Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis
Folia 4 Studia Mathematica I (2001)

Zenon Moszner

Sur quelques problèmes ouverts

Résumé. On pose les problèmes au sujet de la raréfaction des ensembles, des prolongements de la mesure de Jordan et des homomorphismes, de la stabilité de l'équation de translation, de la décomposition des fonctions et sur les opérateurs déterminés par les équations fonctionnelles.

Problème 1 de la raréfaction d'un ensemble de mesure nulle [1]

E. Borel [1] a introduit une notion de la raréfaction d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de mesure lebesguienne nulle, légèrement modifiée par M. Fréchet [2]. On dit que la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ converge plus rapidement que la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu$ si

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{\nu=n}^{\infty} v_\nu}{\sum_{\nu=n}^{\infty} u_\nu} > 1.$$

Nous comprenons par suite majorante d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ une suite d'intervalles ouvertes I_ν dont la série des longueurs $\sum_{\nu=1}^{\infty} |I_\nu|$ est convergente et qui recouvre l'ensemble E de manières que chaque point de E appartienne à une infinité d'intervalles de I_ν. E. Borel a démontré qu'il existe la suite majorante de E si et seulement si E est de mesure de Lebesgue nulle. Enfin E et F étant de mesure nulle, l'ensemble E est dit plus raréfié que l'ensemble F (en symbole $\operatorname{Rar} E > \operatorname{Rar} F$) s'il existe une suite majorante de E dont la série des longueurs converge plus rapidement que la série des longueurs de chaque suite majorante de F. Si ni $\operatorname{Rar} E > \operatorname{Rar} F$ ni $\operatorname{Rar} F > \operatorname{Rar} E$, nous disons que les ensembles E et F ont le même ordre de raréfaction.

Le problème ouvert est suivant: existe-il des ensemble E et F pour lesquels $\operatorname{Rar} E > \operatorname{Rar} F$, en particulier existe-il un ensemble E tel que l'ensemble réduit à un point est plus raréfié que E?

On peut démontré [3] que chaque sous-ensemble d'un ensemble du type F_σ et de mesure nulle a le même ordre de raréfaction que l'ensemble réduit à un point. Cette situation montre que la notion de raréfaction n'est pas bonne pour distinguer entre les ensembles de mesure nulle (il y a trop des ensembles les

[1] Mathematics Subject Classification (2000): 28E15.

plus raréfiés). Mais remarquons qu'il existe des ensembles qui ne sont pas des sous-ensembles des ensembles du type F_σ et de mesure nulle, par exemple des ensembles du type G_δ, de mesure nulle et recouvreant l'ensemble des nombres rationnels.

Références

[1] E. Borel, *Éléments de la théorie des ensembles*, Éditions Albin Michel, Paris, 1949.

[2] M. Fréchet, *Sur généralisation de la raréfaction*, Comptes rendus de l'Acad. des Sci. (Paris) **252** (1961), 1245-1250.

[3] Z. Moszner, *Sur une notion de la raréfaction d'un ensemble de mesure nulle*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **83** (1966), 191-200.

Problème 2 du prolongement de la mesure de Peano-Jordan [2]

Considérons la mesure comme une fonction définie sur un corps des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$, non-négative, invariante par rapport à l'isométrie, additive pour les deux ensembles sans le point intérieure commun et positive pour un cube n-dimensionnel. On sait que la mesure de Peano-Jordan est de cette sorte sur la familiie $\mathbf{J}$ des ensembles mesurables au sens de Peano-Jordan et que cette mesure est unique sur cette famille. Il se pose la question est-ce qu'on peut prolonger cette mesure? La reponse est positive. On peut prolonger la mesure de Peano-Jordan sur le plus petite corps $\mathbf{C}$ recouvrant la famille $\mathbf{J}$ et la famille des ensembles non-denses. On peut aussi démontrer que si nous nous restreignons aux ensembles bornés, alors le plus grand corps sur lequel ce prolongement pourrait être possible c'est le corps $\mathbb{N}$ des ensembles bornés ayants la frontière non-dense (on a $\mathbf{J} \subsetneq \mathbf{C} \subsetneq \mathbf{N}$). Nous savons (le résultat de E. Szpilrajn-Marczewski, voir [2] p. 234) que ce prolongement existe pour $n = 1, 2$. Les problèmes suivants sont ouverts [1]:

a) est-ce que ce prolongement sur $\mathbb{N}$ est unique pour $n = 1, 2$,

b) existe-il ce prolongement pour $n > 2$ (unique)?

