots + a_{n-2}(x)b_{n-2}(y),$$

d'où

$$h(x,y) = a_1(x)b_1(y) + \cdots + a_{n-2}(x)b_{n-2}(y) + c(x) + d(y) \tag{6}$$

pour certaines fonctions $c : X \longrightarrow \mathbb{C}$ et $d : Y \longrightarrow \mathbb{C}$.

Le wronskien (4) c'est le wronskien du type de Casorati des fonctions $h(x, y_1), h_y(x, y_2), \ldots, h_{y^{n-1}}(x, y_n)$ comme les fonctions de x avec $y_1, \ldots, y_n$ fixés. Puisque ce wronskien reste nul, alors ces fonctions sont linéairement dépendantes, donc ils existent des fonctions $\alpha_k : Y^n \longrightarrow \mathbb{C}$ pour $k = 1, \ldots, n$, telles que $\alpha_k(y_1, \ldots, y_n)$ ne sont pas tous nul pour chaque $(y_1, \ldots, y_n)$ dans Y^n et

$$\begin{aligned}
& \alpha_1(y_1, \ldots, y_n)\left[a_1(x)b_1(y_1) + \cdots + a_{n-2}(x)b_{n-2}(y_1) + c(x) + d(y_1)\right] \\
+ \; & \alpha_2(y_1, \ldots, y_n)\left[a_1(x)b_1'(y_2) + \cdots + a_{n-2}(x)b_{n-2}'(y_2) + d'(y_2)\right] \\
+ \; & \cdots \\
+ \; & \alpha_n(y_1, \ldots, y_n)\left[a_1(x)b_1^{(n-1)}(y_n) + \cdots + a_{n-2}(x)b_{n-2}^{(n-1)}(y_n) + d^{(n-1)}(y_n)\right] \\
= \; & 0.
\end{aligned}$$

Considérons quelques cas. S'ils existent $y_1, \ldots, y_n$ tels que $\alpha_1(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$ nous pouvons calculer $c(x)$ de l'égalité plus haut comme la combinaison linéaire de $a_1(x), \ldots, a_{n-2}(x)$ et d'après (6) nous avons la thèse. Si α_1 reste nul toujours nous avons

$$\begin{aligned}
& \left\{b_1'(y_2)\alpha_2 + \cdots + b_1^{(n-1)}(y_n)\alpha_n\right\} a_1(x) \\
& + \ldots \\
& + \left\{b_{n-2}'(y_2)\alpha_2 + \cdots + b_{n-2}^{(n-1)}(y_n)\alpha_n\right\} a_{n-2}(x) \\
& + \alpha_2 d'(y_2) + \cdots + \alpha_n d^{(n-1)}(y_n) \\
& = 0
\end{aligned}$$

S'ils existent $y_2, \ldots, y_n$ tels que un des parenthèses $\{\ \}$ est différent de zéro nous calculons la fonctions "a" qui se trouve à côté de cette parenthèse par les fonctions "a" restantes et la formule (6) nous donne la thèse.

Si toutes les parenthèses { } restent nul pour tous $y_2, \dots, y_n$ dans Y, dans ce cas aussi $\alpha_2 d'(y_2) + \cdots + \alpha_n d^{(n-1)}(y_n) = 0$ et puisque $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ ne sont pas tous nul le déterminant

$$\begin{vmatrix} d'(y_2), & d''(y_3), & \dots, & d^{(n-1)}(y_n) \\ b_1'(y_2), & b_1''(y_3), & \dots, & b_1^{(n-1)}(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-2}'(y_2), & b_{n-2}''(y_3), & \dots, & b_{n-2}^{(n-1)}(y_n) \end{vmatrix}$$

doit être égal à zéro pour tous $y_2, \dots, y_n$ dans Y. Il en résulte de Théorème 1 que les fonctions $b_1'(y), \dots, b_{n-1}'(y), d'(y)$ sont linéairement dépendantes. Ils existent donc des nombres $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ pas tous nul et tels que

$$\beta_1 b_1'(y) + \cdots + \beta_{n-2} b_{n-2}'(y) + \beta_{n-1} d'(y) = 0.$$

En calculant d'ici une des fonctions $b_1, \dots, b_{n-2}, d$ et en posant cette fonction comptée dans (6) nous recevons la thèse. Ça finit la démonstration du Théorème 2.

