Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis

Folia 13 Studia Mathematica II (2002)

Zenon Moszner

La fonction d'indice et la fonction exponentielle

Résumé. On montre quelles solutions de l'équation fonctionnelle conditionnelle

$$f(c) \cdot f(d) \neq 0 \Longrightarrow f(c+d) = f(c) \cdot f(d), \tag{$*$}$$

où

$$f : \mathbb{R}(p) = \{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p : x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1, \ldots, p\} \setminus \{\underline{0}\} \longrightarrow \mathbb{R}(p),$$

$\underline{0} := (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^p$ et si $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $y = (y_1, \ldots, y_p)$, $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_p + y_p)$ et $x \cdot y = (x_1 y_1, \ldots, x_p y_p)$, sont en même temps des solutions de l'équation

$$f(c+d) = f(c) \cdot f(d) \tag{$**$}$$

et on donne la solution générale de $(**)$ et toutes les solutions de $(**)$ et de la condition

$$\exists\, r \in \mathbb{R},\ 0 < r \neq 1 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}(p) : \ f(rx) = f(x).$$

On indique aussi la construction de toutes les solutions de $(*)$ presque-mesurables et on considère le problème du prolongement des solutions de $(**)$.

1. Introduction

F.S. Roberts dans [8], en applicant la mathématique au processus du choix, a introduit la notion de la fonction d'indice, dont la généralisation

$$f : \mathbb{R}(p) = \{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p : x_i \geqslant 0 \text{ pour } i = 1, \ldots, p\} \setminus \{\underline{0}\} \longrightarrow \mathbb{R}(p)$$

remplit la condition suivante (nommée l'équation conditionnelle de Cauchy)

$$\forall\, c, d \in \mathbb{R}(p) \ \ [f(c) \cdot f(d) \neq \underline{0} \Longrightarrow f(c+d) = f(c) \cdot f(d)], \tag{1}$$

où $\underline{0} := (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^p$ et si $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $y = (y_1, \ldots, y_p)$, $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_p + y_p)$ et $x \cdot y = (x_1 y_1, \ldots, x_p y_p)$.

Nous comprenons ici sous la fonction exponentielle la fonction $f : \mathbb{R}(p) \longrightarrow \mathbb{R}(p)$ pour laquelle

AMS (2000) Subject Classification: 39B52, 39B62, 90A07.

$$\forall\, c, d \in \mathbb{R}(p) :\ f(c+d) = f(c) \cdot f(d). \tag{2}$$

Ils existent pour $p \geqslant 2$ des functions qui satisfont à (1) et qui ne remplissent pas (2). Par exemple pour $p = 2$ la fonction $f = (f_1, f_2)$, où

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{pour } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}(2) \text{ et } x_1 \leqslant x_2, \\ 0 & \text{pour } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}(2) \text{ et } x_1 > x_2 \end{cases}$$

et

$$f_2(x_1, x_2) = 1 - f_1(x_1, x_2),$$

satisfait à (1) (voir [6]) et ne remplit pas (2). Remarquons que cette situation ne peut pas avoir lieu pour $p = 1$ puisque dans ce cas $f(x) \neq 0$, donc $f(c)\cdot f(d) \neq 0$ toujours.

Ils se posent donc les deux questions

(a) sous quelle condition nécéssaire et suffisante la fonction satisfaisante à (1) remplit aussi (2)

et

(b) quelle est la solution générale de (2)?

2. La fonction d'indice et la fonction exponentielle

La réponse à la question (a) donne le

Théoreme 1

La fonction $f = (f_1, \ldots, f_p) : \mathbb{R}(p) \longrightarrow \mathbb{R}(p)$ *remplissante* (1) *satisfait à* (2) *si et seulement s'il existe* $k \in \{1, \ldots, p\}$ *tel que* $f_k \neq 0$ *sur* $\mathbb{R}(p)$.

Nous allons démontrer au commencement les deux lemmes.

Lemme 1

Désignons par $Z_\nu := \{x \in \mathbb{R}(p) : f_\nu(x) \neq 0\}$ *pour* $\nu = 1, \ldots, p$. *La fonction* $f : \mathbb{R}(p) \longrightarrow \mathbb{R}(p)$ *remplissante* (1) *satisfait à* (2) *si et seulement si*

$$\mathbb{R}(p) \times \mathbb{R}(p) \subset (Z_1 \times Z_1) \cup (Z_2 \times Z_2) \cup \ldots \cup (Z_p \times Z_p). \tag{3}$$

Démonstration. La fonction f remplissante (1) satisfait à (2) si et seulement s'il n'existe pas la paire $(c, d) \in \mathbb{R}(p) \times \mathbb{R}(p)$ pour laquelle $f(c) \cdot f(d) = 0$, c. à d. si et seulement si pour chaque paire $(c, d) \in \mathbb{R}(p) \times \mathbb{R}(p)$ nous avons $f(c) \cdot f(d) \neq \underline{0}$. Cela signifie qu'il existe un k tel que $(c, d) \in Z_k \times Z_k$, ou, équivalentement, que $(c, d) \in (Z_1 \times Z_1) \cup (Z_2 \times Z_2) \cup \ldots \cup (Z_p \times Z_p)$. L'inclusion (3) est donc démontrée.

Lemme 2

Si pour une fonction $g : \mathbb{R}(p) \longrightarrow \mathbb{R}$ *remplissante* (2) *il existe un* $c \in \mathbb{R}(p)$ *tel que* $g(c) = 0$*, alors*

$$g = 0 \text{ sur } \operatorname{Int}\mathbb{R}(p) := \{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}(p) : x_\nu > 0 \text{ pour } \nu = 1, \ldots, p\}.$$

Démonstration. Nous avons $g(x + c) = g(x)g(c) = 0$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe un $d \in \operatorname{Int}\mathbb{R}(p)$ tel que $g(d) \neq 0$. Il en résulte que $g(2d) = g(d)g(d) \neq 0$ et par l'induction $g(nd) \neq 0$ pour chaque n entier et positif. Puisque $d \in \operatorname{Int}\mathbb{R}(p)$ il existe un n tel que $nd - c \in \mathbb{R}(p)$, alors

$$0 \neq g(nd) = g((nd - c) + c) = g(nd - c)g(c) = 0,$$

donc une contradiction.