Références

[1] Z. Moszner, *Problème*, Aequationes Math. **11.2/3** (1974), 311-312.

[2] A. Tarski, *Über das absolute Maß linear Punktmengen*, Fundamenta Math. **30** (1938), 218-234.

[2] Mathematics Subject Classification (2000): 28A75.

Problème 3 du prolongement d'un homomorphisme [3]

On considère dans beaucoup des domaines de mathématique le groupe L_s^1 comme l'ensemble des suites $(a_1, \ldots, a_s)$, où $a_1 \neq 0$, avec l'opération définie comme il suit:

$$(a_1, \ldots, a_s) \star (b_1, \ldots, b_s) = (c_1, \ldots, c_s),$$

où c_ν pour $\nu = 1, \ldots, s$ est la dérivée d'ordre ν d'une fonction composée $f(x) = g(h(x))$ si $a_1, \ldots, a_\nu$ sont les dérivées des ordres $1, \ldots, \nu$ de la fonction extérieure $g(y)$ et $b_1, \ldots, b_\nu$ sont les dérivées des ordres $1, \ldots, \nu$ de la fonction intérieure $h(x)$.

L. Reich ([4] p. 309 — il y a là une méprise: il doit être L_3^r et L_4^r au lieu de L_r^3 et L_r^4) a posé la question suivante: quand l'homomorphisme $h_s = (f_1, \ldots, f_s)$ de $\mathbb{R}_+$ à L_s^1 est prolongeable à l'homomorphisme $h_{s+1} = (f_1, \ldots, f_s, f_{s+1})$ de $(\mathbb{R}, +)$ à L_{s+1}^1 (le problème de l'existence de la fonction f_{s+1})?

On démontre dans [3] que pour $s = 1, 2$ chaque homomorphisme peut être prolongé, mais pour $s = 3, 4$ il existe des homomorphismes qui ne sont pas prolongeables. J'ai formulé ([4] p. 309) la conjecture que ce prolongement est possible si $f_1 \neq 1$ et dans le cas si $h_s = (1, 0, \ldots, 0, f_{p+2}, \ldots, f_s)$, où $f_{p+2} \neq 0$, ce prolongement est possible si et seulement si f_{s-p} est un polynôme de f_{p+2}.

On démontre dans [2] la partie "seulement si" (la nécéssité) de la deuxième partie de cette conjecture, la partie première et la condition "si" (la suffisance) sont ouvertes.

On peut considérer le même problème pour le groupe L_s^n qui est défini analogiquement que L_s^1, seulement dans la définition de l'opération dans L_s^n on remplace la composition de deux fontions d'une variable par la superposition des deux systèmes de n fonctions des n variables (voir [1] p. 7-12). Ici s désigne l'ordre des dérivées partielles de cette superposition, donc L_s^n est la suite de $n^2 + n^3 + \cdots + n^{s+1}$ éléments, alors dans ce cas

$$\begin{aligned} &h_s(x) \\ &= ((f_{j_1}^i(x))_{i,j_1=1,\ldots,n}, (f_{j_1 j_2}^i(x))_{i,j_1,j_2=1,\ldots,n}, \ldots, (f_{j_1\ldots j_s}^i(x))_{i,j_1,\ldots,j_s=1,\ldots,n}). \end{aligned}$$