Remarquons qu'on peut recevoir le Théorème 1 d'après le Théorème 2. En effect il suffit considérer dans le Théorème 2

$$h(x,y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{y^{i-1}}{(i-1)!} \quad \text{pour } (x,y) \in E \times \mathbb{C},$$

où $f_1(x), \dots, f_n(x)$ sont comme dans le Théorème 1. Dans ce cas le wronskien (4) de h du type de Casorati est égal au wronskien du type de Casorati du système $f_1, \dots, f_n$, donc si ce wronskien dernier est égal à zéro, d'après le Théorème 2 la fonction h est de la forme (3), d'où

$$h_{y^k}(x,y) = a_1(x) b_1^{(k)}(y) + \cdots + a_{n-1}(x) b_{n-1}^{(k)}(y)$$

pour $k = 1, \dots, n-1$. Il en résulte que

$$f_j(x) = h_{y^{j-1}}(x,0) = b_1^{(j-1)}(0) a_1(x) + \cdots + b_{n-1}^{(j-1)}(0) a_{n-1}(x)$$

pour $j = 1, \dots, n$, alors les fonctions $f_1, \dots, f_n$, étantes les combinaisons linéaires des fonctions $a_1, \dots, a_{n-1}$, sont linéairement dépéndantes.

La raisonnement plus haut n'est pas la démonstration du Théorème 1, puisque dans la démonstration du Théorème 2 nous profitons le Théorème 1. Il se pose donc le

PROBLÈME

Donner la démonstration du Théorème 2 ne profitant pas du Théorème 1.

3. Nous allons considérer le problème suivant. Est-ce que si le rang de la matrice de Wronski de la fonction $h(x,y)$:

$$\begin{pmatrix} h(x,y), & h_y(x,y), & \ldots, & h_{y^{n-1}}(x,y) \\ h_x(x,y), & h_{yx}(x,y), & \ldots, & h_{y^{n-1}x}(x,y) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{x^{n-1}}(x,y), & h_{yx^{n-1}}(x,y), & \ldots, & h_{y^{n-1}x^{n-1}}(x,y) \end{pmatrix} \tag{7}$$

est égal à $p < n$ pour chaque (x,y), alors la fonction h doit être de la forme $a_1(x)b_1(y) + \cdots + a_p(x)b_p(y)$?

Le problème est suggéré par les deux théorèmes suivants:

THÉORÈME (A)

Si le rang de la matrice de Wronski des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ réelles d'une variable réelle de classe C^{n-1} est stable et plus petit que n, alors ces fonctions sont linéairement dépendantes ([4]).

THÉORÈME (B) (F. Neuman — [7] ou [10] p. 30)

Si pour la fonction h ayante le dérivée $h_{y^{n-1}x^{n-1}}$ continue, le déterminant de la matrice (7) est égal à zéro pour chaque (x,y) et le déterminant de la matrice analogue à la matrice (7) mais de degré $n-1$ est différent de zéro pour chaque (x,y), alors $h(x,y) = a_1(x)b_1(y) + \cdots + a_{n-1}(x)b_{n-1}(y)$.

Le Théorème (A) sera applique chez nous pour $n = 2$ et $n = 3$.

La réponse au problème plus haut est positive pour $p < 2$ pour chaque $n > p$ et pour $p = 2$ et $n = 3$, si la fonction h est réelle des variables réelles, ayante les dérivés continues jusqu'à $h_{y^{n-1}x^{n-1}}$.

Je donnerai les démonstrations de ces faits.

Pour $p = 0$ la thèse est évidente.

Passons au cas $p = 1$. D'après le théorème de M. Čadek et J. Šimša ([1] ou [10] p. 99) il suffit montrer que pour chaque point (x_0, y_0) dans $I \times J$, où I et J forment des intervalles dans $\mathbb{R}$, il existe un entourage de ce point tel que la fonction h est de la forme $f(x)g(y)$ dans cet entourage avec les fonctions f et g telles que chaque est localement linéairement indépendante (c. à d. elle est linéairement indépendante, donc pas identiquement zéro, dans chaque sous-ensemble ouvert d'un entourage de x_0 ou y_0). Remarquons qu'il suffit montrer que la fonction h est de la forme $f(x)g(y)$, puisque si $f \equiv 0$ dans un sous-ensemble ouvert d'un entourage de x_0 ou $g \equiv 0$ dans un sous-ensemble ouvert d'un entourage de y_0, alors la matrice (7) ne peut pas avoir toujours le rang égal à 1. Nous allons montrer ça par l'induction par rapport à n. Pour $n = 2$ notre théorème est démontré dans [6], mais plus bas je donne une autre démonstration, en outre pour la commodité du lecteur (plus facile, je crois). (Rappelons que l'équation $hh_{yx} - h_x h_y = 0$ c'est bien connue l'équation différentielle de d'Alembert).