Démonstration du théorème 1. S'il existe un k tel que $f_k \neq 0$ sur $\mathbb{R}(p)$, dans ce cas $Z_k = \mathbb{R}(p)$, alors (3) à lieu. Si pour chaque k il existe c_k tel que $f_k(c_k) = 0$, donc, d'après le lemme 2, $f_k = 0$ sur $\operatorname{Int}\mathbb{R}(p)$ pour chaque k et de là $f(1, \ldots, 1) = \underline{0}$. Nous avons une contradiction avec $f(\mathbb{R}(p)) \subset \mathbb{R}(p)$.

Corollaire 1

Si la fonction $f : \mathbb{R}(p) \longrightarrow \mathbb{R}(p)$ *remplissante* (1) *est continue, elle satisfait à* (2).

Cela résulte du théorème 3 dans [6], p. 171, où est démontré que pour la fonction $f = (f_1, \ldots, f_p)$ remplissante (1) et continue on a $Z_\nu = \emptyset$ ou $Z_\nu = \mathbb{R}(p)$ pour $\nu = 1, \ldots, p$ et il existe au moins un k tel que $Z_k = \mathbb{R}(p)$.

Remarquons que le corollaire 1 n'est pas vrai pour la fonction mesurable au sens de Lebesgue au lieu de la fonction continue (voir exemple plus haut).

3. Solution génèerale de (2)

La réponse à la question (b) donne le

Théoreme 2

Nous recevons chaque solution $f = (f_1, \ldots, f_p) : \mathbb{R}(p) \longrightarrow \mathbb{R}(p)$ *de* (2) *et seulement une solution de* (2) *par la construction suivante:*

(i) *pour chaque* $k = 1, \ldots, p$ *prenons une fonction* $\phi_k : \{1, \ldots, p\} \longrightarrow \{0, 1\}$ *d'une maniere qu'il existe au moins un* j *tel que* $\phi_j = 1$*,*

(ii) *posons*

$$f_k(x) = \phi_k(i_1)\phi_k(i_2)\ldots\phi_k(i_m)\exp a_k(x) \tag{4}$$

pour $x \in R(i_1, \ldots, i_m)$ *et* $m, k = 1, \ldots, p$*, ou* $\{i_1, \ldots, i_m\}$ *est une combinaison arbitraire de* m *éléments de l'ensemble* $\{1, \ldots, p\}$*,* $R(i_1, \ldots, i_m)$ *est l'ensemble des éléments* $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}(p)$ *pour lesquels* $x_{i_j} > 0$

pour $j = 1, \dots, m$ *et* $x_n = 0$ *pour* $n \neq i_1, \dots, i_m$ *et* $a_k : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ *pour* $k = 1, \dots, p$ *sont des fonctions additives.*

Remarquons que $f_k(c)$ de la formule (4) est pour $c \in R(i_1, \dots, i_m)$ égale à 0 ou à $\exp a_k(c)$ lorsque ϕ_k prend sur l'ensemble $\{i_1, \dots, i_m\}$ la valeur 0 ou non. Il en résulte que $f_k = 0$ sur $R(i_1, \dots, i_m)$ ou $f_k \neq 0$ sur $R(i_1, \dots, i_m)$ et de la, puisque $R(i_1, \dots, i_m)$ forment des cônes sur $\mathbb{R}$, les ensembles Z_ν, comme les réunions quelques-uns de $R(i_1, \dots, i_m)$, forment aussi des cônes sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. La fonction f est bien définie puisque les ensembles $R(i_1, \dots, i_m)$ et $R(j_1, \dots, j_n)$ sont disjoints pour $\{i_1, \dots, i_m\} \neq \{j_1, \dots, j_n\}$ et la réunion des ensembles $R(i_1, \dots, i_m)$ pour toutes les combinaisons ($m = 1, \dots, p$) est égale à $\mathbb{R}(p)$. De plus puisque $\phi_j = 1$ nous avons $f_j \neq 0$ sur $\mathbb{R}(p)$, donc $f(\mathbb{R}(p)) \subset \mathbb{R}(p)$.

Soit $x \in R(i_1, \dots, i_m)$ et $y \in R(j_1, \dots, j_n)$ et soit $(s_1, \dots, s_r)$ la combinaison composée des éléments $i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_n$. Dans ce cas $x + y \in R(s_1, \dots, s_r)$ et

$$\phi(i_1) \dots \phi(i_m)\phi(j_1) \dots \phi(j_n) = \phi(s_1) \dots \phi(s_r),$$

d'où $f_k(x)f_k(y) = f_k(x + y)$, c.q.f.d.

Supposons à present que $f : \mathbb{R}(p) \longrightarrow \mathbb{R}(p)$ remplit (2) et définissons $\phi_k : \{1, \dots, p\} \longrightarrow \{0, 1\}$ par l'équivalence

$$\phi_k(j) = 1 \Longleftrightarrow f_k(0, \dots, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0) \neq 0. \tag{5}$$

Soit $(i_1, \dots, i_m)$ une combinaison des elements $1, \dots, p$. Nous pouvons supposer que $i_1 < i_2 < \dots < i_m$. L'ensemble $R(i_1, \dots, i_m)$ est fermé par rapport à l'addition et f rétréssante à cet ensemble remplit (2). Fixons k de l'ensemble $\{1, \dots, p\}$ et remarquons que

$$\begin{aligned} &f_k(0, \dots, 0, \underset{i_1}{1}, 0, \dots, 0, \underset{i_2}{1}, 0, \dots, 0, \underset{i_m}{1}, 0, \dots, 0) \\ &\qquad = \prod_{j=1}^{m} f_k(0, \dots, 0, \underset{i_j}{1}, 0, \dots, 0). \end{aligned} \tag{6}$$

Considérons les deux cas:

(α) il existe $x_0 \in R(i_1, \dots, i_m)$ tel que $f_k(x_0) = 0$,

(β) $f_k(x) \neq 0$ pour chaque x de $R(i_1, \dots, i_m)$.