Le problème du prolongement n'est pas banal puisque pour n arbitraire l'homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ à L_3^n de la forme:

$$\begin{aligned} &f_{j_1}^i(x) = 1 \quad \text{pour } i = j_1; \qquad f_{j_1}^i(x) = 0 \quad \text{pour } i \neq j_1; \\ &f_{11}^1(x) = f(x) \text{ additive}; \qquad f_{j_1 j_2}^i(x) = 0 \quad \text{pour } (i, j_1, j_2) \neq (1,1,1); \\ &f_{111}^1(x) = \tfrac{3}{2} f^2(x) + g(x), \text{ où } g(x) \text{ additive}; \\ &f_{j_1 j_2 j_3}^i(x) = \tfrac{3}{2} f(x) \quad \text{pour } (i, j_1, j_2, j_3) \neq (1,1,1,1); \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{où toujours } i, j_1, j_2, j_3 = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

[3] Mathematics Subject Classification (2000): 20F99, 39B52.

n'est pas prolongeable à l'homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ à L_4^n si $f(x)$ n'est pas idéntiquement zéro et s'il n'existe pas une constante a telle que $g(x) = af(x)$.

Références

[1] J. Aczél, S. Gołąb, *Funktionalgleichchungen der Theorie der geometrischen Objekte*, PWN, Warszawa, 1960.

[2] W. Jabłoński, *On extensibility of some homomorphisms*, Wyż. Szkoła Ped. Kraków, Rocznik Nauk.-Dydakt. 207 Prace Mat. **16** (1999), 35-43.

[3] S. Midura, Z. Wilczyński, *Sur les homomorphismes du groupe* $(\mathbb{R}, +)$ *au groupe* L_s^1 *pour* $s \leqslant 5$, Wyż. Szkoła Ped. Kraków, Rocznik Nauk.-Dydakt. 159 Prace Mat. **13** (1993), 241-258.

[4] *The Twenty-eight International Symposium on Functional Equations, August 23 – September 1, 1990, Graz-Mariatrost, Austria. Report of the Meeting*, Aequationes Math. **41** (1991), 248-310.

Problème 4 de la stabilité de l'équation de translation [4]

Nous entendons par l'équation de translation l'équation fonctionnelle de la forme

$$F(F(\alpha, x), y) = F(\alpha, x \cdot y),$$

où $F : \Gamma \times G \longrightarrow \Gamma$ est une fonction cherchée, Γ étant un ensemble arbitraire et $(G, \cdot)$ forme un groupoïde donné. Soit dans Γ une métrique ρ. On dit que cette équation est stable si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ let que pour chaque fonction $H : \Gamma \times G \longrightarrow \Gamma$ si

$$\forall \alpha \in \Gamma,\ x, y \in G :\ \rho(H(H(\alpha, x), y), H(\alpha, x \cdot y)) \leqslant \delta$$

alors il existe une solution F de l'équation de translation pour laquelle

$$\forall \alpha \in \Gamma,\ x \in G :\ \rho(H(\alpha, x), F(\alpha, x)) \leqslant \varepsilon.$$

Si par exemple G se réduit à un point $\{e\}$, l'équation de translation qui dans ce cas peut être écrite comme $f(f(\alpha)) = f(\alpha)$, où $f(\alpha) = F(\alpha, e)$, est stable pour chaque métrique dans Γ arbitraire [2].

Il se pose le problème [1]: existe-il l'espace métrique (Γ, ρ) et le groupoïde $(G, \cdot)$ pour lesquels l'équation de translation n'est pas stable dans ce sens?

On définit aussi la stabilité de l'équation de translation comme il suit: si pour une fonction $H : \Gamma \times G \longrightarrow \Gamma$ l'ensemble

$$\{\rho(H(H(\alpha, x), y), H(\alpha, x \cdot y)) :\ \alpha \in \Gamma,\ x, y \in G\}$$

est borné, alors il existe une solution F de l'équation de translation telle que l'ensemble $\{\rho(H(\alpha, x), F(\alpha, x)) :\ \alpha \in \Gamma,\ x \in G\}$ est aussi borné. L'équation

[4] Mathematics Subject Classification (2000): 39B82.