Si $h(x_0, y_0) \neq 0$, alors $h(x,y) \neq 0$ sur un entourage de (x_0, y_0). Nous pouvous supposer que $h(x,y) > 0$ sur cet entourage puisque dans le cas $h(x,y) < 0$ nous pouvons replacer h par $-h$. L'équation de d'Alembert a dans ce cas la forme

$$\frac{\partial^2 \ln h(x,y)}{\partial x \partial y} = 0,$$

d'où $h(x,y) = a(x)b(y)$.

Soit $h_y^2(x_0,y_0) + h_{yx}^2(x_0,y_0) \neq 0$, donc $h_y(x,y) \neq 0$ sur un entourage E de (x_0,y_0) ou $h_{yx}(x,y) \neq 0$ sur un entourage E de (x_0,y_0). Nous allons démontré que

$$\begin{vmatrix} h(x,y_1), & h(x,y_2) \\ h_x(x,y_1), & h_x(x,y_2) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{pour chaque } (x,y_1),\ (x,y_1) \text{ de } E.$$

D'après de Théorème 1 de [2] ils existent $\lambda(x)$ et $\eta(x)$ tels que

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} h(x,y_1), & h(x,y_2) \\ h_x(x,y_1), & h_x(x,y_2) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} h(x,y_1), & h(x,y_2) - h(x,y_1) \\ h_x(x,y_1), & h_x(x,y_2) - h_x(x,y_1) \end{vmatrix} \\ &= \lambda(x) \begin{vmatrix} h(x,y_1), & h_y(x,\eta(x)) \\ h_x(x,y_1), & h_{yx}(x,\eta(x)) \end{vmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'après le Théorème 1 de cette note, puisque les fonctions $y \longrightarrow h(x,y)$ et $y \longrightarrow h_x(x,y)$ sont linéairément dépendantes d'après le Théorème (A) plus haut. De plus le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} h(x,y_1), & h(x,y_2) \\ h_x(x,y_1), & h_x(x,y_2) \end{pmatrix}$$

est égal à 1, puisque dans le cas contraire il existerait un x_0 tel que $h(x_0,y_1) = h(x_0,y_2) = 0 = h_x(x_0,y_1) = h_x(x_0,y_2)$, alors ils existeraient les χ et ε tels que $h_y(x_0,\chi) = 0 = h_{xy}(x_0,\varepsilon)$, en contradiction au choix de l'entourage E. Les fonctions $x \longrightarrow h(x,y_1)$ et $x \longrightarrow h(x,y_2)$ sont donc linéairément dépendantes. Ils existent donc $\alpha(y_1,y_2)$ et $\beta(y_1,y_2)$ tels que

$$\alpha(y_1,y_2)h(x,y_1) + \beta(y_1,y_2)h(x,y_2) = 0 \quad \text{et} \quad \alpha^2(y_1,y_2) + \beta^2(y_1,y_2) \neq 0.$$

Soit $\overline{y}$ tel que $h(x,\overline{y}) \not\equiv 0$. Dans ce cas

$$\alpha(\overline{y},y)h(x,\overline{y}) + \beta(\overline{y},y)h(x,y) = 0$$

nous donne $\beta(\overline{y},y) \neq 0$, puisque dans le cas contraire $h(x,\overline{y}) \equiv 0$ ($\alpha(\overline{y},y) \neq 0$ dans ce cas) et ça est impossible. Nous avons donc

$$h(x,y) = \frac{\alpha(\overline{y},y)}{\beta(\overline{y},y)}\, h(x,\overline{y}),$$

alors la forme exigée de la fonction h.

Dans le cas $h_x(x_0,y_0) \neq 0$ il suffit raisonner comme plus haut, en changeant x et y. Notre théorème est donc démontré pour $n = 2$.

Supposons maintenant que notre théorème est vrai pour la matrice de Wronski de la dimension $n \times n$ et que la matrice de Wronski de la fonction h de la dimension $(n+1) \times (n+1)$ a le rang égal à 1. Ils existent donc i et j tels que $0 \leqslant i,\, j \leqslant n$ et $h_{y^i x^j}(x_0, y_0) \neq 0$. Il existe alors un entourage de (x_0, y_0) où $h_{y^i x^j}(x, y) \neq 0$. Considérons tous les cas possibles.

a) Les indices i et j sont tels que $0 \leqslant i,\, j \leqslant n-1$. La matrice de Wronski de h de la dimension $n \times n$ a donc le rang 1 sur un entourage de (x_0, y_0) et nous avons la thése d'après la supposition inductive.