Dans le cas (α) $f_k(x) = 0$ sur $R(i_1, \dots, i_m)$ d'après le lemme 2 (appliqué pour $p = m$). Supposons que $\phi_k(i_1) = \phi_k(i_2) = \phi_k(i_m) = 1$, alors d'après (5) $f_k(0, \dots, 0, \underset{i_j}{1}, 0, \dots, 0) \neq 0$ pour $j = 1, \dots, m$, d'où d'après (6)

$$f_k(0, \dots, 0, \underset{i_1}{1}, 0, \dots, 0, \underset{i_2}{1}, 0, \dots, 0, \underset{i_m}{1}, 0, \dots, 0) \neq 0.$$

Nous avons une contradiction puisque

$$(0,\ldots,0,\underset{i_1}{1},0,\ldots,0,\underset{i_2}{1},0,\ldots,0,\underset{i_m}{1},0,\ldots,0)\in R(i_1,\ldots,i_m).$$

Nous avons donc démontré que au moins un des nombres $\phi_k(i_1),\ldots,\phi_k(i_m)$ est égal à zéro, alors (4) a lieu avec $a_k(x)$ additives quelconques.

Dans le cas (β) on a $\phi_k(i_1)=\ldots=\phi_k(i_m)=1$ d'après (5) et (6) et $f_k(x)>0$ sur $R(i_1,\ldots,i_m)$. En posant $b_k(x)=\ln f_k(x)$ nous avons (4) avec la fonction additive $b_k : R(i_1,\ldots,i_m)\longrightarrow\mathbb{R}$. Soit $Z_k=\{x\in\mathbb{R}(p) : f_k(x)\neq 0\}$. Puisque l'ensemble $Z_k\cup\{\underline{0}\}$ forme un cône sur l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels et la fonction

$$a_k(x)\begin{cases}\ln f_k(x) & \text{pour } x\in Z_k,\\ 0 & \text{pour } x=0\end{cases}$$

est additive (et donc $\mathbb{Q}$-homogène), on peut prolonger cette fonction à la fonction additive sur $\mathbb{R}^p$ tout entier (voir [5], Th. 2, p. 86 ou [1], Th. 5, p. 88).

La fonction f en considération, comme remplissante (2), est en même temps une fonction qui satisfait aussi à (1), donc d'après le théorème 1 il doit exister un j tel que $f_j\neq 0$ sur $\mathbb{R}(p)$, d'où $\phi_j=1$ sur $\{1,\ldots,p\}$.

La démonstration du théorème 2 est donc terminée.

Remarque 1

On a ici

$$Z_k=\{(x_1,\ldots,x_p)\in\mathbb{R}(p) : \forall j\in\phi^{-1}(\{0\}) : x_j=0\}.$$

On peut donc donner la description suivante des solutions de (2).

Corollaire 2

On peut recevoir chaque solution $f=(f_1,\ldots,f_p):\mathbb{R}(p)\longrightarrow\mathbb{R}(p)$ de (2) et seulement une solution de (2) par la formule

$$f_k(x)=\begin{cases}\exp a_k(x) & \textit{pour } x\in Z_k=\{(x_1,\ldots,x_p)\in\mathbb{R}(p): \forall j\in M_k : x_j=0\},\\ 0 & \textit{pour } x\in\mathbb{R}(p)\setminus Z_k,\end{cases}$$

ou M_k est, pour $k=1,\ldots,p$, un sous-ensemble de l'ensemble $\{1,\ldots,p\}$ tel que au moins un $M_k=\emptyset$ et $a_k:\mathbb{R}^p\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction additive.

On peut aussi remplacer la formule (4) par la suivante

$$f_k(x)=\begin{cases}0 & \text{pour } x\in\bigcup_{i\in\phi_k^{-1}(\{0\})}E[i],\\ \exp a_k(x) & \text{pour } x\in\mathbb{R}(p)\setminus\bigcup_{i\in\phi_k^{-1}(\{0\})}E[i],\end{cases}$$

ou $E[i]=\{x=(x_1,\ldots,x_p)\in\mathbb{R}(p) : x_i>0\}$.

Corollaire 3

Si la solution f de (2) est continue par rapport à chaque variable, alors pour chaque $k \in \{1, \dots, p\}$ on a $\phi_k = 1$ ($f_k = \exp a_k$) ou $\phi_k = 0$ ($f_k = 0$) et f est continue.

Démonstration. Supposons qu'ils existent $k, l, m \in \{1, \dots, p\}$ tels que $\phi_k(1) = 1$ et $\phi_k(m) = 0$. Nous avons $f_k = 0$ sur $R(m, l)$ et $f_k = \exp a_k$ sur $R(l)$. Si $l < m$, pour $x_0 = (0, \dots, 0, \underset{l}{a}, 0, \dots, 0)$, où $a > 0$, et

$$x_n = (0, \dots, 0, \underset{l}{a}, 0, \dots, 0, \underset{m}{n^{-1}}, 0, \dots, 0), \quad \text{où } n = 1, 2, \dots,$$

nous avons $x_n \longrightarrow x_0$ et $f_k(x_n) \not\longrightarrow f_k(x_0) = \exp a_k(x_0) \neq 0$, donc une contradiction. Pour $m < l$ le raisonnement est analogue.

Puisque pour chaque $k \in \{1, \dots, p\}$ on a $f_k = \exp a_k$ où $f_k = 0$ et la fonction additive a_k, continue par rapport à chaque variable, est continue, donc f_k sont continues sur $\mathbb{R}(p)$.

Remarquons que la solution de (1) peut être mesurable, n'étant pas continue (voir les exemples plus bas, notamment l'exemple 1° (ii)).

Remarque 2

Chaque solution $f = (f_1, \dots, f_p)$ de (1) doit être de la forme $f_k = F_k \exp a_k$, où $F = (F_1, \dots, F_p)$ est aussi une solution de (1), ayante les valeurs dans l'ensemble $\{0, 1\}^p \setminus \{\underline{0}\}$ et $a_k : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction additive [6]. Cette solution peut être non-mesurable au sens de Lebesgue, même si les functions a_k ($k = 1, \dots, p$) sont mesurables (donc continues). En effet pour $p = 2$ prenons un élément (a, b) de la base de Hamel de $\mathbb{R}^2$ et pour Z_1 prenons l'ensemble de ces éléments de $\mathbb{R}(2)$ qui ont des coefficients positives auprès "a" dans le développement de ces éléments par rapport à cette base de Hamel et posons $Z_2 = \mathbb{R}(2) \setminus Z_1$. La fonction $f = (f_1, f_2)$ telle que

$$f_1(c_1, c_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } (c_1, c_2) \in Z_1, \\ 0 & \text{si } (c_1, c_2) \in Z_2 \end{cases}$$

et

$$f_2(c_1, c_2) = 1 - f_1(c_1, c_2)$$

est une solution de (1) (voir [6]) avec $a_1(c_1, c_2) = a_2(c_1, c_2) = 0$ qui n'est pas mesurable L, puisque les ensembles Z_1 et Z_2 ne sont pas mesurables.

