Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis

Folia 5 Studia Ad Calculum Probabilitatis Eiusque Didacticam Pertinentia I (2002)

Tomasz Kapela

Hazardowa wersja gry Penney'a

Abstract. At first, Penney's game and hazard Penney's game was defined (some kind of games played with a coin). This article, in great part, is about hazard Penney's game. It shows how Engel's graphs can be used to calculate expected value of each player's prize. This algorithm and other algorithms concerning Engel's graphs were written in the matrix form. The last paragraph includes a few examples of hazard Penney's games which have interesting properties and which are many times in contradiction with our intuition.

1. Czekanie na serie orłów i reszek i jego model probabilistyczny

Każdą n-wyrazową wariację zbioru $\{o, r\}$ interpretujemy jako wynik n-krotnego rzutu monetą i nazywamy *serią orłów i reszek o długości* n.

Niech α będzie serią orłów i reszek o długości l a ω dowolną m-wyrazową wariacją zbioru $\{o, r\}$. Jeżeli $l \leqslant m$ i w ciągu ω istnieje podciąg l kolejnych wyrazów tworzących ciąg α, to mówimy, że *seria* α *zawiera się w wariacji* ω i zapisujemy $\alpha \subset \omega$. Jeżeli podciąg l ostatnich wyrazów ciągu ω jest ciągiem α, to powiemy, że wariacja ω *kończy się serią* α.

Niech α i β będą seriami orłów i reszek o długości odpowiednio l i m. W dalszych rozważaniach zakładamy, że serie α i β są różne i w przypadku gdy są różnej długości, to seria krótsza nie zawiera się w dłuższej.

Powtarzanie rzutu monetą tak długo, aż wyniki l ostatnich rzutów utworzą serię α, albo aż wyniki m ostatnich rzutów utworzą serię β, nazywamy *czekaniem na jedną z serii* α, β i oznaczymy przez $d_{\alpha-\beta}$.

Niech $\Omega_{\alpha-\beta}$ będzie zbiorem wszystkich co najmniej k-wyrazowych wariacji zbioru $\{o, r\}$, gdzie $k = min\{l, m\}$, kończących się serią α albo serią β i takich, że żaden inny (niż końcowy) podciąg kolejnych wyrazów nie tworzy ani serii α, ani serii β.

Jeżeli $\omega \in \Omega_{\alpha-\beta}$ to przez $|\omega|$ oznaczamy liczbę wyrazów ciągu ω, czyli jego długość. Niech

$$p_{\alpha-\beta}(\omega) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|\omega|} \text{ dla } \omega \in \Omega_{\alpha-\beta}.$$

Funkcja $p_{\alpha-\beta}$ jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\Omega_{\alpha-\beta}$, więc para $(\Omega_{\alpha-\beta}, p_{\alpha-\beta})$ jest przestrzenią probabilistyczną, którą uznajemy za model probabilistyczny doświadczenia $d_{\alpha-\beta}$ (por. [3], s. 24-25).

Niech $T_{\alpha-\beta}$ będzie czasem trwania doświadczenia $d_{\alpha-\beta}$ mierzonym liczbą wykonanych rzutów monetą. Jest więc $T_{\alpha-\beta}(\omega) = |\omega|$ dla $\omega \in \Omega_{\alpha-\beta}$.

Rozważmy zdarzenia:
$\{\ldots\alpha\} = \{$*doświadczenie* $d_{\alpha-\beta}$ *zakończy się uzyskaniem serii* $\alpha\}$,
$\{\ldots\beta\} = \{$*doświadczenie* $d_{\alpha-\beta}$ *zakończy się uzyskaniem serii* $\beta\}$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia $\{\ldots\alpha\}$ (zdarzenia $\{\ldots\beta\}$) w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega_{\alpha-\beta}, p_{\alpha-\beta})$ oznaczamy przez $P(\ldots\alpha)$ (odpowiednio przez $P(\ldots\beta)$).

Doświadczenie $d_{\alpha-\beta}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa (por. [2], s. 134). Każdy jednorodny łańcuch Markowa ma swój graf stochastyczy Engla (por. [1]), którego reprezentacją algebraiczną jest para $(S, \mathbf{Q})$, gdzie S jest zbiorem numerów węzłów grafu (ich etykiety są stanami), a $\mathbf{Q} = [p_{jk}]$ jest macierzą stochastyczną, w której p_{jk} jest prawdopodobieństwem przejścia bezpośrednio z węzła j do węzła k. Macierz $\mathbf{Q}$ nazywamy *macierzą przejść*.