b) Soit $i = 0$ ou $i = 1$ et $j = n$. La matrice de Wronski de la dimension $n \times n$ de la fonction h_x a donc le rang égal à 1 dans un entourage de (x_0, y_0), alors d'après la supposition inductive nous avons $h_x(x, y) = f(x)g(y)$, d'où $h(x, y) = k(x)g(y) + a(y)$, où $k'(x) = f(x)$. Puisque $hh_{yx} - h_x h_y = 0$, on a $f(ag' - a'g) = 0$. Si $f \equiv 0$ nous avons la thèse. Si $f \not\equiv 0$ on a $ag' - a'g = 0$ et puisque $g \neq 0$ dans le cas $i = 0$ $(0 \neq h_{x^n} = f^{(n)}g)$ et $g' \neq 0$ pour $i = 1$ $(0 \neq h_{yx^n} = f^{(n)}g')$, alors $a(y) = \alpha g(y)$ pour un α constant. Il en résulte la thèse.

c) Dans le cas $i = n$ et $j = 0$ ou $j = 1$ il suffit changer x et y dans le raisonnement plus haut.

d) Dans les cas $2 \leqslant i \leqslant n$ et $j = n$ la matrice de Wronski de la fonction h_{yx} de la dimension $n \times n$ a le rang égal à 1 sur un entourage de (x_0, y_0), d'où $h_{yx}(x, y) = f(x)g(y)$ et de là $h_y(x, y) = k(x)g(y) + a(y)$, où $k' = f$. Puisque
$$h_{y^{i-1}} h_{y^i x^n} - h_{y^i} h_{y^{i-1} x^n} = 0$$
nous recevons
$$a^{(i-2)}(y) k^{(n)}(x) g^{(i-1)}(y) - a^{(i-1)}(y) k^{(n)}(x) g^{(i-2)}(y) = 0,$$
d'où, puisque
$$0 \neq h_{y^i x^n} = f^{(n-1)} g^{(i-1)} = k^{(n)} g^{(i-1)}, \quad a^{(i-2)}(y) = \alpha g^{(i-2)}(y)$$
pour un α constant. Il en résulte que $a(y) = \alpha g(y) + w(y)$, où $w(y)$ est un polynôme de degré $i - 3$ (le degré du polynôme “0” est égal à -1), d'où $h_y(x, y) = [k(x) + \alpha]\, g(y) + w(y)$. Puisque $h_y h_{y^i x^n} - h_{y^i} h_{yx^n} = 0$ on a $w(y) k^{(n)}(x) g^{(i-1)}(y) = 0$, d'où $w(y) = 0$, donc $h_y(x, y) = [k(x) + \alpha] g(y) = F(x)G(y)$.
Nous avons alors $h(x, y) = F(x)K(y) + b(x)$, où $K' = G$. Puisque
$$h_{x^{n-1}} h_{y^i x^n} - h_{y^i x^{n-1}} h_{x^n} = 0,$$
nous avons
$$b^{(n-1)}(x) F^{(n)}(x) K^{(i)}(y) - b^{(n)}(x) F^{(n-1)}(x) K^{(i)}(y) = 0,$$
d'où $b^{(n-1)}(x) = \gamma F^{(n-1)}(x)$ pour un γ constant, alors $b(x) = \gamma F(x) + p(x)$, où $p(x)$ est un polynôme de degré $n - 2$. Il en résulte que $h(x, y) = F(x)[K(y) + \gamma] + p(x)$. Puisque

$$hh_{y^i x^n} - h_{y^i} h_{x^n} = 0,$$

nous avons

$$p(x)F^{(n)}(x)K^{(i)}(y) = 0,$$

alors $p(x) = 0$, donc $h(x,y) = [K(y) + \gamma]F(x)$.

e) Le cas $i = n$ et $0 \leqslant j \leqslant n$ est analogue.

La démonstration est donc terminée dans tous cas.

Nous allons donner la démonstration pour $p = 2$ et $n = 3$.

D'après le Théorème 5.2.1 dans [10] p. 99 il suffit montrer que pour chaque point (x_0, y_0) de $I \times J$ il existe un entourage de ce point dans lequel la fonction h est de la forme

$$h(x,y) = f_1(x)g_1(y) + f_2(x)g_2(y), \tag{8}$$

où le système des fonctions f_1, f_2 et le système des fonctions g_1, g_2 sont linéairement localement indépendantes. Il suffit montrer seulement, comme plus haut, que h est de la forme (8), puisque si f_1, f_2 sont linéairement dépendantes dans un sous-ensemble d'un entourage de x_0 ou si g_1, g_2 sont linéairement dépendantes dans un sous-ensemble d'un entourage de y_0, alors h est de la forme $f(x)g(y)$ dans un sous-ensemble ouvert d'un entourage de (x_0, y_0), donc la matrice (7) ne peut pas avoir toujours le rang égal à 2.