Cette situation ne peut pas avoir lieu pour la solution de (2) puisque tous les ensembles $R(\dots)$ sont mesurables L (ils ont la mesure zéro à l'exception de $R(1, \dots, p)$ qui a cette mesure égale à $+\infty$.)

4. Exemples des solutions de (2)

1° Nous donnerons toutes les solutions de (2) pour $p = 2$. Nous avons 4 possibilités pour les fonctions ϕ_k $(k = 1, 2)$

	ϕ_a	ϕ_b	ϕ_c	ϕ_d
1	1	0	1	0
2	1	1	0	0

et 3 ensembles

$$\begin{aligned} R(1) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}(2) : x_1 > 0 \text{ et } x_2 = 0\}, \\ R(2) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}(2) : x_1 = 0 \text{ et } x_2 > 0\}, \\ R(1,2) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}(2) : x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0\}. \end{aligned}$$

Et voila toutes les solutions $f = (f_1, f_2)$ de (2).

(i) $f_1(x) = \exp a_1(x)$ et pour $\phi_2 = \phi_a$: $f_2(x) = \exp a_2(x)$, ici (voir le corollaire 3) $M_1 = M_2 = \emptyset$.

(ii) $f_1(x) = \exp a_1(x)$ et pour $\phi_2 = \phi_b$ et $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}(2)$

$$f_2(x_1, x_2) = \begin{cases} \exp a_2(x) & \text{pour } x_1 = 0 \text{ et } x_2 > 0, \\ 0 & \text{pour } x_1 > 0 \text{ et } x_2 \geqslant 0, \end{cases}$$

ici $M_1 = \emptyset$ et $M_2 = \{1\}$.

Si a_1 et a_2 sont continues, f est mesurable, n'étant pas continue (f_2 n'est pas continue). Nous avons la même situation dans beaucoup d'exemples plus bas.

(iii) $f_1(x) = \exp a_1(x)$ et pour $\phi_2 = \phi_c$:

$$f_2(x_1, x_2) = \begin{cases} \exp a_2(x) & \text{pour } x_1 > 0 \text{ et } x_2 = 0, \\ 0 & \text{pour } x_1 \geqslant 0 \text{ et } x_2 > 0, \end{cases}$$

ici $M_1 = \emptyset$ et $M_2 = \{2\}$.

(iv) $f_1(x) = \exp a_1(x)$ et pour $\phi_2 = \phi_d$: $f_2(x) = 0$, ici $M_1 = \emptyset$ et $M_2 = \{1, 2\}$.

(v) $f_2(x) = \exp a_2(x)$ et pour $\phi_1 = \phi_b$:

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} \exp a_1(x) & \text{pour } x_1 = 0 \text{ et } x_2 > 0, \\ 0 & \text{pour } x_1 > 0 \text{ et } x_2 \geqslant 0, \end{cases}$$

ici $M_2 = \emptyset$ et $M_1 = \{1\}$.

(vi) $f_2(x) = \exp a_2(x)$ et pour $\phi_1 = \phi_c$:

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} \exp a_1(x) & \text{pour } x_1 > 0 \text{ et } x_2 = 0, \\ 0 & \text{pour } x_1 \geqslant 0 \text{ et } x_2 > 0, \end{cases}$$

ici $M_2 = \emptyset$ et $M_1 = \{2\}$.

(vii) $f_2(x) = \exp a_2(x)$ et pour $\phi_1 = \phi_d$: $f_1(x) = 0$, ici $M_2 = \emptyset$ et $M_1 = \{1, 2\}$.

2° Nous allons donner quelques exemples des solutions de (2) pour p=3 (pas toutes!). Nous avons 8 possibilités pour ϕ_k $(k = 1, 2, 3)$:

	ϕ_z	ϕ_b	ϕ_c	ϕ_d	ϕ_e	ϕ_f	ϕ_g	ϕ_h
1	1	0	1	1	1	0	0	0
2	1	1	0	1	0	1	0	0
3	1	1	1	0	0	0	1	0

et 7 ensembles $R(1)$, $R(2)$, $R(3)$, $R(1, 2)$, $R(1, 3)$, $R(2, 3)$, $R(1, 2, 3)$.

Et voilà des solutions de (2).

(i) $f_1(x) = \exp a_1(x)$ et pour $\phi_2 = \phi_3 = \phi_b$ et $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}(2)$:

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \exp a_2(x) & \text{pour } x_1 = 0, \\ 0 & \text{pour } x_1 > 0, \end{cases}$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \exp a_3(x) & \text{pour } x_1 = 0, \\ 0 & \text{pour } x_1 > 0, \end{cases}$$

ici $M_1 = \emptyset$, $M_2 = \{1\}$ et $M_3 = \{1\}$.

(ii) $f_1(x) = \exp a_1(x)$ et pour $\phi_2 = \phi_c$ et $\phi_3 = \phi_g$:

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \exp a_2(x) & \text{pour } x_2 = 0, \\ 0 & \text{pour } x_2 > 0, \end{cases}$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \exp a_3(x) & \text{pour } x_1 = x_2 = 0, \\ 0 & \text{pour } x_1 > 0 \text{ ou } x_2 > 0, \end{cases}$$

ici $M_1 = \emptyset$, $M_2 = \{2\}$ et $M_3 = \{1, 2\}$.