Niech $\alpha = oo$, $\beta = ro$. Zbiór stanów doświadczenie d_{oo-ro} to $\{s, o, oo, r, ro\}$. Ponumerujmy te stany następująco:

stan	*s*	*o*	*oo*	*r*	*rr*
numer stanu	1	2	3	4	5

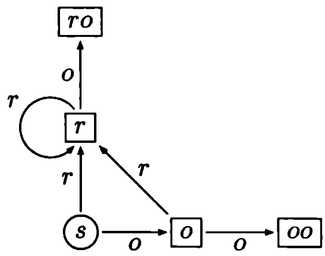
.

Przy tych oznaczeniach doświadczenie $d_{\alpha-\beta}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa $(S, \mathbf{Q})$, gdzie: $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para $(S, \mathbf{Q})$ jest zarazem algebraiczną reprezentacją grafu stochastycznego tego jednorodnego łańcucha Markowa. Odpowiednie stany są etykietami węzłów (s jest etykietą węzła startowego). Graf stochastyczny doświadczenia d_{oo-ro} przedstawia rysunek 1.

Niech $(S, \mathbf{Q})$ będzie grafem stochastycznym Engla dla doświadczenia $d_{\alpha-\beta}$. Jeżeli $p_{jj} = 1$, to węzeł j nazywamy *brzegowym* (w przypadku doświadczenia d_{oo-ro}węzłami brzegowymi są węzły oo i ro). Zbiór wszystkich węzłów brzegowych nazywamy *brzegiem grafu*. *Wnętrze grafu* jest zbiorem wszystkich jego węzłów, które nie należą do brzegu. Przez *krawędź* grafu rozumiemy parę węzłów grafu (j,k), taką, że węzeł j nie jest brzegowy i $p_{jk} > 0$. Oznaczamy ją przez $j \to k$. Każdy ciąg krawędzi taki, że początkiem pierwszej jest węzeł j, końcem ostatniej węzeł k i koniec krawędzi poprzedniej jest jednocześnie początkiem krawędzi następnej, nazywamy ***przejściem*** z węzła j do węzła k i oznaczamy przez $j \rightsquigarrow k$. Iloczyn prawdopodobieństw przyporządkowanych kolejnym krawędziom przejścia nazywamy ***wagą przejścia***. ***Trasą*** nazywamy każde przejście z węzła startowego do dowolnego węzła brzegowego. Zbiór wszytkich przejść z węzła j do węzła k oznaczamy przez $\{j \rightsquigarrow k\}$.



Rysunek 1.

2. Gra Penney'a i jej wersja hazardowa

Niech α i β będą różnymi seriami orłów i reszek o długościach odpowiednio l i m, takimi, że w przypadku różnych długości seria krótsza nie zawiera się w dłuższej.

W grze z udziałem dwóch graczy G_A i G_B rzuca się monetą tak długo aż wyniki l ostatnich rzutów utworzą serię α i wtedy zwycięża gracz G_A, albo aż wyniki ostatnich m rzutów utworzą serię β i wtedy zwycięża gracz G_B. Jest to tzw. *gra Penney'a*, którą w pracy oznaczamy przez $g_{\alpha-\beta}$ (zob. [2], s. 125 oraz [3] s. 312). Praca dotyczy pewnego uogólnienia tego typu gry.

Hazardową wersją gry Penney'a (albo krótko *hazardową grą Penney'a*) nazywamy grę, w której uczestniczy dwóch graczy G_A i G_B. Najpierw przeprowadza się grę $g_{\alpha-\beta}$, a następnie zwycięzca dostaje tyle złotówek, ile rzutów monetą wykonano w grze $g_{\alpha-\beta}$. Wygrana gracza, który zwyciężył w grze $g_{\alpha-\beta}$ jest czasem trwania doświadczenia $d_{\alpha-\beta}$, wygrana jego przeciwnika jest równa 0. Hazardową grę Penney'a oznaczamy przez $h_{\alpha-\beta}$. Interesuje nas wartość oczekiwana wygranej każdego z graczy.

Niech $T_{\alpha\bullet}$ oznacza wygraną gracza G_A. Jeśli o tej wygranej mówić przed rozpoczęciem gry, to $T_{\alpha\bullet}$ jest zmienną losową w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega_{\alpha-\beta}, p_{\alpha-\beta})$ określoną wzorem

$$T_{\alpha\bullet}(\omega) = \begin{cases} T(\omega) & \text{dla } \omega \in \{\ldots\alpha\}, \\ 0 & \text{dla } \omega \notin \{\ldots\alpha\}. \end{cases}$$

Analogicznie definiujemy $T_{\bullet\beta}$ jako wygraną gracza G_B.

