Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis

Folia 5 Studia Ad Calculum Probabilitatis Eiusque Didacticam Pertinentia I (2002)

Яков С. Бродский

По поводу задачи о разорении игрока

Abstract. To solve the classic problem concerning accidental walk of the particle the evalution jf walk duration till the moment in which it will be absorbed under given probability by one of the screens was obtained. Symmetrical and not symmetrical cases are considered.

1. Введениее

Обратимся к классической задаче о разорении игрока, которой занимались многие математики еще на заре теории вероятностей. Различные ее постановки приведены в [3], [5], [6], [7]. Рассмотрим ее в следующей постановке.

Двое играют в игру «герб или цифра». До начала игры у одного из них было m монет, а у другого — n монет того же достоинства. Подбрасывается монета; если выпал «герб», выигрывает первый, если «цифра» — второй. Ставка равна одной монете. Выигравший забирает обе монеты. Игра продолжается до тех пор, пока один из участников не выиграет все монеты.

Интерес представляют следующие вопросы.

1. Каковы вероятности разорения каждого из игроков?
2. Сколько раз в среднем им придется бросать монету, прежде чем игра закончится?
3. Сколько примерно раз придется бросать монету, чтобы с наперед заданной вероятностью игра закончилась?

В терминах случайных блужданий эту задачу можно сформулировать следующим образом.

Частица совершает случайные блуждания по целым точкам отрезка $[0; m+n]$ оси x в моменты времени $t = 1, 2, 3, \ldots$. В момент $t = 0$ частица находится в положении $x = m$, а в моменты $t = 1, 2, 3, \ldots$ она перемещается на один шаг влево (с вероятностью q) или на один шаг вправо (с вероятностью p, $p + q = 1$). Движение прекращается, когда частица в первый раз достигнет точки $x = 0$ или $x = m + n$. Граничные положения $x = m + n$ и $x = 0$ называются *поглощающими экранами*.

Вопросы 1-3 можно перефразировать так.

1. Каковы вероятности того, что частица, выйдя из точки $x = m$, поглотится экранами $x = 0$ или $x = m + n$?
2. Какова средняя продолжительность блуждания частицы до поглощения ее одним из экранов $x = 0$ или $x = m + n$?
3. Сколько примерно времени продлится блуждание частицы до тех пор, пока с заданной вероятностью она будет поглощена одним из экранов?

Ответы на первые два вопроса известны (см. [5] и [6]). Мы только напомним их. Знание средней продолжительности игры (случайного блуждания) не дает полного представления об ее истинной продолжительности. Интерес представляет вопрос, сколько времени должно продлиться случайное блуждание, чтобы частица почти наверняка была поглощена одним из экранов. Поиски ответа на него и составляют основное содержание работы.

Отдельно будут рассмотрены случай симметричного случайного блуждания, или подбрасывания симметричной монеты, или $p = q$ и случай несимметричного случайного блуждания, или подбрасывания несимметричной монеты, или $p \neq q$.

Для ответа на поставленные вопросы воспользуемся методом уравнений в конечных разностях или методом рекуррентных соотношений (см. [1], [2], [4]).

В работе приведены результаты машинного эксперимента, имитирующего описанные испытания, позволяющие делать выводы о согласии теоретических расчетов с его исходами.

2. Симметричное случайное блуждание

Вначале будем предполагать, что подбрасывается симметричная монета, т. е. вероятности выпадания «герба» и «цифры» при каждом бросании равны по $\frac{1}{2}$.

2.1 Вероятности разорения

Обозначим через q_j вероятность разориться игроку, имеющему j монет, тогда $p_j = 1 - q_j$ — это вероятность того, что он выиграет, т.е. что у этого игрока после окончания игры будут все $m + n$ монет.

Так как после очередного бросания игрок будет иметь $j + 1$ или $j - 1$ монет (в зависимости от того, что выпадет «герб» или «цифра»), то по формуле полной вероятности получим

$$p_j = \frac{1}{2}p_{j+1} + \frac{1}{2}p_{j-1}. \qquad (1)$$

Получили рекуррентное соотношение или однородное разностное уравнение с постоянными коэффициентами для вероятности p_j ($j = 1, 2, \ldots, m + n - 1$), причем выполняются граничные условия

$$p_0 = 0; \quad p_{m+n} = 1.$$

Уравнение (1) можно переписать в виде

$$p_{j+1} - 2p_j + p_{j-1} = 0.$$

Общие методы решения подобных уравнений изложены в [1], [2], [4]. В этом параграфе наряду с этими общими методами будут рассмотрены и элементарные методы, доступные учащимся.

Согласно [1], [2], [4], уравнению (1) соответствует характеристическое уравнение,

$$t^2 - 2t + 1 = 0,$$

имеющее два одинаковых корня $t_1 = t_2 = 1$. Поэтому решение уравнения (1) имеет вид

$$p_j = a + bj$$

Коэффициенты a и b найдем из граничных условий:

$$\begin{cases} 0 = p_o = a, \\ 1 = p_{m+n} = a + b(m+n). \end{cases}$$

Отсюда $a = 0$, $b = \frac{1}{m+n}$. Итак,

$$p_j = \frac{j}{m+n}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m+n;$$

т. е. вероятность разорения первого игрока равна $q_m = p_n = 1 - p_m = \frac{n}{m+n}$, второго — $q_n = p_m = \frac{m}{m+n}$.