D'après la supposition faite et d'après le théorème dans [1] ils existent des fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : J \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\alpha_1(y)h_{y^2}(x,y) + \alpha_2(y)h_y(x,y) + \alpha_3(y)h(x,y) = 0 \tag{9}$$

et

$$\alpha_1^2(y) + \alpha_2^2(y) + \alpha_3^2(y) \neq 0. \tag{10}$$

En différentiant (9) une fois et encore une fois par rapport à x nous recevons les deux égalités qui avec (9) nous permettent montrer la continuité de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ par la méthode analogue à telle qui est dans la démonstration du lemme dans [3].

Soit (x_0, y_0) un point arbitraire de $I \times J$.

1. Si $\alpha_1(y_0) \neq 0$, alors il existe un entourage du point y_0 dans lequel $\alpha_1(y) \neq 0$. Nous voyons d'après (9) que la fonction $h(x, \cdot)$ comme la fonction de la variable deuxième avec x fixé, est une solution de l'équation différentielle linéaire de l'ordre 2 de la forme

$$Y''(y) + \frac{\alpha_2(y)}{\alpha_1(y)}Y'(y) + \frac{\alpha_3(y)}{\alpha_1(y)}Y(y) = 0,$$

alors la fonction h doit avoir la forme (8). Supposons donc dans la suite que $\alpha_1(y_0) = 0$ et désignons par M_{ji} pour $i, j = 1, 2, 3$ le mineur de la matrice (7) avec $n = 3$ pour l'élément $h_{y^{i-1}x^{j-1}}$. Puisque $\alpha_2^2(y_0) + \alpha_3^2(y_0) \neq 0$ et

$$\alpha_2(y_0)h_y(x,y_0)+\alpha_3(y_0)h(x,y_0)=0, \tag{11}$$
$$\alpha_2(y_0)h_{yx}(x,y_0)+\alpha_3(y_0)h_x(x,y_0)=0,$$
$$\alpha_2(y_0)h_{yx^2}(x,y_0)+\alpha_3(y_0)h_{x^2}(x,y_0)=0,$$

on a

$$M_{ji}(x,y_0)=0 \quad \text{pour } i=3,\ j=1,2,3. \tag{12}$$

Ils existent d'après le même théorème dans [4] des fonctions $\beta_1,\beta_2,\beta_3 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\beta_1(x)h_{x^2}(x,y)+\beta_2(x)h_x(x,y)+\beta_3(x)h(x,y)=0 \tag{13}$$

et

$$\beta_1^2(x)+\beta_2^2(x)+\beta_3^2(x)\neq 0. \tag{14}$$

2. Si $\beta_1(x_0)\neq 0$ en raisonnant comme plus haut nous constatons que la fonction h est de la forme (8). Supposons donc que $\beta_1(x_0)=0$, d'où comme plus haut

$$M_{ji}(x_0,y)=0 \quad \text{pour } i=1,2,3 \text{ et } j=3. \tag{15}$$

3. Soit à présent $M_{21}(x_0,y_0)\neq 0$. Il existe donc un entourage du point (x_0,y_0) dans lequel $M_{21}(x,y)\neq 0$. Puisque la dérivée $\partial_x M_{31}$ du mineur M_{31} par rapport à x est égale à M_{21} nous avons d'après le théorème de Lagrange et d'après (15) qu'il existe ξ tel que

$$\begin{aligned} M_{31}(x,y) &= M_{31}(x,y)-M_{31}(x_0,y)\\ &= \partial_x M_{31}(\xi,y)(x-x_0)\\ &= M_{21}(\xi,y)(x-x_0), \end{aligned}$$

d'où $M_{31}(x,y)\neq 0$ pour $x\neq x_0$. S'il existerait $\overline{x}\neq x_0$ tel que $\beta_1(\overline{x})=0$, donc en posant $x=\overline{x}$ dans

$$\beta_1(x)h_{x^2y}(x,y)+\beta_2(x)h_{xy}(x,y)+\beta_3(x)h_y(x,y)=0$$
$$\beta_1(x)h_{x^2y^2}(x,y)+\beta_2(x)h_{xy^2}(x,y)+\beta_3(x)h_{y^2}(x,y)=0$$