(iii) $f_2(x) = \exp a_2(x)$ et pour $\phi_2 = \phi_d$ et $\phi_3 = \phi_f$:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \exp a_1(x) & \text{pour } x_3 = 0, \\ 0 & \text{pour } x_3 > 0 \end{cases}$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \exp a_3(x) & \text{pour } x_1 = x_3 = 0, \\ 0 & \text{pour } x_1 > 0 \text{ ou } x_3 > 0, \end{cases}$$

ici $M_2 = \emptyset$, $M_1 = \{3\}$ et $M_3 = \{1, 3\}$.

(iv) $f_3(x) = \exp a_3(x)$ et pour $\phi_1 = \phi_c$ et $\phi_2 = \phi_h$:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \exp a_1(x) & \text{pour } x_2 = 0, \\ 0 & \text{pour } x_2 > 0 \end{cases}$$

et $f_2(x) = 0$, ici $M_3 = \emptyset$, $M_1 = \{2\}$ et $M_2 = \{1, 2, 3\}$.

3° Pour $p = 4$ nous avons $2^4 = 16$ possibilités pour les fonctions ϕ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) et 15 ensembles du type $R(\ldots)$.

Et voilà un exemple pour la solution : $f_2(x) = \exp a_2(x)$ et pour

a) ϕ_1 prise comme il suit: $\phi_1(1) = \phi_1(2) = 0$ et $\phi_1(3) = \phi_1(4) = 1$,
b) ϕ_3 prise comme il suit: $\phi_3(1) = \phi_3(3) = 0$ et $\phi_3(2) = \phi_3(4) = 1$,
c) ϕ_4 prise comme il suit: $\phi_4(4) = 0$ et $\phi_4(1) = \phi_4(2) = \phi_4(3) = 1$

et pour $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}(4)$:

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} \exp a_1(x) & \text{pour } x_1 = x_2 = 0, \\ 0 & \text{pour } x_1 > 0 \text{ ou } x_2 > 0, \end{cases}$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} \exp a_3(x) & \text{pour } x_1 = x_3 = 0, \\ 0 & \text{pour } x_1 > 0 \text{ ou } x_3 > 0, \end{cases}$$

$$f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} \exp a_4(x) & \text{pour } x_4 = 0, \\ 0 & \text{pour } x_4 > 0, \end{cases}$$

ici $M_2 = \emptyset$, $M_1 = \{1, 2\}$, $M_3 = \{1, 3\}$ et $M_4 = \{4\}$.

5. Solution générale de (2) et de (7)

COROLLAIRE 4

Si pour une fonction $f = (f_1, \ldots, f_p) : \mathbb{R}(p) \longrightarrow \mathbb{R}(p)$ remplissante (2) *il existe un $r \neq 1$ positif tel que pour chaque x de $\mathbb{R}(p)$*

$$f(rx) = f(x), \tag{7}$$

dans ce cas

$$\forall\, x \in \mathbb{R}(p)\ \forall\, k \in 1, \ldots, p : \ f_k(x) \neq 0 \Longrightarrow f_k(x) = 1.$$

donc on peut prendre $a_k = 0$ dans (4) *pour chaque $k = 1, \ldots, p$ (c. à d. $f_k(\mathbb{R}(p)) \subset \{0, 1\}$). De plus f satisfait à* (7) *pour chaque $r > 0$.*

Démonstration. La condition (7) implique que $f(x) = f(\frac{1}{r}x)$ pour chaque $x \in \mathbb{R}(p)$, nous pouvons donc supposer que $r > 1$. Soit n tel que $rn > 2$ et k fixé dans l'ensemble $\{1, \ldots, p\}$. Puisque pour $x \in \mathbb{R}(p)$

$$f_k\left(\frac{r^n-2}{r-1}x\right) f_k\left(\frac{1}{r-1}x\right) = f_k\left(\frac{r^n-1}{r-1}x\right) = f_k\left(\sum_{j=0}^{n-1} r^j x\right) = [f_k(x)]^n,$$

donc si $f_k(x) \neq 0$, on a $f_k(\frac{1}{r-1}x) \neq 0$ et de là

$$f_k(x)\, f_k\left(\frac{1}{r-1}x\right) = f_k\left(\frac{r}{r-1}x\right) = f_k\left(\frac{1}{r-1}x\right) \neq 0,$$

d'où $f_k(x) = 1$, c. à d. on peut prendre $a_k(x) = 0$. Si $f_k(x) = 0$ on peut aussi poser $a_k(x) = 0$, c.q.f.d.

Remarquons qu'il ne doit pas être $a_k = 0$ dans (4) pour la solution de (1) et de (7). En effet par exemple la fonction $f : \mathbb{R}(p) \longrightarrow \mathbb{R}(p)$ donnée par la formule (4), où $\phi_1 = 1$, $a_1 = 0$, $\phi_k = 0$ et a_k arbitraire pourvu que additives pour $k = 2, \dots, p$, remplit (1) et (7) pour chaque $r > 0$.

Le corollaire 4 est une conclusion simple du théorème 1 dans [3], puisque d'après le théorème 2 les ensembles Z_ν forment des cônes sur $\mathbb{R}$, alors aussi les conditions $Z_\nu \subset (r-1)\,\mathrm{lin}\, Z_\nu$ sont remplies.

Remarquons aussi que le corollaire 4 n'est pas vrai pour les solutions de (1) pour $p \geqslant 3$ et r transcendant (voir [6], Th. 2, p. 179, et [2]), étant vrai pour $p = 1, 2$ et pour chaque p et chaque r algébrique [7].

6. Solutions de (1) et de (7) presque-mesurables

On à démontré dans [2] que pour chaque r transcendant et $p \geqslant 3$ il existe une solution de (1) et (7) qui a au moins une valeur en dehors de l'ensemble $\{0,1\}^p \setminus \{0\}$. On fait usage de l'axiome du choix de Zermelo dans la construction de cette solution. Le théorème suivant montre qu'on ne peut pas faire cette construction sans l'ensemble non mesurable au sens de Lebesgue.