Рассмотрим элементарный способ решения уравнения (1). Положив в (1) последовательно $j = 1, 2, \ldots, m + n - 1$, будем иметь

$$\begin{aligned} &p_2 - 2p_1 + p_0 = 0, \\ &p_3 - 2p_2 + p_1 = 0, \\ &p_4 - 2p_3 + p_2 = 0, \\ &\ldots \\ &p_{m+n} - 2p_{m+n-1} + p_{m+n-2} = 0. \end{aligned}$$

Так как $p_0 = 0$, то из первого из полученных равенств имеем: $p_2 = 2p_1$. Подставляя этот результат во второе равенство, получим: $p_3 = 3p_1$. Аналогично $p_4 = 4p_1$ и т. д. $p_{m+n} = (m+n)p_1$. Поскольку $p_{m+n} = 1$, то $p_1 = \frac{1}{m+n}, p_2 = \frac{2}{m+n}, p_3 = \frac{3}{m+n}$ и т. д. Методом математической индукции можно убедиться в том, что $p_j = \frac{j}{m+n}$ для $j = 1, 2, \ldots, m+n-1$. Это равенство остается справедливым и для $j = 0; j = m+n$.

Как и следовало ожидать, результаты, полученные разными методами, совпали. Таким образом, при подбрасывании симметричной монеты вероятности выигрыша для игроков пропорциональны их первоначальным капиталам. Другими словами, игрок с относительно большим начальным капиталом m имеет значительные шансы выиграть малую сумму n, прежде чем разориться.

2.2 Средняя продолжительность игры

Пусть X_j — число бросаний монеты, которые необходимо произвести, чтобы игра завершилась, если у одного игрока j монет, а у другого $m+n-j, j = 0, 1, \ldots, m+n$. Для нахождения средней продолжительности игры или математического ожидания случайной величины X_j достаточно знать распределение этой случайной величины. Однако среднюю продолжительность игры можно вычислить и проще, снова применив метод рекуррентных соотношений.

Очевидно, что $X_0 = 0, X_{m+n} = 0$ и ввиду симметричности монеты $X_j = X_{m+n-j}$. Требуется найти $E(X_m) = E(X_n)$. Пусть событие A означает, что первое бросание, осуществленное владельцем j монет, завершилось «гербом». $P(A) = P(\overline{A}) = \frac{1}{2}$ По формуле полной вероятности имеем

$$P(X_j = k) = P(A)P(X_j = k|A) + P(\overline{A})P(X_j = k|\overline{A}).$$

или

$$P(X_j = k) = \frac{1}{2}P(X_{j+1} = k-1) + \frac{1}{2}P(X_{j-1} = k-1). \qquad (2)$$

Умножим обе части последнего равенства на k и просуммируем полученные равенства по k от $m+n-j$ до $+\infty$. Получим

$$\sum_{k=m+n-j}^{+\infty} kP(X_j = k) = \frac{1}{2} \sum_{k=m+n-j}^{+\infty} kP(X_{j+1} = k-1) + \frac{1}{2} \sum_{k=m+n-j}^{+\infty} kP(X_{j-1} = k-1).$$

После несложных преобразований придем к равенству

$$\sum_{k=m+n-j}^{+\infty} kP(X_j = k) = \frac{1}{2} \sum_{k=m+n-j}^{+\infty} (k-1)P(X_{j+1} = k-1)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=m+n-j}^{+\infty} P(X_{j+1}=k-1)+\sum_{k=m+n-j}^{+\infty} kP(X_j=k)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=m+n-j}^{+\infty}(k-1)P(X_{j-1}=k-1)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=m+n-j}^{+\infty} P(X_{j-1}=k-1).$$

Так как

$$\sum_{k=m+n-j}^{+\infty}(k-1)P(X_{j+1}=k-1)=\sum_{k=m+n-j}^{+\infty}(k-1)P(X_{j-1}=k-1)=1,$$

то

$$\sum_{k=m+n-j}^{+\infty} kP(X_j=k)=\frac{1}{2}\sum_{k=m+n-j}^{+\infty}(k-1)P(X_{j+1}=k-1)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=m+n-j}^{+\infty}(k-1)P(X_{j-1}=k-1)+1.$$

Используя определение математического ожидания случайной величины, перепишем предыдущее равенство в следующем виде

$$E(X_j)=\frac{1}{2}EX_{j+1}+\frac{1}{2}EX_{j-1}+1.$$

или, обозначив $E(X_j)$ через $E_j, j=0,1,\ldots,m+n$, в виде

$$E_{j+1}-2E_j+E_{j-1}=-2. \tag{3}$$

Это уравнение отличается от уравнения (1) наличием свободного члена. Это так называемое неоднородное разностное уравнение с граничными условиями

$$E_0=E_{m+n}=0.$$

Согласно общей теории разностных уравнений [2], общее решение неоднородного разностного уравнения с постоянными коэффициентами находится в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного. Однородное уравнение, соответствующее уравнению (3), совпадает с уравнением (1), его общее решение, как мы видели, имеет вид $a+bj$.

Известно [2], что если правая часть неоднородного разностного уравнения с постоянными коэффициентами является многочленом n-й степени, а характеристическое уравнение имеет s-кратный корень, то частное решение нужно искать в виде

$$A_0x^s + A_1x^{s+1} + \ldots + A_nx^{s+n}.$$

Учитывая, что характеристическое уравнение имеет двукратный корень 1, а правая часть, равная -2, является многочленом нулевой степени, частное решение будем искать в виде

$$E_j^* = A_0j^2.$$

Подставляя выражение для E_j^* в уравнение (3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях j, определим A_0. Имеем

$$A_0(j+1)^2 - 2A_0j^2 + A_0(j-1)^2 = -2.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &A_0 - 2A_0 + A_0 = 0,\\ &2A_0 - 2A_0 = 0,\\ &A_0 + A_0 = -2. \end{aligned}$$

т. е. $A_0 = -1, E_j^* = -j^2$. Итак, общее решение уравнения (3) имеет вид

$$E_j = -j^2 + a + bj.$$

Используя граничные условия, получим

$$E_0 = E(X_0) = 0 = a, \quad E_{m+n} = E(X_{m+n}) = 0 = -(m+n)^2 + a + b(m+n).$$

Отсюда $a = 0, b = m+n, E_j = j(m+n-j)$.