(la différentiation de l'égalité (13) par rapport à y une fois et deux fois), nous aurions d'après $M_{31}(\overline{x},y)\neq 0$ que $\beta_2(\overline{x})=\beta_3(\overline{x})=0$ et ça est impossible d'après (14). Il doit être alors $\beta_1(x)\neq 0$ pour $x\neq x_0$. Il en résulte qu'ils existent les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$, $h_1(y)$, $h_2(y)$ telles que

$$h(x,y)=\begin{cases} g_1(y)f_1(x)+g_2(y)f_2(x) & \text{pour } x<x_0,\\ h_1(y)f_1(x)+h_2(y)f_2(x) & \text{pour } x>x_0. \end{cases} \tag{16}$$

Puisque f_1,f_2 forment le système fondamental d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 elles sont de classe C^2 et le wronskien $W(f_1,f_2)\neq 0$, donc les fonctions g_1,g_2,h_1,h_2 sont de classe C^3.

De plus

$$\begin{aligned} 0 &\neq M_{21}(x_0, y) \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{M_{31}(x,y) - M_{31}(x_0,y)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{M_{31}(x,y)}{x - x_0} \\ &= \begin{cases} \left(\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{W(f_1, f_2)}{x - x_0} \right) W(g_1', g_2') \\ \left(\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{W(f_1, f_2)}{x - x_0} \right) W(h_1', h_2') \end{cases} \end{aligned}$$

et de là $W(g_1', g_2') \neq 0 \neq W(h_1', h_2')$.

Nous avons pour $x < x_0$ d'après (16)

$$h_y = g_1' f_1 + g_2' f_2, \quad h_{y^2} = g_1'' f_1 + g_2'' f_2, \quad h_{y^3} = g_1''' f_1 + g_2''' f_2.$$

En calculant f_1, f_2 de deux premières équations et en posant les dans l'équation troisième nous recevons pour $x < x_0$

$$W(g_1', g_2') h_{y^3} = F_1(y) h_{y^2} + F_2(y) h_y \tag{17}$$

pour les fonctions F_1 et F_2 correspondantes continues.

Nous recevons de même façon pour $x > x_0$

$$W(h_1', h_2') h_{y^3} = G_1(y) h_{y^2} + G_2(y) h_y \tag{18}$$

pour les fonctions G_1 et G_2 correspondantes continues.

En fixant dans (17) et (18) la variable y nous recevons d'après le Lemme 1 dans [4] p. 178 que (11) a lieu pour chaque x. La fonction $h_y(x, -)$, comme la fonction de la variable y avec x fixé, est une solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, alors

$$h_y(x, y) = \overline{a}_1(x) \overline{b}_1(y) + \overline{a}_2(x) \overline{b}_2(y)$$

pour les fonctions $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{b}_1$, $\overline{b}_2$ correspondantes. Il en résulte que

$$h(x, y) = a_1(x) b_1(y) + a_2(x) b_2(y) + c(x) \tag{19}$$

pour les fonctions a_1, a_2, b_1, b_2 correspondantes. En posant cette forme de la fonction h dans (11) avec $y = y_0$ nous recevons

$$\begin{aligned} &\alpha_2(y_0) \left[\overline{a}_1(x) \overline{b}_1(y_0) + \overline{a}_2(x) \overline{b}_2(y_0) \right] \\ &\quad + \alpha_3(y_0) \left[a_1(x) b_1(y_0) + a_2(x) b_2(y_0) + c(x) \right] = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Remarquons que $\alpha_3(y_0) \neq 0$, puisqe dans le cas contraire nous avons d'après (11) que $h_y(x, y_0) = 0$, d'où $M_{21}(x, y_0) = 0$, contrairement à 3. Ils existent donc d'après (20) des nombres k, l tels que $c(x) = ka_1(x)+la_2(x)$, alors (19) nous donne la forme (8) de la fonction h.

4. Dans le cas $M_{12}(x_0, y_0) \neq 0$ il suffit changer x et y dans le raisonnement plus haut.
5. Puisque $\partial_x M_{32}(x, y) = M_{22}(x, y)$, si $M_{22}(x_0, y_0) \neq 0$ nous pouvons raisonner comme dans le cas 3.
6. Nous reste seulement le cas $M_{11}(x_0, y_0) \neq 0$, donc $M_{11}(x, y) \neq 0$ dans un entourage de (x_0, y_0).