$f(f(\alpha)) = f(\alpha)$ est stable d'après cette définition pour chaque l'espace métrique (Γ, ρ), mais il existe un espace métrique (Γ, ρ) et un groupe $(G, \cdot)$ tels que l'équation de translation n'est pas stable dans ce sens [2].

Références

[1] Z. Moszner, *General theory of the translation equation*, Aequationes Math. **50** (1995), 17-37.

[2] Z. Moszner, *Les équations et les inégalités liées à l'équation de translation*, Opuscula Math. **19** (1999), 19-43.

Problème 5 de la décomposition de la fonction de deux variables [5]

Supposons que pour une fonction $h : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$, où I et J sont des intervalles réels, tous les éléments (les dérivées partielles de h) de la matrice

$$M(x,y) = \left(h_{x^i y^j}(x,y)\right),$$

où $i, j = 0, \ldots, n$, sont continues. Est-il vrai le théorème suivant (la conjecture **C**):

- la condition rang $M(x,y) = p \leqslant n$ pour chaque $(x,y) \in I \times J$ est équivalente à l'existence des fonctions $f_k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g_k : J \longrightarrow \mathbb{R}$ pour $k = 1, \ldots, p$ telles que

  $$h(x,y) = f_1(x)g_1(y) + \cdots + f_p(x)g_p(y)$$

  et

  $$\text{rang}\left(f_k^{(i)}(x)\right)_{\substack{i=0,\ldots,n\\ k=1,\ldots,p}} = p = \text{rang}\left(g_k^{(i)}(y)\right)_{\substack{i=0,\ldots,n\\ k=1,\ldots,p}} \tag{1}$$

  pour chaque $x \in I$ et $y \in J$.

On sait ([1] et [2]) que cette conjecture est vraie pour $p = 1$ et $n \geqslant 1$ arbitraire et pour $p = 2 = n$.

Si cette conjecture serait vraie en général et si nous supposons que la fonction $x \longrightarrow h(x,y)$ est de classe C^{n+1} sur I pour chaque y dans J et la fonction $y \longrightarrow h(x,y)$ est aussi de classe C^{n+1} sur J pour chaque x de I, alors dans la conjecture en considération on pourrait remplacer (1) par la condition: $f_1, \ldots, f_p$, et de même les fonctions $g_1, \ldots, g_1$, forment un systeme linéairement indépendantes solutions d'une équation différentielle de la forme

$$y^{(n+1)} = a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y \tag{2}$$

avec les coefficients $a_\nu(x)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ continues sur I. De plus dans ce cas les fonctions $x \longrightarrow h(x,y)$, $x \longrightarrow h_y(x,y)$, ..., $x \longrightarrow h_{y^n}(x,y)$ sont des integrales

[5] Mathematics Subject Classification (2000): 35L70, 35L75, 26B40.

de la même équation de la forme (2) pour chaque y de J et les fonctions $y \longrightarrow h(x,y)$, $y \longrightarrow h_x(x,y)$, $\dots$, $y \longrightarrow h_{x^n}(x,y)$ sont les mêmes.

Le cas $n = 1$ est en liaison à l'équation différentielle de d'Alembert

$$hh_{xy} - h_x h_y = 0$$

qui a déjà sa théorie géométrique [3]. Les fonctions $h(x,y) = f(x)g(y)$ sont des solutions de cette équation, mais il y a aussi les autres solutions ([3], p. 32). Il résulte de nos considérations dans le cas $p \leqslant n = 1$ que le rang de la matrice

$$\begin{bmatrix} h & h_y \\ h_x & h_{yx} \end{bmatrix}$$

plus petite que 2 et la stabilité de ce rang pour $(x,y) \in I \times J$ entrainent la forme $f(x)g(y)$ de la fonction $h(x,y)$.