Теперь решим ту же задачу, не прибегая к общей теории разностных уравнений. Для этого перепишем (3) в виде

$$-E_{j-1} + 2E_j - E_{j+1} = 2$$

и положим последовательно $j = 1, 2, 3, \ldots, (m+n-1)$. Будем иметь

$$\begin{cases} -E_0 + 2E_1 - E_2 = 2,\\ -E_1 + 2E_2 - E_3 = 2,\\ -E_2 + 2E_3 - E_4 = 2,\\ \ldots\\ -E_{(m+n-2)} + 2E_{(m+n-1)} - E_{(m+n)} = 2. \end{cases} \tag{4}$$

Сложим почленно полученные равенства:

$$-E_0 + E_1 + E_{m+n-1} = 2(m+n-1).$$

Так как $E_0 = 0, E_1 = E_{m+n-1}$, то

$$E_{m+n-1} = m+n-1.$$

Далее из равенств (4) можно последовательно получить

$$\begin{cases} E_2 = 2E_1 - 2 = 2(m+n-2), \\ E_3 = -E_1 + 2E_2 - 2 = 3(m+n-3), \\ E_4 = -E_2 + 2E_3 - 2 = 4(m+n-4), \\ \ldots \end{cases}$$

Естественно теперь предположить, что

$$E_j = j(m+n-j).$$

В справедливости этого равенства можно убедиться методом математической индукции. Итак,

$$E_m = E_n = mn.$$

Этот результат получен в предположении, что продолжительность игры имеет конечное математическое ожидание E_j. Строгое доказательство этого факта имеется, например, в [6].

2.3 Дисперсия числа бросаний

Для того, чтобы ответить на третий вопрос, поставленный во введении, можно воспользоваться неравенством Чебышева [6]:

$$P(|X - E(X)| \leqslant \epsilon) \geqslant 1 - \frac{D(X)}{\epsilon^2},$$

которое имеет место для произвольной случайной величины X и любого положительного числа ϵ. Чтобы применить его, необходимо вычислить дисперсию случайной величины X_j. Для краткости обозначим: $D(X_j) = D_j, E(X_j^2) = L_j$. Предварительно вычислим L_j. Умножим для этого обе части равенства (2) на k^2 и просуммируем полученные равенства по k от $(m+n-j)$ до $+\infty$. Будем иметь:

$$\sum_{k=m+n-j}^{+\infty} k^2 P(X_j = k) = \frac{1}{2} \sum_{k=m+n-j}^{+\infty} k^2 P(X_{j+1} = k-1)$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=m+n-j}^{+\infty} k^2 P(X_{j-1} = k-1).$$

Аналогично предыдущему последнее равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\sum_{k=m+n-j}^{+\infty} k^2 P(X_j = k) = \frac{1}{2} &\sum_{k=m+n-j}^{+\infty} (k-1)^2 P(X_{j+1} = k-1)\\ &+ \sum_{k=m+n-j}^{+\infty} kP(X_{j+1} = k-1)\\ &- \frac{1}{2} \sum_{k=m+n-j}^{+\infty} P(X_{j+1} = k-1)\\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=m+n-j}^{+\infty} (k-1)^2 P(X_{j-1} = k-1)\\ &+ \sum_{k=m+n-j}^{+\infty} kP(X_{j-1} = k-1)\\ &- \frac{1}{2} \sum_{k=m+n-j}^{+\infty} P(X_{j-1} = k-1),\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\sum_{k=m+n-j}^{+\infty} k^2 P(X_j = k) = \frac{1}{2} &\sum_{k=m+n-j}^{+\infty} (k-1)^2 P(X_{j+1} = k-1)\\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=m+n-j}^{+\infty} (k-1)^2 P(X_{j-1} = k-1)\\ &+ \sum_{k=m+n-j}^{+\infty} (k-1) P(X_{j+1} = k-1)\\ &+ \sum_{k=m+n-j}^{+\infty} (k-1) P(X_{j-1} = k-1) + 1.\end{aligned}$$

Воспользовавшись ранее введенными обозначениями, получим

$$L_j = \frac{1}{2} L_{j+1} + \frac{1}{2} L_{j-1} + E_{j+1} + E_{j-1} + 1. \tag{5}$$

Подставив в равенство (5) значения средних

$$\begin{aligned} E_{j+1} &= (j+1)(m+n-j-1), \\ E_{j-1} &= (j-1)(m+n-j+1), \end{aligned}$$

будем иметь

$$L_j = \frac{1}{2}L_{j+1} + \frac{1}{2}L_{j-1} + 2j(m+n) - 2j^2 - 1. \tag{6}$$

Опять получили неоднородное разностное уравнение с постоянными коэффициентами, однако в отличие от уравнения (3) свободный член является не константой, а зависит от переменной j.

Однородное уравнение, соответствующее уравнению (6), совпадает с уравнением (1) и его общее решение также имеет вид $a+bj$. Так как правая часть уравнения (6) является многочленом второй степени, а характеристическое уравнение имеет двукратный корень, то частное решение уравнения (6) будем искать в виде

$$L_j^* = A_0 j^2 + A_1 j^3 + A_2 j^4.$$

Подставим выражение для L_j^* в уравнение

$$L_{j+1} - 2L_j + L_{j-1} = 4j^2 - 4j(m+n) + 2.$$

Получим

$$\begin{aligned} A_0(j+1)^2 + A_1(j+1)^3 + A_2(j+1)^4 - 2A_0j^2 - 2A_1j^3 - 2A_2j^4 \\ +A_0(j-1)^2 + A_1(j-1)^3 + A_2(j-1)^4 \\ = 4j^2 - 4j(m+n) + 1. \end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях j, будем иметь

$$\begin{cases} A_2 - 2A_2 + A_2 = 0, \\ A_1 + 4A_2 - 2A_1 + A_1 - 4A_2 = 0, \\ A_0 + 3A_1 + 6A_2 - 2A_0 + A_0 - 3A_1 + 6A_2 = 4, \\ 2A_0 + 3A_1 + 4A_2 - 2A_0 + 3A_1 - 4A_2 = -4(m+n), \\ A_0 + A_1 + A_2 + A_0 - A_1 + A_2 = 2. \end{cases}$$