Definicja wartości oczekiwanej nie jest tu wygodnym narzędziem obliczania $E(T_{\alpha\bullet})$. Wynika to z faktu, że konstrukcja rozkładu zmiennej losowej $T_{\alpha\bullet}$ jest uciążliwa. Z twierdzenia (zob. [3], s. 173) wynika, że

$$E(T_{\alpha\bullet}) = \sum_{\omega\in\Omega_{\alpha-\beta}} T_{\alpha\bullet}(\omega)p_{\alpha-\beta}(\omega). \tag{1}$$

Wartość oczekiwana $E(T_{\alpha\bullet})$ daje się łatwo obliczyć za pomocą tego wzoru tylko w przypadku niektórych serii orłów i reszek.

Niech $\alpha = oo$ i $\beta = ro$. W przestrzeni probabilistycznej $(\Omega_{oo-ro}, p_{oo-ro})$ mamy $\{\dots oo\} = \{oo\}$, a więc $E(T_{\alpha\bullet}) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

W przypadkach serii, dla których obliczanie wartości oczekiwanej zmiennej losowej $T_{\alpha\bullet}$ ze wzoru (1) jest trudne, jako środek argumentacji może posłużyć nam graf stochastyczny doświadczenia $d_{\alpha-\beta}$.

3. Algorytm obliczania wartości oczekiwanej wygranej gracza w hazardowej wersji gry Penney'a

Niech $(S, \mathbf{Q})$ będzie grafem stochastycznym doświadczenia $d_{\alpha-\beta}$. Oznaczmy przez a węzeł reprezentujący stan pochłaniający, którego etykietą jest seria α. Niech $\mathcal{B}$ oznacza brzeg grafu, q_{jk} zaś sumę wag wszystkich przejść $j \rightsquigarrow k$. Dla $j \in S \setminus \mathcal{B}$, przez Ω_j oznaczamy zbiór wszystkich przejść z węzła j na brzeg grafu. Niech p_j będzie funkcją, która każdemu przejściu ze zbioru przejść Ω_j przypisuje jego wagę. Jeżeli $j \in S \setminus \mathcal{B}$, to para (Ω_j, p_j) jest przestrzenią probabilistyczną (por.[2], s. 61).

W przestrzeni probabilistycznej (Ω_j, p_j), zdefiniujmy funkcję T_{ja}, która każdemu przejściu kończącemu się w węźle a, przypisuje jego długość (mierzoną liczbą krawędzi), a pozostałym przejściom liczbę 0. Funkcja T_{ja} jest zmienną losową w przestrzeni (Ω_j, p_j). Załóżmy, że istnieją wartości oczekiwane $E(T_{ja})$ dla $j \in S \setminus \mathcal{B}$. Przyjmijmy, że $E(T_{ja}) = e_{ja}$.

Dla $j \in \mathcal{B}$ mamy

$$e_{ja} = 0. \tag{2}$$

Załóżmy, że $j \notin \mathcal{B}$. Niech $K_j = \{k \in S : p_{jk} > 0\}$. Niech p oznacza funkcję przypisującą przejściu jego wagę a $B_{jk\mathcal{B}}$ — zbiór wszystkich przejść z węzła j na brzeg grafu i takich, że ich pierwszą krawędzią jest $j \to k$.
Niech

$$B_{j\mathcal{B}} := \bigcup_{k\in K_j} B_{jk\mathcal{B}}.$$

Jest $B_{j\mathcal{B}}$ zbiorem wszystkich przejść z węzła j na brzeg grafu.

Wobec przyjętych oznaczeń mamy

$$E(T_{ja}) = \sum_{\omega \in B_{j\mathcal{B}}} T_{ja}(\omega)p(\omega).$$

Zbiór $\{B_{jk\mathcal{B}}: k \in K_j\}$ jest układem zupełnym zdarzeń w przestrzeni probabilistycznej (Ω_j, p_j), a zatem

$$E(T_{ja}) = \sum_{k \in K_j} \sum_{\omega \in B_{jk\mathcal{B}}} T_{ja}(\omega)p(\omega).$$

Wartość zmiennej losowej T_{ja} jest równa zero dla wszystkich przejść nie kończących się w węźle a. Jest więc

$$E(T_{ja}) = \sum_{k \in K_j} \sum_{\omega \in B_{jka}} T_{ja}(\omega)p(\omega),$$

gdzie B_{jka} oznacza podzbiór zbioru $B_{jk\mathcal{B}}$ złożony z wszystkich przejść prowadzących do węzła a.