On ne peut pas remplacer dans notre conjecture **C** la supposition $p \leqslant n$ par la condition plus faible $p \leqslant n + 1$. En effect pour la fonction $h(x,y) = \frac{1}{x-y}$ sur $[0,1] \times [2,3]$ on a $hh_{xy} - h_x h_y \neq 0$ pour chaque $(x,y) \in [0,1] \times [2,3]$, mais $h(x,y)$ n'est pas de la forme $f_1(x)g_1(y) + f_2(x)g_2(y)$ puisque elle ne remplit pas de l'équation (voir [3], p. 30)

$$\begin{vmatrix} h & h_y & h_{y^2} \\ h_x & h_{yx} & h_{y^2x} \\ h_{x^2} & h_{yx^2} & h_{y^2x^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Références

[1] Z. Moszner, *Remarks on the Wronskian and on sums decompositions*, Aequationes Math. **58** (1999), 125-134.

[2] Z. Moszner, *Sur les généralisations du wronskien*, Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis Studia Mathematica, ce tome.

[3] Th.M. Rassias, J. Šimša, *Finite Sums Decompositions in Mathematical Analysis*, John Wiley & Sons, Chichester, 1995.

Problème 6 des propriétés des opérateurs déterminés par les équations fonctionnelles uniquement stables [6]

On considère dans la théorie de la stabilité des équations fonctionnelles les équations de la forme $G(f) = D(f)$ d'une fonction cherchée f qui sont uniquement stables dans ce sens (l'explication intuitive, on peut cela préciser des manières différentes) que pour chaque fonction g pour laquelle $G(g)$ n'est pas "loin" de $D(g)$ il existe exactement une solution f de cette équation qui

[6]Mathematics Subject Classification (2000): 39B82, 47B38, 47H99.

n'est pas "loin" de g. On peut dans ce cas examiner les propriétés de l'opérateur $O(g) := f$. Je donne un exemple.

En résolvant le problème de S.M. Ulam, D.H. Hyers a démontré le théorème suivant [2]:

Soient $(X, \cdot)$ et $(Y, \cdot)$ des espaces de Banach. Si pour $\varepsilon > 0$ la fonction $f : X \longrightarrow Y$ remplit la condition

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour } x, y \in X,$$

alors il existe exactement une fonction additive $a : X \longrightarrow Y$ telle que

$$|f(x) - a(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour } x \in X.$$

J'examine dans [3] pour l'opérateur $A(f(x)) = a(x)$ en outre son continuité par rapport à f et la continuité de $a(x)$ par rapport à x.

Il me semble intéressant le problème analogue pour les autres équations fonctionnelles uniquement stables.

Remarquons que

a) les opérateurs analogues sont considérés aussi dans [1] dans le cas plus générale et pour l'équation des fonctions exponentielles, mais sans des recherches des propriétés de ces opérateurs,

b) on considère dans [4] les équations fonctionnelles stables pas uniquement, c. à d. telles que pour chaque g comme plus haut il existe plus qu'une solution f comme ci-dessus et on examine les réstrictions au sujet de g et de f (par la notion de la meilleure approximation) sous lesquelles cet application de g à f est unique. Ces résultats permettent prolonger le problème formulé plus haut aussi aux équations stables pas uniquement.

Références

[1] R. Ger, P. Šemrl, *The stability of the exponential equation*, Proc. Amer. Math. Soc. **124/3** (1996), 779-787.

[2] D.H. Hyers, *On the stability of the linear functional equation*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **27** (1941), 222-224.

[3] Z. Moszner, *Les opérateurs de Hyers*, dans: Functional Equations — Results and Advances, ed. by Z. Daróczy and Zs. Páles, Dedicated to the Millenium of The Hungarian State, Kluwer Academic Publishers, Boston – Dordrecht – London, 2001, 113-122.

[4] Jacek Tabor, Józef Tabor, *Geometrical aspects of stability*, dans: Functional Equations — Results and Advances, ed. by Z. Daróczy and Zs. Páles, Dedicated to the Millenium of The Hungarian State, Kluwer Academic Publishers, Boston – Dordrecht – London, 2001, 123-132.

Institute of Mathematics
Pedagogical University
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
Poland
E-mail: zmoszner@wsp.krakow.pl

Manuscript received: December 12, 2000 and in final form: July 2, 2001