Решая полученную систему, найдем

$$A_2 = \frac{1}{3}, \quad A_1 = -\frac{2}{3}(m+n), \quad A_0 = \frac{2}{3}.$$

Итак,

$$L_j^* = \frac{2}{3}j^2 - \frac{2}{3}(m+n)j^3 + \frac{1}{3}j^4.$$

Общее решение уравнения (6) будем искать в виде

$$L_j = a + bj + \frac{2}{3}j^2 - \frac{2}{3}(m+n)j^2 + \frac{1}{3}j^4.$$

Используя граничные условия $L_0 = E(X_0^2) = 0; L_{m+n} = E(X_{m+n}^2) = 0$, получим

$$a = 0, b = \frac{1}{3}(m+n)^3 - \frac{2}{3}(m+n).$$

Таким образом, общее решение уравнения (6) имеет вид

$$L_j = \frac{1}{3}(m+n)^3 j - \frac{1}{6}(m+n)j + \frac{2}{3}j^2 - \frac{2}{3}(m+n)j^3 + \frac{1}{3}j^4.$$

Рассмотрим другой метод решения уравнения (6), не использующий общей теории разностных уравнений.

Положим последовательно $j = 1, 2, \ldots, m+n-1$ в равенстве

$$-L_{j+1} + 2L_j - L_{j+1} = 4j(m+n) - 4j^2 - 1. \tag{7}$$

Получим

$$\begin{aligned} -L_0 + 2L_1 - L_2 &= 4 \cdot 1(m+n) - 4 \cdot 1^2 - 2, \\ -L_1 + 2L_2 - L_3 &= 4 \cdot 2(m+n) - 4 \cdot 2^2 - 2, \\ &\ldots \\ -L_{m+n-2} + 2L_{m+n-1} - L_{m+n} &= 4(m+n-1)(m+n) - 4(m+n-1)^2 - 2. \end{aligned} \tag{8}$$

Сложив почленно эти равенства и учитывая, что $L_0 = L_{m+n} = 0, L_1 = L_{m+n-1}$ придем к следующему результату:

$$2L_1 = 4(m+n)(1+2+\cdots+(m+n-1)) - 4(1^2+2^2+\cdots+(m+n-1)^2) - 2(m+n-1).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} L_1 = {} & 2(m+n)\frac{(m+n)(m+n-1)}{2} - 2\frac{(m+n-1)(m+n)(2m+2n-1)}{6} \\ & - (m+n-1), \end{aligned}$$

или

$$L_1 = (m+n)^3 - \frac{2}{3}(m+n)^2(m+n+1) + \frac{2}{3}(m+n)(m+n-2) + 2.$$

Применив первое из равенств (8), можно записать:

$$L_2 = 2(m+n)^3 - \frac{4}{3}(m+n)^2(m+n+1) + \frac{4}{3}(m+n)(m+n-5) + 8.$$

Точно также

$$L_3 = 3(m+n)^3 - 2(m+n)^2(m+n+1) + 2(m+n)(m+n-10) + 33,$$
$$L_4 = 4(m+n)^3 - \tfrac{8}{3}(m+n)^2(m+n+1) + \tfrac{8}{3}(m+n)(m+n-17) + 96,$$
$$L_5 = 5(m+n)^3 - \tfrac{10}{3}(m+n)^2(m+n+1) + \tfrac{10}{3}(m+n)(m+n-26) + 225,$$
$$\ldots$$

Можно предположить, что

$$\begin{aligned} L_j &= j(m+n)^3 - \frac{2j}{3}(m+n)^2(m+n+1) \\ &+ \frac{2j}{3}(m+n)(m+n-j^2-1) + \frac{j^2}{3}(j^2+2). \end{aligned} \tag{9}$$

Приведем соображения, позволившие "угадать" последнее слагаемое $a_j = \frac{j^2}{3}(j^2+2)$, $j = 1, 2, \ldots$. Введем обозначения:

$$b_j = \frac{a_j}{j}, \quad c_j = b_{j+1} - b_j, \quad d_j = c_{j+1} - c_j, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Расположим в таблице 1 значения a_j, b_j, c_j, d_j для найденных значений j.

j	1	2	3	4	5
a_j	1	8	33	96	225
b_j	1	4	11	24	45
c_j	3	7	13	21	
d_j	4	6	8		

Таблица 1.

Можно предположить, что $d_j = 2(j+1)$. Тогда

$$a_j = jb_j = j(c_1 + c_2 + \ldots + c_{j-1}) + 1,$$
$$c_k = d_1 + \ldots + d_{k-1} + c_1 = 2(2+3+\ldots+k) + 3 = k^2 + k + 1, \quad k = 1, 2, \ldots$$

отсюда

$$a_j = j((1^2 + \ldots + (j-1)^2) + (1+2+\ldots+(j-1)) + j - 1 + 1) = \frac{j^2}{3}(j^2+2).$$

В справедливости (9) можно убедиться методом математической индукции. При $j = m$ из равенства (9) будем иметь:

$$\begin{aligned} L_m &= m(m+n)^3 - \frac{2m}{3}(m+n)^2(m+n+1) \\ &+ \frac{2m}{3}(m+n)(m+n-m^2-1) + \frac{m^2}{3}(m^2+2) \\ &= \frac{mn}{3}(m^2+3mn+n^2-2). \end{aligned}$$