Pierwszą krawędzią każdego przejścia należącego do B_{jka} jest krawędź $j \to k$, a podciąg kolejnych jego krawędzi, począwszy od drugiej, tworzy przejście z węzła k do węzła a, zatem

$$E(T_{ja}) = \sum_{k \in K_j} \sum_{\omega \in B_{ka}} [1 + T_{ka}(\omega)]\, p_{jk} \cdot p(\omega),$$

czyli

$$E(T_{ja}) = \sum_{k \in K_j} \left[p_{jk} \sum_{\omega \in B_{ka}} p(\omega) + p_{jk} \sum_{\omega \in B_{ka}} T_{ka}(\omega)p(\omega) \right].$$

Ale

$$\sum_{k \in K_j} p_{jk} \sum_{\omega \in B_{ka}} p(\omega) = \sum_{k \in K_j} p_{jk} \cdot q_{ka} = q_{ja}$$

oraz

$$\sum_{\omega \in B_{ka}} T_{ka}(\omega)p(\omega) = \sum_{\omega \in B_{k\mathcal{B}}} T_{ka}(\omega)p(\omega) = E(T_{ka}),$$

zatem

$$E(T_{ja}) = q_{ja} + \sum_{k \in K_j} p_{jk} E(T_{ka}).$$

Wykorzystując przyjęte oznaczenia, ostatnie równanie można zapisać w postaci

$$e_{ja} = q_{ja} + \sum_{k \in K_j} p_{jk} e_{ka}. \tag{3}$$

Układ warunków (2) i (3) określa algorytm pozwalający obliczać $E(T_{sa})$ (s jest węzłem startowym) tj. wartość oczekiwaną wygranej gracza G_A. Wartości q_{ja} możemy obliczyć stosując algorytm pochłaniania dla grafu $(S, \mathbf{Q})$ przedstawiony szczegółowo w [3], s. 302 a zaproponowanym w [1].

Stosując te algorytmy w przypadku $\alpha = oo$ i $\beta = ro$ otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} e_{oo-ro} = 0, \\ e_{ro-ro} = 0, \\ e_{s-ro} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}e_{o-ro} + \frac{1}{2}e_{r-ro}, \\ e_{o-ro} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e_{r-ro} + \frac{1}{2}e_{oo-ro}, \\ e_{r-ro} = 0 + \frac{1}{2}e_{r-ro} + \frac{1}{2}e_{ro-ro}. \end{cases}$$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymujemy wartość $e_{s-ro} = 2\frac{1}{2}$, która jest jednocześnie wartością oczekiwaną wygranej gracza G_B.

4. Macierzowy zapis algorytmu

4.1. Algorytm obliczania wartości oczekiwanej wygranej gracza w hazardowej wersji gry Penney'a

Jak łatwo zauważyć $p_{jk} = 0$ gdy $k \in S \setminus K_j$, a więc równanie (3) dla $j \notin \mathcal{B}$ (czyli dla węzłów wewnętrznych grafu) jest równoważne z równaniem

$$e_{ja} = q_{ja} + \sum_{k \in S} p_{jk} e_{ka},$$

które po przekształceniu przyjmuje postać

$$\sum_{k \in S} [p_{jk} e_{ka}] - e_{ja} = -q_{ja}.$$

Dla węzłów brzegowych spełnione jest równanie (2).

Wykorzystując powyższe fakty możemy układ równań (2) i (3) utworzonych dla wszystkich węzłów grafu zapisać w postaci macierzowej

$$(\mathbf{Q} - \mathbf{I_0})\mathbf{E_a} = -\mathbf{P_a}, \tag{4}$$

gdzie

$\mathbf{Q} = [p_{jk}]$, $\mathbf{I_0} = [b_{jk}]$, gdzie $b_{jj} = 1$ dla $j \notin \mathcal{B}$ oraz $b_{jk} = 0$ dla pozostałych j, k

$$\mathbf{E_a} = \begin{bmatrix} e_{1a} \\ e_{2a} \\ \vdots \\ e_{na} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P_a} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad p_j = \begin{cases} q_{ja}, & j \notin \mathcal{B}, \\ 0, & j \in \mathcal{B}, \end{cases}$$

a n jest liczbą węzłów grafu.