   Nous recevons en différentiant (13) une fois et deux fois par rapport à y et en posant $x = x_0$

$$\beta_1(x_0)h_{x^2y}(x_0, y) + \beta_2(x_0)h_{xy}(x_0, y) + \beta_3(x_0)h_y(x_0, y) = 0$$

$$\beta_1(x_0)h_{x^2y^2}(x_0, y) + \beta_2(x_0)h_{xy^2}(x_0, y) + \beta_3(x_0)h_{y^2}(x_0, y) = 0.$$

   En calculant $\beta_2(x_0)$ de ce système avec $y = y_0$ comme les système des inconnues $\beta_1(x_0)$ et $\beta_2(x_0)$ nous recevons que $\beta_2(x_0) = 0$ ($M_{11}(x_0, y_0) \neq 0$ et $M_{21}(x_0, y_0) = 0$). Puisque aussi $\beta_1(x_0) = 0$ on a $\beta_3(x_0) \neq 0$ (voir (14)), d'où d'après (13) avec $x = x_0$ nous avons $h(x_0, y) = 0$ et de là $h_y(x_0, y) = h_{y^2}(x, y) = 0$. Puisque $M_{11}(x_0, y_0) \neq 0$, alors $h_{yx}(x_0, y_0) \neq 0$ ou $h_{xy^2}(x_0, y_0) \neq 0$, d'où il existe un entourage de (x_0, y_0) tel que $h_{yx}(x, y) \neq 0$ dans cet entourage ou $h_{xy^2}(x, y) \neq 0$ dans un entourage de (x_0, y_0). Nous avons dans le cas premier qu'il existe ξ tel que

$$h_y(x, y) = h_y(x, y) - h_y(x_0, y) = h_{yx}(\xi, y)(x - x_0) \neq 0 \quad \text{pour } x \neq x_0$$

   et dans le cas deuxième qu'il existe ξ tel que

$$h_{y^2}(x, y) = h_{y^2}(x, y) - h_{y^2}(x_0, y) = h_{y^2x}(\xi, y)(x - x_0) \neq 0 \quad \text{pour } x \neq x_0.$$

   Il en résulte que pour $\overline{x}$ fixé et différent de x_0 on ne peut pas être $h(\overline{x}, y) \equiv 0$, donc dans chaque point (x, y) pour lequel $x \neq x_0$ nous devons avoir un des cas 1-5. Il existe alors pour chaque tel point un entourage dans lequel la fonction h est de la forme (8). De là d'après le Théorème 5.2.1 dans [10] p. 99 nous avons (16). Nous avons de plus

$$\partial_x \left(\begin{vmatrix} h_y(x, y), & h_{y^2}(x, y) \\ h_{yx^2}(x_0, y), & h_{y^2x^2}(x_0, y) \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} h_{yx}(x, y), & h_{y^2x}(x, y) \\ h_{yx^2}(x_0, y), & h_{y^2x^2}(x_0, y) \end{vmatrix},$$

   donc

$$0 \neq M_{11}(x_0, y)$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\begin{vmatrix} h_y(x, y), & h_{y^2}(x, y) \\ h_{yx^2}(x_0, y), & h_{y^2x^2}(x_0, y) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} h_y(x_0, y), & h_{y^2}(x_0, y) \\ h_{yx^2}(x_0, y), & h_{y^2x^2}(x_0, y) \end{vmatrix}}{x - x_0}$$

$$
= \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{\begin{vmatrix} f_1(x), & f_2(x) \\ f_1''(x), & f_2''(x) \end{vmatrix}}{x - x_0} W(g_1', g_2'), \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{\begin{vmatrix} f_1(x), & f_2(x) \\ f_1''(x), & f_2''(x) \end{vmatrix}}{x - x_0} W(h_1', h_2'), \end{cases}
$$

alors $W(g_1', g_2') \neq 0 \neq W(h_1', h_2')$. La suite est analogue que dans le cas 3.

Nous avons donc démontré le théorème suivant:

Théorème 3

Soit $h : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$, où I et J sont des intervales réels, une fonction ayante les dérivées continues jusqu'à $h_{y^{n-1}x^{n-1}}$, pour laquelle la matrice (7) a le rang égal à p en chaque point de $I \times J$.

a) Si $p = 1$ et $n > p$, alors $h(x,y) = a_1(x)b_1(y)$ pour $a_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $b_1 : J \longrightarrow \mathbb{R}$.

b) Si $p = 2$ et $n = 3$, alors $h(x,y) = a_1(x)b_1(y) + a_2(x)b_2(y)$ pour $a_1, a_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $b_1, b_2 : J \longrightarrow \mathbb{R}$.