Дисперсия числа игр, которые предстоит сыграть до разорения одного из игроков, равна

$$D(X_m) = L_m - E_m^2 = \frac{mn}{3}(m^2 + n^2 - 2).$$

Таким образом, можно утверждать, что с вероятностью, близкой к единице, число игр, которые предстоит сыграть игрокам с капиталами m и n, находится в интервале $mn \pm 3\sigma_m$, где

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{3}mn(m^2 + n^2 - 2)}.$$

Воспользовавшись неравенством Чебышева, можно также указать, сколько бросаний монеты нужно произвести, чтобы с любой наперед заданной вероятностью P игра завершилась разорением одного из игроков. Это количество бросаний находится в интервале

$$E_m \pm \sqrt{\frac{D_m}{1 - P}}.$$

В таблице 2 приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

№	Капитал		Вероятность разорения		Средняя продолжительность игры E_m	Среднек. отклонение σ_m	Верхняя граница трехсигмового интервала $E_m + 3\sigma_m$	Заданная вероятность P	Верхняя граница интервала $E_m + \frac{\sigma_m}{\sqrt{1-P}}$
	1. игрока m	2. игрока n	1. игрока q_m	2. игрока p_n					
1	5	1	0,167	0,833	5	6,32	24,0	0,95	33,3
2	5	3	0,375	0,625	15	12,7	53,0	0,95	71,6
3	5	3	0,375	0,625	15	12,7	53,0	0,9	55,0
4	5	3	0,375	0,625	15	12,7	53,0	0,8	43,3
5	5	3	0,375	0,625	15	12,7	53,0	0,7	38,0
6	10	5	0,333	0,667	50	45,3	186	0,9	193
7	20	10	0,333	0,667	200	182	747	0,8	603
8	30	15	0,333	0,667	450	410	1681	0,8	1368
9	50	30	0,375	0,625	1500	1303	5409	0,9	5622
10	90	10	0,1	0,9	900	1568	5604	0,9	5859

Таблица 2.

Как видно, средняя продолжительность игры, а тем более число подбрасываний монеты, необходимых для завершения игры разорением одного из игроков с вероятностью, близкой к 1, значительно больше, чем обычно полагают. Например, если один из игроков имеет 90 монет, а другой только 10, то средняя продолжительность игры равна 900 испытаниям, а для того, чтобы игра завершилась разорением одного из игроков с вероятностью 0,9 может понадобиться 5859 испытаний.

Для проверки согласия полученных результатов с опытными данными был проведен на ПЭВМ машинный имитационный эксперимент. Его результаты приведены в таблице 3.

№	Капитал		Число проведенных игр N	Событие «1. игрок разорился»		Средняя продолжительность игры		Среднек. отклонение		% числа партий, попавших в	
	1. игрока m	2. игрока n		вероятность	относительная частота	теоретическая	эмпирическая	теоретическое	эмпирическое	2-х сигмовый интервал	3-х сигмовый интервал
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	5	1	1000	0,167	0,172	5	5,20	6,32	6,81	94,0	97,2
2	5	3	1000	0,375	0,407	15	15,0	12,6	11,6	95,4	98,9
3	10	5	1000	0,333	0,347	50	51,4	45,3	46,4	95,0	97,5
4	20	10	1000	0,333	0,331	200	203	182	188	93,8	98,2
5	20	15	1000	0,429	0,453	300	310	250	252	95,3	97,9
6	30	15	1000	0,333	0,339	450	465	410	417	95,3	98,3
7	50	30	1000	0,375	0,392	1500	1485	1303	1279	95,9	98,2
8	90	10	1000	0,1	0,093	900	875	1568	1591	95,6	97,6
9	90	10	100	0,1	0,06	900	856	1568	1595	94,0	98,0
10	90	10	100	0,1	0,07	900	728	1568	1407	95,0	97,0

Таблица 3.

В таблице приведены для сравнения результаты вычисления числовых характеристик по формулам, приведенным в работе, и соответствующие эмпирические характеристики, вычисленные по результатам N имитационных экспериментов, проведенных с помощью ПЭВМ: вероятность разорения первого игрока и относительная частота этого события, математическое ожидание продолжительности игры и выборочное среднее, среднеквадратическое отклонение и выборочное среднеквадратическое отклонение. Данные, приведенные в столбцах 4–5, 6–7, 8–9, свидетельствуют о хорошем согласии опытных данных с результатами теоретических расчетов. Из данных, помещенных в 10–11 столбцах, видно, что продолжительности более 94% сыгранных партий попадает в двухсигмовый интервал $E_m \pm 2\sigma_m$ и порядка 98% — в трехсигмовый интервал. Это больше, чем предсказывает неравенство Чебышева, согласно которому для любой случайной величины вероятность отклонения от среднего значения не более чем на два среднеквадратических отклонения σ не меньше 0,75; а вероятность значений, лежащих на расстоянии 3σ от среднего значения, не меньше $\frac{8}{9}$. Дело в том, что при большом числе наблюдений, справедливы более сильные результаты по сравнению с теми, которые следуют из неравенства Чебышева.

3. Несимметричное случайное блуждание

Теперь рассмотрим случай, когда монета несимметрична, т. е. вероятности p и $q = 1 - \text{р}$ выпадания соответственно «герба» и «цифры» при каждом бросании монеты не равны.