Wykorzystując powyższe oznaczenia możemy zapisać w postaci macierzowej inne algorytmy dotyczące grafów Engla. Takie przedstawienie jest użyteczne zwłaszcza przy wykorzystywaniu metod numerycznych do rozwiązywania układów równań.

4.2. Algorytm pochłaniania dla grafu stochastycznego o niepustym brzegu

Algorytm pochłaniania dla grafu stochastycznego o niepustym brzegu (zob. [3], s. 302) pozwalający wyznaczyć prawdopodobieństwo q_{ja} dotarcia z węzła j do węzła brzegowego a, przybiera postać równania

$$(\mathbf{Q} - \mathbf{I_0})\mathbf{Q_a} = \mathbf{A}, \tag{5}$$

w którym macierz $\mathbf{Q_a}$ jest jednokolumnową macierzą niewiadomych

$$\mathbf{Q_a} = \begin{bmatrix} q_{1a} \\ q_{2a} \\ \vdots \\ q_{na} \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad a_j = \begin{cases} 0, & j \neq a, \\ 1, & j = a. \end{cases}$$

4.3. Algorytm średniego czasu błądzenia

Algorytm średniego czasu błądzenia po grafie stochastycznym z niepustym brzegiem $\mathcal{B}$ (zob. [3], s. 305) można zapisać jako równanie

$$(\mathbf{Q} - \mathbf{I_0})\mathbf{E} = \mathbf{B}, \tag{6}$$

gdzie $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$ a e_j jest średnim czasem błądzenia rozpoczynającego się w węźle j oraz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, gdzie $b_j = \begin{cases} 0, & j \in \mathcal{B}, \\ 1, & j \notin \mathcal{B}. \end{cases}$

5. Hipotezy dotyczące hazardowych gier Penney'a

Zaprezentowane metody wykorzystamy dalej do badania hazardowych gier Penney'a.

Jeżeli $P(\ldots\alpha) = P(\ldots\beta)$, to serie α i β nazywamy *jednakowo dobrymi* w grze Penney'a $g_{\alpha-\beta}$ i oznaczamy $\alpha \approx \beta$. Jeżeli $\alpha \approx \beta$, to gra $g_{\alpha-\beta}$ jest sprawiedliwa (szanse graczy są równe).

Gdy $P(\ldots\alpha) > P(\ldots\beta)$ mówimy, że seria α jest *lepsza* od serii β i oznaczamy przez $\alpha \gg \beta$.

Jeżeli $E(T_{\alpha\bullet}) > E(T_{\bullet\beta})$, to mówimy, że w hazardowej grze Penney'a $h_{\alpha-\beta}$ seria α jest *lepsza* od serii β (oznaczamy $\alpha \succ \beta$).

Jeżeli $E(T_{\alpha\bullet}) = E(T_{\bullet\beta})$, to serie α i β nazywamy *jednakowo dobrymi* w grze $h_{\alpha-\beta}$ i oznaczamy $\alpha \cong \beta$.

Oto kilka hipotez dotyczących relacji pomiędzy wartością oczekiwą wygranej poszczególnych graczy, a długością serii czy też prawdopodobieństwem zwycięstwa gracza.

1. Jeżeli $|\alpha| = |\beta| = l$ to obie serie α i β są jednakowo prawdopodobnymi wynikami l-krotnego rzutu monetą. Wydaje się więc oczywiste, że $\alpha \approx \beta$ oraz że $\alpha \cong \beta$ (serie α i β są jednakowo dobre zarówno w zwykłej, jak i hazardowej grze Pennney'a).
2. Niech $h_{\alpha_1-\beta_1}$ oraz $h_{\alpha_2-\beta_2}$ będą hazardowymi grami Penney'a. Jeżeli $P(\ldots\alpha_1) = P(\ldots\alpha_2)$ (a więc także jeżeli $P(\ldots\beta_1) = 1 - P(\ldots\alpha_1) = 1 - P(\ldots\alpha_2) = P(\ldots\beta_2)$), to $E(T_{\alpha_1\bullet}) = E(T_{\alpha_1\bullet})$ oraz $E(T_{\bullet\beta_1}) = E(T_{\bullet\beta_2})$.
3. Jeżeli w grze Penney'a $g_{\alpha-\beta}$ jest $\alpha \approx \beta$, to również w hazardowej grze Penney'a $h_{\alpha-\beta}$ jest $\alpha \cong \beta$.
4. Niech $h_{\alpha-\beta}$ będzie hazardową grą Penney'a. Jeżeli $|\alpha| > |\beta|$ to $\alpha \succ \beta$.
5. Jeżeli $\alpha \gg \beta$, to $\alpha \succ \beta$ (jeżeli seria α jest lepsza od serii β w zwykłej grze Penney'a, to jest ona lepsza również w hazardowej wersji gry Penney'a).