Remarquons enfin que la condition que la matrice (7) pour la fonction $h(x,y) = a_1(x)b_1(y) + \cdots + a_p(x)b_p(y)$ a le rang toujours égal à p est équivalente à la condition que les matrices

$$
\left(a_i^{(j)}(x)\right)_{\substack{i=1,\ldots,p \\ j=0,\ldots,n-1}} \quad \text{et} \quad \left(b_i^{(j)}(y)\right)_{\substack{i=1,\ldots,p \\ j=0,\ldots,n-1}}
$$

ont les rangs toujours égaux à p.

Pour les fonctions $a_i(x)$ et $b_i(y)$ de classe C^n cette condition dernière est équivalente à la suivante: le système des fonctions $a_1(x), \ldots, a_p(x)$ $(b_1(y), \ldots, b_p(y))$ forme des intégrales d'une équation différentielle ordinaire, linéaire et homogène de la forme

$$
y^{(n)}(t) = p_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + p_0(t)y(t) \tag{21}
$$

avec les coefficient $p_i(t)$ continus ([3] et aussi [5]). Cela désigne que notre problème de la décomposition de la fonction h à la forme $a_1(x)b_1(y) + \cdots + a_p(x)b_p(y)$ c'est en réalité pour la fonction h de classe C^n le problème de la décomposition de cette fonction à cette forme avec les fonctions $a_i(x)$ et $b_i(y)$ étantes des solutions de l'équation de la forme (21).

L'exemple de la fonction

$$
h(x,y) = x|x| + 1 \quad \text{pour } (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}
$$

montre que la supposition de classe C^n de la fonction h est essentielle dans nos considérations dernières, même si la matrice (7) pour $n = 2$ a le rang égal à 1. On ne peut pas décomposer la fonction h à la forme $a(x)b(y)$, où $a(x)$

et $b(y)$ sont des intégrales de l'équation de la forme (21) pour $n = 2$, à cause de la régularité de $a(x)$. Remarquons que notre fonction h n'est pas aussi une solution de l'équation de la forme (21) pour $n = 1$ puisque

$$(t|t|+1)'_{t=-1} = 2 \neq 0 = p_0(-1)\cdot 0 = p_0(-1)(t|t|+1)_{t=-1},$$

formant en même temps cette solution dans chaque intervalle qui ne contient pas -1 (il suffit prendre $p_0(t) = \frac{(t|t|+1)'}{(t|t|+1)}$. La fonction $h(x,y) = xy$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ est de la forme $a(x)b(y)$, sa matrice (7) pour $n = 2$ a le rang égal à 1, $a(x)$ et $b(y)$ sont des solutions de l'équation (21) d'ordre 2, n'étant pas des intégrales de l'équation de cette forme d'ordre 1 ($(t)'_{t=0} = 1 \neq 0 = p_0(0)\cdot 0$).

Travaux cités

[1] M. Čadek, J. Šimša, *Decomposition of smooth functions of two multidimensional variables*, Czechoslovak Math. **41** (116) (1991), 342-358.

[2] M. Kucharzewski, *Pewne uogólnienie twierdzenia o wartości średniej*, Zeszyty Naukowe WSP w Katowicach, Sekcja Matematyki **4** (1964), 43-49.

[3] M. Malec, *Sur les intégrales d'une équation différentielle, ordinaire, linéaire et homogène et sur une classification des fonctions de classe C^∞ dans l'intervalle* Δ, Arch. Math. (Brno) **3** (1967), 105-115.

[4] Z. Moszner, *Sur le wronskien et la dépendance linéaire des fonctions*, Bull. Sci. Math. (2) **85** (1961), 165-190.

[5] Z. Moszner, *ω-зависимостъ функций и её применения*, Московский Областной Педагогический Институт им. Н.К. Крупской, Учебные Записки **166** (1966), 303-314.

[6] Z. Moszner, *Remarks on the wronskian and on sums decompositions*, Aeqationes Math. **58.1-2** (1999), 125-134.

[7] F. Neuman, *Functions of two variables and matrices involving factorisation*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **3** (1981), 7-11.

[8] G. Peano, *Sur le déterminant Wronskien*, Mathesis **9** (1889), 75 et 110.

[9] Th.M. Rassias, *A criterion for a function to be represented as a sum of products of factors*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **14** (1986), 377-382.

[10] Th.M. Rassias, J. Šimša, *Finite sums decompositions in mathematical analysis*, John Wiley & Sons, Chichester, 1995.

Institute of Mathematics
Pedagogical University
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
Poland
E-mail: zmoszner@wsp.krakow.pl

Manuscript received: October 21, 1999 and in final form: June 19, 2000