3.1 Вероятности разорения

Обозначим через p_j вероятность того, что игра закончится победой первого игрока, имеющего j монет в то время, когда у его противника $m+n-j$ монет, т. е. игрока, для которого вероятность выигрыша в каждой партии равна p, а вероятность проигрыша — q $(p + q = 1)$. Аналогично уравнению (1) получим разностное уравнение для p_j :

$$p_j = pp_{j+1} + qp_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, m = n - 1. \tag{10}$$

Граничные условия прежние:

$$p_0 = 0, \quad p_{m+n} = 1.$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$pt^2 - t + (1 - p) = 0$$

имеет различные корни $t_1 = 1; t_2 = \frac{q}{p}$. Известно [2], что если характеристическое уравнение имеет различные корни t_1 и t_2, то общее решение однородного разностного уравнения имеет вид

$$p_j = at_1^j + bt_2^j,$$

где a и b — константы. Поэтому общее решение уравнения (10) ищем в следующем виде

$$p_j = a + b\left(\frac{q}{p}\right)^j.$$

С учетом граничных условий получим

$$p_j = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^j}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}}.$$

Таким образом, вероятность того, что первый игрок, в конце концов, выиграет равна (см. [5]):

$$p_m = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^m}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}}.$$

Вероятность того, что , в конце концов, выиграет второй игрок, можно получить, заменив в предыдущем равенстве m на n, n на m, p на q и q на p:

$$q_n = \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^n}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{m+n}}.$$

Легко проверить, что $p_m + q_n = 1$, т. е. вероятность того, что игра будет продолжаться бесконечно долго, равна нулю.

Рассмотрим теперь, как влияет изменение ставки на вероятности разорения. Пусть ставка в каждой партии равна не одной, а двум монетам. Будем считать, что m и n — чётные числа. В противном случае вероятности разорения равны нулю. Разностное уравнение для новой вероятности выигрыша p_j^* примет вид

$$p_j^* = pp_{j+2}^* + qp_{j-2}^*.$$

Корни характеристического уравнения

$$pt^4 - t^2 + q = 0$$

равны ± 1; $\pm\sqrt{\frac{q}{p}}$. При чётном j имеем

$$p_j^* = 2\left(a + b\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{j}{2}}\right).$$

С учётом граничных условий окончательно получим

$$p_j^* = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{j}{2}}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{m+n}{2}}}, \quad p_m^* = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{m}{2}}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{m+n}{2}}}, \quad q_n^* = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{2}}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{m+n}{2}}}.$$

Последнее выражение для вероятности разорения первого игрока легко преобразуется к виду

$$q_n^* = \frac{\left(1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{2}}\right)\left(1 + \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{2}}\right) - \left(1 + \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{m+n}{2}}\right)}{\left(1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{m+n}{2}}\right)\left(1 + \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{m+n}{2}}\right)\left(1 + \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{2}}\right)} = q_n \frac{1 + \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{m+n}{2}}}{1 + \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{2}}}.$$

Если $q > p$, то последняя дробь меньше единицы, и $q_n^* < q_n$. Поэтому, если ставка удваивается, а начальные капиталы остаются прежними, то вероятность разорения более слабого игрока (которому игра невыгодна, так как $p < q$) уменьшается.

Аналогичные результаты имеют место не только при удвоении ставки, а при любом её увеличении.

Полученные утверждения подтверждают целесообразность страхования здоровья от несчастного случая, имущества от пожара, хотя при этом осуществляется „невыгодная” игра. Вероятность разорения игрока будет минимальной, если он выберет максимальную ставку, совместимую с той суммой, которую он хочет выиграть.

Если $p = q = \frac{1}{2}$, то выражение для p_j теряет смысл. Но, обозначив $\frac{q}{p}$ через u, получим:

$$\lim_{q \to p} p_j = \lim_{u \to 1} \frac{1 - u^j}{1 - u^{m+n}} = \lim_{u \to 1} \frac{(1-u)(1 + u + \ldots + u^{j-1})}{(1-u)(1 + u + \ldots + u^{m+n-1})} = \frac{j}{m+n}.$$

Другими словами, при $p = q = \frac{1}{2}$

$$p_j = \frac{j}{m+n}; \quad p_m = \frac{m}{m+n}; \quad q_n = \frac{n}{m+n}.$$

Эти результаты совпадают с полученными ранее другими методами.

3.2 Средняя продолжительность игры

Разностное уравнение для математического ожидания числа испытаний, необходимых для того. чтобы игра закончилась разорением одного из игроков, выводится аналогично случаю $p = q = \frac{1}{2}$. Оно имеет вид:

$$E_j = pE_{j+1} + qE_{j-1} + 1, \tag{11}$$

где $E_j = E(X_j)$ — это математическое ожидание числа партий, необходимых сыграть для того, чтобы игрок с капиталом j (в то время, когда капитал противника равен $m+n-j$ и вероятностью выигрыша при каждом бросании равной p (и вероятностью проигрыша $q, p+q=1$) завершил игру либо своим разорением, либо разорением противника.

Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $a + b(\frac{q}{p})^j$. Ввиду того, что правая часть неоднородного уравнения (11) является многочленом нулевой степени и кратность каждого корня характеристического уравнения равна 1, частное решение уравнения (11) ищем в виде:

$$E_j = A_0 j.$$

Подставив последнее выражение в уравнение (11), будем иметь

$$pA_0(j+1) - A_0 j + qA_0(j-1) = -1,$$

откуда $A_0 = \frac{1}{q-p}$. Итак, $E_j^* = \frac{j}{q-p}$, а общее решение уравнения (11) примет вид

$$E_j = \frac{j}{q-p} + a + b\left(\frac{q}{p}\right)^j.$$

Используя граничные условия $E_0 = E(X_0) = 0$, $E_{m+n} = E(X_{m+n}) = 0$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} a + b = 0, \\ \frac{m+n}{q-p} + a + b\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} = 0, \end{cases}$$

откуда

$$a = \frac{m+n}{(q-p)\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n} - 1\right)}; \quad b = -a.$$

Таким образом, общее решение уравнения (11) имеет вид:

$$E_j = \frac{j}{q-p} - \frac{m+n}{q-p}\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^j}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}}, \quad j = 0, 1, \ldots, m+n. \tag{12}$$

Итак, средняя продолжительность игры до разорения одного из игроков равна

$$E_m = \frac{m}{q-p} - \frac{m+n}{q-p}\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^m}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}}. \tag{13}$$

E_m — это средняя продолжительность игры, которая заканчивается для игрока с начальным капиталом m и вероятностью выигрыша при каждом бросании p либо разорением (проигрышем m монет), либо приобретением капитала $m+n$ (выигрышем n монет).