THÉOREME 3

(a) *Si pour une solution $f = (f_1, \dots, f_p)$ de (1) les ensembles $A_i(c) = \{tc \in \mathbb{R}(p) : t \in \mathbb{R}$ et $f_i(tc) \neq 0\} = Z_i \cap D(c)$ pour $i = 1, \dots, p$ et pour un $c \in \mathbb{R}(p)$ fixé, où $D(c) = \{tc : t \in \mathbb{R}(1)\}$ et $Z_i = \{x \in \mathbb{R}(p) : f_i(x) \neq 0\}$, sont mesurables linéairement au sens de Lebesgue, alors $A_i(c) = D(c)$ pour $c \in Z_i$.*

(b) *Si de plus f satisfait à (7) avec un $r \neq 1$ pour chaque $x \in D(c)$, elle a toutes les valeurs sur $D(c)$ dans l'ensemble $\{0,1\}^p \setminus \{\underline{0}\}$, donc elle remplit (7) sur $D(c)$ pour chaque $r > 0$.*

(c) *Si $A_i(c)$ sont mesurable pour chaque $c \in \mathbb{R}(p)$ et chaque $i = 1, \dots, p$ (f est dite presque-mesurable dans ce cas), $Z_i = D(c)$, donc $Z_i \cup \{\underline{0}\}$ forme un cône sur $\mathbb{R}$. Inversement si $Z_i \cup \{\underline{0}\}$ forme un cône sur $\mathbb{R}$, les ensembles $A_i(c)$ sont évidemment mesurables pour chaque $c \in \mathbb{R}(p)$.*

(d) *Évidemment si f presque-mesurable satisfait à* (7) *avec un $r \neq 1$ pour chaque $x \in \mathbb{R}(p)$, elle a toutes les valeurs dans l'ensemble $\{0,1\}^p \setminus \{\underline{0}\}$, donc elle remplit* (7) *pour chaque $r > 0$.*

Démonstration. En désignant $Z_i^1 = Z_i$, $Z_i^0 = \mathbb{R}(p) \setminus Z_i$, $A_i^1(c) = A_i(c)$ et $A_i^0(c) = \mathbb{R}(1) \setminus A_i(c)$, nous savons [6] que

$$(i_1 j_1, \ldots, i_p j_p) \neq \underline{0} \Longrightarrow Z_1^{i_1} \cap \ldots \cap Z_p^{i_p} + Z_1^{j_1} \cap \ldots \cap Z_p^{j_p} \subset Z_1^{i_1 j_1} \cap \ldots \cap Z_p^{i_p j_p} \quad (8)$$

pour tous $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_p \in \{0,1\}$ et

$$Z_1 \cup \ldots \cup Z_p = \mathbb{R}(p), \quad (9)$$

donc $Z_1^0 \cap \ldots \cap Z_p^0 = \emptyset$. De là

$$A_1^{i_1}(c) \cap \ldots \cap A_p^{i_p}(c) + A_1^{j_1}(c) \cap \ldots \cap A_p^{j_p}(c) \subset A_1^{i_1 j_1}(c) \cap \ldots \cap A_p^{i_p j_p}(c)$$

pour tels $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_p$ que $(i_1 j_1, \ldots, i_p j_p) \neq \underline{0}$ et $A_1^0(c) \cap \ldots \cap A_p^0(c) = \emptyset$. Les ensembles $A_1^{i_1}(c) \cap \ldots \cap A_p^{i_p}(c)$ sont mesurables et disjoints pour les suites $i_1, \ldots, i_p$ différentes et de plus $D(c) = A_1(c) \cup \ldots \cup A_p(c)$ est la somme de tous ces ensembles, alors il existe une suite $(i_1, \ldots, i_p) \neq \underline{0}$ telle que la mesure de l'ensemble $A_1^{i_1}(c) \cap \ldots \cap A_p^{i_p}(c)$ est positive. Puisque

$$A_1^{i_1}(c) \cap \ldots \cap A_p^{i_p}(c) + A_1^{i_1}(c) \cap \ldots \cap A_p^{i_p}(c) \subset A_1^{i_1}(c) \cap \ldots \cap A_p^{i_p}(c),$$

donc d'après le théorème de Steinhaus ([5], p. 69) il existe un segment de $D(c)$ de la longueur positive contenu dans $A_1^{i_1}(c) \cap \ldots \cap A_p^{i_p}(c)$ et puisque $Z_i \cup \underline{0}$, $i = 1, \ldots, p$, est un cône sur le corps des nombres rationnels ([6]), l'ensemble $A_1^{i_1}(c) \cap \ldots \cap A_p^{i_p}(c) \cup \{\underline{0}\}$ est le même, donc il doit être

$$D(c) = A_1^{i_1}(c) \cap \ldots \cap A_p^{i_p}(c) = Z_1^{i_1} \cap \ldots \cap Z_p^{i_p} \cap D(c).$$

Si $c \in Z_k$, alors $i_k \neq 0$, d'où $Z_1^{i_1} \cap \ldots \cap Z_p^{i_p} \cap D(c) \subset Z_k \cap D(c)$, donc $Z_k \cap D(c) = D(c)$, alors $tc \in Z_k$ pour chaque t de $\mathbb{R}(1)$. Il en résulte que $A_i(c) = D(c)$ pour $c \in Z_i$. Si f est presque-mesurable, donc $Z_i = \bigcup_{c \in Z_i} A_i(c) = \bigcup_{c \in Z_i} D(c)$.

Si (7) a lieu avec un $r \neq 1$ pour $x \in D(c)$, nous pouvons supposer dans (7) que $r > 1$. Si $x \in A_k(c)$ ($f_k(x) \neq 0$), alors $f_k(\frac{1}{r-1}x) \neq 0$ et

$$f_k(x)\, f_k\left(\frac{1}{r-1}x\right) = f_k\left(\frac{r}{r-1}x\right) = f_k\left(\frac{1}{r-1}x\right),$$

d'où $f_k(x) = 1$. Le théorème 3 est donc démontré.