Легко заметить, что если в равенстве (12) положить $j = n$, а q заменить на p и p на q, то получим тот же самый результат (13).

Опять обращаем внимание на то, что равенства (12) и (13) справедливы при $p \neq q$. Но вычисляя предел E_j при $q \to p$ (например, с помощью правила Лопиталя), получим:

$$\lim_{q \to p} E_j = j(m+n-j)$$

или

$$\lim_{q \to p} E_m = mn,$$

т. е. снова придем к ранее полученному результату.

3.3 Дисперсия числа бросаний

Воспользуемся ранее введенным обозначением $L_j = E(X_j^2)$. Аналогично равенству (5) можно получить следующее соотношение

$$L_j = pL_{j+1} + qL_{j-1} + 2pE_{j+1} + 2qE_{j-1} + 1.$$

Подставим сюда значения средних E_{j+1} и E_{j-1} из равенства (12). Получим:

$$\begin{aligned}
L_j &= pL_{j+1} + qL_{j-1} + \frac{2p(j+1)}{q-p} - \frac{2p(m+n)}{q-p}\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{j+1}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}} \\
&\quad + \frac{2q(j-1)}{q-p} - \frac{2q(m+n)}{q-p}\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{j-1}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}} + 1 \\
&= pL_{j+1} + qL_{j-1} + \frac{2j}{q-p} \\
&\quad - \left(1 + \frac{2(m+n)}{(q-p)\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}\right)}\right) \\
&\quad + \frac{2(m+n)}{(q-p)\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}\right)}\left(\frac{q}{p}\right)^{j}
\end{aligned} \tag{14}$$

Снова получили неоднородное разностное уравнение с постоянными коэффициентами. Общее решение соответствующего однородного уравнения, как и для уравнения (11), имеет вид $a+b(\frac{q}{p})^j$. Правая часть разностного уравнения (14) представляет собой сумму многочлена первой степени и показательной функции вида $C(\frac{q}{p})^j$. Частное решение неоднородного уравнения (14) будем искать для каждого слагаемого в отдельности.

Частное решение неоднородного разностного уравнения, правая часть которого является многочленом первой степени, а корни характеристического уравнения имеют кратность 1, будем искать, согласно [2], в виде

$$L_{1j}^* = a_0 j + a_1 j^2.$$

Подставим это выражение в уравнение

$$pL_{j+1} - L_j + qL_{j-1} = 1 + \frac{2(m+n)}{(q-p)\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}\right)} - \frac{2j}{q-p}.$$

Получим

$$pa_0(j+1) + pa_1(j+1)^2 - a_0 j - a_1 j^2 + qa_0(j-1) + qa_1(j-1)^2$$
$$= 1 + \frac{2(m+n)}{(q-p)\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}\right)} - \frac{2j}{q-p}.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях j, придем к следующей системе уравнений относительно a_0 и a_1:

$$\begin{cases} pa_1 - a_1 + qa_1 = 0, \\ pa_0 + 2pa_1 - a_0 + qa_0 - 2qa_1 = -\dfrac{2}{q-p}, \\ pa_0 + pa_1 - qa_0 + qa_1 = 1 + \dfrac{2(m+n)}{(q-p)\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}\right)}. \end{cases}$$

Отсюда

$$a_1 = \frac{1}{(q-p)^2}; a_0 = \frac{1}{(q-p)^3} - \frac{1}{q-p} - \frac{2(m+n)}{(q-p)^2\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}\right)}.$$

Итак,

$$L_{1j}^* = \left(\frac{1}{(q-p)^3} - \frac{1}{q-p} - \frac{2(m+n)}{(q-p)^2(1-\left(\frac{q}{p}^{m+n}\right)}\right) j + \frac{j^2}{(q-p)^2}.$$

Известно [2], что если правая часть неоднородного разностного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид $P(j)a^{\lambda j}$, где $P(j)$ — многочлен n-й степени, а λ — s-кратный корень соответствующего характеристического уравнения, то частное решение нужно искать в форме

$$L_{2j}^{*} = (a_0 j^s + \ldots + a_n j^{s+n})a^{\lambda j}.$$

В нашем случае правая часть имеет вид $A(\frac{p}{q})^j, n = 0$, единица является однократным корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение ищем в виде

$$L_{2j}^{*} = b_0 j \left(\frac{q}{p}\right)^j.$$

Подставив это выражение в уравнение

$$pL_{j+1} - L_j + qL_{j-1} = -\frac{2(m+n)}{(q-p)\left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}\right)} \left(\frac{q}{p}\right)^j,$$

будем иметь

$$pb_0(j1)\left(\frac{q}{p}\right)^{j+1} - b_0 j \left(\frac{q}{p}\right)^j + qb_0(j-1)\left(\frac{q}{p}\right)^{j-1}$$

$$= -\frac{2(m+n)}{(q-p)\left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}\right)} \left(\frac{q}{p}\right)^j.$$

Сократив обе части последнего равенства на $(\frac{q}{p})^j$, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях j, получим

$$b_0 = -\frac{2(m+n)}{(q-p)^2\left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}\right)},$$

т. е.

$$L_{2j}^{*} = -\frac{2(m+n)j\left(\frac{q}{p}\right)^j}{(q-p)^2\left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}\right)}.$$

Итак, частное решение уравнения (14) равно сумме частных решений L_{1j}^{*} и L_{2j}^{*} , а общее решение имеет вид

$$L_j = a + b\left(\frac{q}{p}\right)^j + \frac{j}{(q-p)^2}\left(\frac{4pq}{q-p} - \frac{2(m+n)\left(1 + \left(\frac{q}{p}\right)^j\right)}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}} + j\right).$$

Коэффициенты a и b найдем из граничных условий $L_0 = E(X_0^2) = 0$: $L_{m+n} = E(X_{m+n}^2) = 0$.

$$a = -b = -\frac{m+n}{(q-p)^2\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}\right)}\left(\frac{4pq}{q-p} - \frac{(m+n)\left(1+3\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}\right)}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}}\right).$$

Таким образом,

$$L_j = \frac{(m+n)\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^j\right)}{(q-p)^2\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}\right)}\left(\frac{(m+n)\left(1+3\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}\right)}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}} - \frac{4pq}{q-p}\right)$$
$$+ \frac{j}{(q-p)^2}\left(\frac{4pq}{q-p} - \frac{2(m+n)\left(1+\left(\frac{q}{p}\right)^j\right)}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}} + j\right).$$

При $j = m$ будем иметь

$$L_m = \frac{(m+n)\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^m\right)}{(q-p)^2\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}\right)}\left(\frac{(m+n)\left(1+3\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}\right)}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}} - \frac{4pq}{q-p}\right)$$
$$+ \frac{m}{(q-p)^2}\left(\frac{4pq}{q-p} - \frac{2(m+n)\left(1+\left(\frac{q}{p}\right)^m\right)}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}} + m\right).$$

Дисперсия числа игр, которые предстоит сыграть игроку с капиталом m монет, до разорения одного из игроков, равна

$$\begin{aligned}
D(X_m) &= L_m - E_m^2 \\
&= \frac{(m+n)^2\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^m\right)\left(\frac{q}{p}\right)^m\left(3\left(\frac{q}{p}\right)^n+1\right)}{(q-p)^2\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}\right)^2} \\
&\quad - \frac{4m(m+n)\left(\frac{q}{p}\right)^m}{(q-p)^2\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}\right)} \\
&\quad + \frac{4pq\left(m\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}\right)-(m+n)\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^m\right)\right)}{(q-p)^3\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^{m+n}\right)}.
\end{aligned}$$

Эта формула позволяет ответить на третий вопрос, поставленный во введении, точно так же, как это было сделано для симметричной монеты.

В таблице 4 приведены примеры, аналогичные помещенным в таблице 2 для симметричного случая. Все обозначения, использованные в таблице 2, сохранены.

№	m	n	p	q	E_m	σ_m	Задан. вероятность P	$E_m + \frac{\sigma_m}{\sqrt{1-P}}$	Вероят. разорения 1 игрока	Вероят. разорения 2 игрока
1	9	1	0,6	0,4	4,56	8,24	0,9	30,63	0,009	0,991
2	9	1	0,4	0,6	11,96	15,13	0,9	59,80	0,339	0,661
3	9	1	0,6	0,4	4,56	8,24	0,95	41,42	0,009	0,991
4	9	1	0,4	0,6	11,96	15,13	0,95	79,62	0,339	0,661
5	10	90	0,45	0,55	100	99,5	0,9	414,64	≈ 1	≈ 0
6	10	90	0,55	0,45	765,6	372	0,9	1942	0,866	0,134
7	10	90	0,45	0,55	100	99,5	0,95	545	≈ 1	≈ 0
8	10	90	0,55	0,45	765,6	372	0,95	2429	0,866	0,134
9	3	5	0,7	0,3	10,95	6,36	0,99	74,6	0,078	0,922
10	3	5	0,3	0,7	7,23	5,53	0,99	62,5	0,987	0,013
11	4	8	0,65	0,35	23,3	13,5	0,9	66,0	0,084	0,916

Таблица 4.

Данные, приведенные в таблице, показывают, что на вероятность разорения игрока значительно большее влияние оказывают вероятности выигрыша при каждом бросании монеты, чем начальный капитал. Другими словами, лучше быть более умелым, чем более богатым.

4. Заключение

Безусловно, немало интересных вопросов, связанных с задачей о разорении игрока, остались нерассмотренными в данной работе. Например, можно попытаться ответить на вопросы 1-3, поставленные в начале работы для случая, когда размер ставки не постоянен, а случаен и определяется, скажем, подбрасыванием игральной кости.

Методы, использованные в работе, могут быть применены к решению других задач, например, к известной задаче коллекционера [3], [5]. Элементарные методы решения разностных уравнений, рассмотренные в работе, доступны учащимся, и они успешно могут быть применены к решению многих содержательных вероятностных задач.

Литература

[1] Я.С. Бродский, А.К. Слипенко. *Функциональные уравнения*, Вища школа, Киев, 1983.

[2] А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, Наука, Москва, 1967.

[3] *Избранные задачи. Сборник*, Пер. с англ. Ю.А. Данилова. Под ред. и с предисл. В.М. Алексеева, Мир, Москва, 1977.

[4] А.И. Маркушевич, *Возвратные последовательности. Популярные лекции по математике*, Вып. 1. Наука, Москва, 1975.

[5] A. Płocki, *Stochastyka 1. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna jako matematyka in statu nascendi*, Wydawnictwo Naukowe WSP Kraków, 1997.

[6] В. Феллер. *Введение в теорию вероятностей и её приложения*, т. 1. Мир, Москва, 1967.

[7] В. М. Ядренко, *Задача про разорення гравця*, У світі математики, т. 3, вип. 2, видавництво "ТВiМС", Київ, 1997.

Кафедра высшей математики и
методики преподавания математики
Донецкий национальный университет
Ул. Университетская. 24
340055, Донецк
Ukraine
E-mail: oleg@kompas.donetsk.ua