Remarques

1. Il résulte de la démonstration plus haut qu'il suffit supposer dans le théorème 3 que pour un $c \in \mathbb{R}(p)$ (pour chaque $c \in \mathbb{R}(p)$) il existe une suite

$i_1, \ldots, i_p$ telle que l'ensemble $A_1^{i_1}(c) \cap \ldots \cap A_p^{i_p}(c)$ (voir la démonstration) a la mesure intérieure de Lebesgue positive au lieu de la mesurabilité de $A_i(c)$ pour ce c (pour chaque c) et $i = 1, \ldots, p$ (ça suffit dans le théorème de Steinhaus). Cette supposition nouvelle est pourtant moins simple. De même il suffit supposer dans la partie (c) du théorème 3 que les ensembles $A_1^{i_1}(c) \cap \ldots \cap A_p^{i_p}(c)$ soient mesurables pour chaque $c \in \mathbb{R}(p)$ et chaque suite $i_1, \ldots, i_p$ au lieu de la mesurabilité de $A_i(c)$ pour chaque $c \in \mathbb{R}(p)$ et chaque $i = 1, \ldots, p$, mais ces deux suppositions sont équivalentes puisque $A_j(c)$ est la réunion de ces $A_1^{i_1}(c) \cap \ldots \cap A_p^{i_p}(c)$ pour lesquels $i_j = 1$.

2. La mesurabilité de $A_i(c)$ est équivalente à la mesurabilité de l'ensemble $B_i(c) = \{t \in \mathbb{R}(1) : f_i(tc) \neq 0\}$ puisque la fonction linéaire $t \mapsto tc$, pour t de $\mathbb{R}(1)$ et $c \in \mathbb{R}(p)$, transforme bijectivement $B_i(c)$ sur $A_i(c)$ et tient la mesurabilité.

   De même les mesurabilités des ensembles $A_i(c)$ et $C_i(c) = f_1^{-1}(\{0\}) \cap D(c)$ sont équivalentes puisque $A_i(c) = D(c) \cap C_i(c)$.

3. La phrase dernière du théorème 3 ((7) avec un $r \neq 1 \Rightarrow$ (7) avec chaque $r > 0$) n'est pas vraie pour chaque solution de (1) (c. à d. sans la supposition de la mesurabilité des ensembles $A_i(c)$). En effet d'après [2] pour chaque r transcendant il existe une solution de (1) et de (7) qui a au moins une valeur hors de l'ensemble $\{0, 1\}^p \setminus \{\underline{0}\}$) et cette solution ne peut remplir (7) avec aucun r algébrique différent de 1 (voir [7]).

4. La mesurabilité des ensembles $A_i(c)$, étant la condition suffisante pour que la fonction $f : \mathbb{R}(p) \longrightarrow \mathbb{R}(p)$ remplissante (1) et (7) avec un $r \neq 1$ ait les valeurs dans l'ensemble $\{0, 1\}^p \setminus \underline{0}\}$, n'est pas une condition nécéssaire à cet effet, puisqu'il existe une fonction $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}(2) \longrightarrow \mathbb{R}(2)$ qui remplit (1) et (7) avec un $r \neq 1$ et qui a les valeurs dans l'ensemble $\{0, 1\}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, pour laquelle l'ensemble Z_1 ne forme pas un cône sur $\mathbb{R}$. En effet soit B une base de Hamel de $\mathbb{R}$ sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels telle que $1, \sqrt{2} \in B$ et soit Z_1 l'ensemble de ces éléments $(x, 0)$ de $\mathbb{R}(2)$ qui ont des coefficients positifs aupres $\sqrt{2}$ dans le développement de x par rapport à cette base B. Posons $Z_2 = \mathbb{R}(2) \setminus Z_1$. La fonction $f = (f_1, f_2)$ définie comme il suit

$$f_1(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } (x, y) \in Z_1, \\ 0 & \text{pour } (x, y) \in Z_2, \end{cases} \qquad f_2(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } (x, y) \in Z_2, \\ 0 & \text{pour } (x, y) \in Z_1 \end{cases}$$

   a les propriétés exigées si $r = 2$ (voir [6]) et Z_1 ne forme pas du cône sur $\mathbb{R}$ $((\sqrt{2} - 1, 0) \in Z_1$ et $\sqrt{2}\,(\sqrt{2} - 1, 0) = (2 - \sqrt{2}, 0) \notin Z_1)$. On peut constater que seulement les ensembles $A_1((1, 0))$ et $A_2((1, 0))$ ne sont pas mesurables ici.

5. La presque-mesurabilité de f remplissante (1) entraîne que les ensembles Z_i, pour $i = 1, \ldots, p$, comme les cônes sur $\mathbb{R}^p$,, sont p-mesurables dans l'espace $\mathbb{R}^p$, puisque $Z_i \cup \{\underline{0}\}$ forment des cônes sur $\mathbb{R}$. L'exemple plus haut montre que l'implication inverse n'est pas vraie et que la mesurabilité de f n'implique pas sa presque-mesurabilité.

6. L'exemple de la solution de (1) dans l'introduction montre que la mesurabilité de $A_i(c)$ n'implique pas de la continuité de cette solution. Une simple modification de cette solution (le remplacement de la fonction f_1 par $f_1 \exp a$, où $a : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction additive discontinue) donne une solution de (1) non mesurable sur la plaine avec les mêmes ensembles $A_i(c)$ mesurables linéairement. Si $a(0, x_2)$ est discontinue dans cet exemple, la fonction f n'est pas mesurable sur la demi-droite $\{(0, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}(1)\}$.

7. Le corollaire 3 est une conclusion du théorème 3 puisque dans ce cas $A_i(c) = D(c)$ pour $c \in Z_i$ et $A_i(c) = \emptyset$ si $c \notin Z_i$.

8. On donne dans [4] la construction (pas simple et par l'itération) de toutes les solutions de (1) et de (7) avec *chaque* $r > 0$. La même construction nous donne toutes les solutions de (1) presque-mesurables. En effet nous savons d'après [5] que chaque solution $f = (f_1, \ldots, f_p)$ de (1) est de la forme $f_i = F_i \exp a_i$, où $F = (F_1, \ldots, F_p)$ est une solution de (1) ayante les valeurs dans l'ensemble $\{0,1\}^p \setminus \{\underline{0}\}$ et $a_i : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ est additive. La mesurabilité de $A_i(c)$ pour f entraîne que les ensembles $Z_i \cup \{\underline{0}\}$ forment les cônes sur $\mathbb{R}$ et puisque

$$\{x \in \mathbb{R}(p) : f_i(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}(p) : F_i(x) \neq 0\},$$

on a $F_i(x) = 1$ pour $x \in Z_i$, d'où $F_i(rx) = F_i(x)$ pour chaque $r > 0$. Il suffit donc construire F comme dans [4] pour avoir f.

Il résulte de nos considérations que la construction dans [4] nous permet donner toutes les solutions de (1) pour lesquelles les ensembles $Z_i \cup \{\underline{0}\}$ forment des cônes sur $\mathbb{R}$ et seulement ces solutions.

9. On peut se borner dans toutes nos considération à $c = (c_1, \ldots, c_p)$ tel que $|c| = 1$ ou tel que $c_1 + \ldots + c_p = 1$ puisque pour ces c les ensembles $D(c)$ sont les mêmes que pour c précédents.

10. Considérons sur les droites de $\mathbb{R}^p$ la topologie donnée par la distance simple des points. On peut remplacer dans le théorème 3 et dans les remarques plus haut la presque-mesurabilité de f par la condition que les ensembles $A_i(c)$, pour $i = 1, \ldots, p$ et chaque $c \in \mathbb{R}(p)$, jouissent de la propriété de Baire, en remplaçant en même temps dans la démonstration du théorème 3 le théorème de Steinhaus par le théorème de Piccard ([5],

p. 48).Cette condition et la presque-mesurabilité sont équivalentes pour les fonctions remplissantes (1) (c. à d. pour les cônes $Z_i \cup \{\underline{0}\}$, $i = 1, \ldots, p$, sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, satisfaisants aux relations (8) et (9)), puisque elle sont équivalentes à la condition que les ensembles $Z_i \cup \{\underline{0}\}$ forment les cônes sur $\mathbb{R}$. On peut aussi remplacer ici la condition que les ensembles $A_i(c)$ jouissent de la propriété de Baire pour $i = 1, \ldots, p$ et un $c \in \mathbb{R}(p)$ (chaque $c \in \mathbb{R}(p)$) par la supposition que pour un $c \in \mathbb{R}(p)$ (pour chaque $c \in \mathbb{R}(p)$) il existe une suite $i_1, \ldots, i_p$ telle que l'ensemble $A_1^{i_1}(c) \cap \ldots \cap A_p^{i_p}(c)$ jouit de la propriété de Baire et il est de la deuxième catégorie. On ajoute ici cette dernière supposition puisque elle se trouve dans le théorème de Piccard et dans ce cas ne résulte pas des autres suppositions, par contre elle est remplie sans la supposition par au moins un des ensembles $A_i(c)$, car $D(c) = \bigcup_{i=1}^{p} A_i(c)$.

11. Il résulte de la remarque après le théorème 2 que les ensembles $Z_\nu \cup \{\underline{0}\}$ pour la solution arbitraire de (2) forment des cônes sur $\mathbb{R}$, donc cette solution est toujours presque-mesurable.

7. Prolongements

On peut facilement démontrer qu'il existe toujours une solution g de (2) sur $\mathbb{R}(p) \cup \{\underline{0}\}$ qui est un prolongement de la solution $f = (f_1, \ldots, f_p)$ de (2) sur $\mathbb{R}(p)$ et

1° ce prolongement est unique ($g(\underline{0}) = (1, \ldots, 1)$) si et seulement s'il n'existe pas $k \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $f_k(x)$ est idéntiquement égale à zero

et

2° dans le cas contraire chaque fonction

$$g = (g_1, \ldots, g_p) : \mathbb{R}(p) \cup \{\underline{0}\} \longrightarrow \mathbb{R}(p) \cup \{\underline{0}\}$$

telle que $g = f$ sur $\mathbb{R}(p)$ et pour laquelle $g_k(\underline{0}) = 1$ si f_k n'est pas idéntiquement zéro et $g_k(\{\underline{0}\}) \in \{0, 1\}$ pour $f_k = 0$, forme une solution de (2) sur $\mathbb{R}(p) \cup \{\underline{0}\}$ qui est un prolongement de f et inversement chaque prolongement doit être de cette forme.

S'il s'agit du prolongement à $\mathbb{R}^p$ de la solution f de (2) sur $\mathbb{R}(p)$ ce prolongement existe si et seulement si $f = (f_k, \ldots, f_p)$ remplit la condition

$$\forall\, k \in \{1, \ldots, k\}\, [\exists\, x_0 \in \mathbb{R}(p) :\ f_k(x_0) = 0] \Longrightarrow f_k = 0,$$

c. à d. la condition

$$\forall\, k \in 1, \ldots, p :\ Z_k = \emptyset \text{ ou } Z_k = \mathbb{R}(p)$$

ou la condition

$$\forall k \in \{1, \ldots, p\} \, [\forall x \in \mathbb{R}(p) : \; f_k(x) = 0 \text{ ou } \forall x \in \mathbb{R}(p) : \; f_k(x) = \exp a_k(x)]$$

et dans ce cas ce prolongement $g = (g_1, \ldots, g_p)$ est unique et

$$g_k = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^p \text{ si } f_k = 0 \text{ sur } \mathbb{R}(p)$$

et

$$g_k = \exp a_k \text{ sur } \mathbb{R}^p \text{ si } f_k = \exp a_k \text{ sur } \mathbb{R}(p).$$

Travaux cités

[1] J. Aczél, J. Dhombres, *Functional equations in several variables*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[2] A. Bahyrycz, *On a problem concerning the indicator plurality function*, Opuscula Math. **21** (2001), 11-30.

[3] A. Bahyrycz, Z. Moszner, *On the indicator plurality function*, sous presse dans Publicationes Math. Debrecen

[4] G.L. Forti, L. Paganoni, *A system of functional equations related to plurality functions. A method for the construction of the solution*, Aequationes Math. **52** (1996), 135-156.

[5] M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities. Cauchy's equation and Jensen's inequality*, PWN – Uniwersytet Śląski, Warszawa – Kraków – Katowice, 1985.

[6] Z, Moszner, *Sur les fonctions de pluralité*, Aequationes Math. **47** (1994), 175-190.

[7] Z. Moszner, *Remarques sur la fonction de pluralité*, Results in Math. **27** (1995), 387-394.

[8] F.S. Roberts, *On the indicator function of the plurality function*, Math. Social Sci. **22** (1991), 163-174.

Institute of Mathematics
Pedagogical University
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
Poland
E-mail: zmoszner@wsp.krakow.pl

Manuscript received: September 26, 2001