W tabeli 1 zebrano dane dotyczące relacji $\approx$, $\cong$, $\gg$ i $\succ$ w przypadku pewnych par serii orłów i reszek. Przedstawione przykłady pozwalają zweryfikować sformułowane wyżej hipotezy.

Pierwszy przykład dowodzi, że nie jest prawdziwa pierwsza implikacja bo seria β jest lepsza od serii α w obu wersjach gry Penney'a i serie te są równej długości.

nr gry		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
seria α		oo	ooo	rrr	rr	roo	ooo	oor
seria β		ro	ro	orr	oor	oro	$rroo$	$rroo$
$P(\ldots\alpha)$	prawdopodobieństwo zwycięstwa gracza G_A	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{8}$
$P(\ldots\beta)$	prawdopodobieństwo zwycięstwa gracza G_B	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{8}$
$E(T_{\alpha\bullet})$	wartość oczekiwana wygranej gracza G_A	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$1\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{6}$	$2\frac{1}{6}$	$4\frac{1}{8}$
$E(T_{\bullet\beta})$	wartość oczekiwana wygranej gracza G_B	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{8}$	$6\frac{5}{8}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{5}{6}$	$6\frac{1}{6}$	$3\frac{1}{8}$
$E(T_{\alpha\beta})$	średni czas trwania doświadczenia $d_{\alpha-\beta}$	3	$3\frac{1}{2}$	7	4	6	$9\frac{1}{3}$	$7\frac{1}{4}$

Tabela 1.

Nie jest także prawdziwa druga implikacja. Dowodzą tego przykłady gier 2. i 3. Mamy

$$P_{ooo-ro}(\ldots ooo) = P_{rrr-orr}(\ldots rrr), \quad P_{ooo-ro}(\ldots ro) = P_{rrr-orr}(\ldots orr)$$

oraz

$$E(T_{ooo\bullet}) = E(T_{rrr\bullet}),$$

i równocześnie $E(T_{\bullet orr})$ jest prawie dwukrotnie większe od $E(T_{\bullet ro})$.

Przykład gry 4. dowodzi, że z faktu $P(\ldots\alpha) = P(\ldots\beta)$ nie wynika, że $E(T_{\alpha\bullet}) = E(T_{\bullet\beta})$. Ten kontrprzykład dowodzi, że trzecia implikacja nie jest prawdziwa. Wzmocnienie założenia w trzeciej implikacji o warunek $|\alpha| = |\beta|$ nie jest wystarczające na to, by $\alpha \cong \beta$. Dowodzi tego przykład gry 5.

Z dwu ostatnich przykładów wynia, że warunek $|\alpha| < |\beta|$ nie jest wystarczający na to, by $\alpha \succ \beta$, jak rówież na to by $\beta \succ \alpha$.

Autorowi nie udało się znaleźć kontrprzykładu dowodącego fałszywości piątej hipotezy. Używając komputera sprawdzono jej prawdziwość dla wszystkich serii α i β o długościach nie większych niż 9.

Hazardową grę Penney'a można uogólnić. W grze może brać udział n graczy. Niech α_1, α_2, ... , α_n będą seriami orłów i reszek takimi, że każde dwie są różne i w przypadku, gdy ich długości są różne, seria krótsza nie zawiera się w dłuższej. W grze rzuca się monetą tak długo aż $|\alpha_j|$ ostatnich rzutów utworzy serię α_j dla pewnego $j \in \{1, 2, ..., n\}$ i wtedy zwycięża gracz G_j, otrzymując za swoje zwycięstwo tyle złotówek, ile razy rzucono monetą.

Zauważmy, że w przeprowadzonym rozumowaniu nigdzie nie korzysta się z faktu, że graf stochastyczny posiada tylko dwa węzły brzegowe, algorytm obliczania wartości oczekiwanej wygranej jednego z graczy w grze, w której biorą udział dwaj gracze, z powodzeniem można także stosować w uogólnionej hazardowej grze Penney'a, w której bierze udział n graczy.

W dowodzie algorytmu nie korzysta się także z faktu, że $p(o) = p(r) = \frac{1}{2}$, a więc zamiast serii orłów i reszek możemy rozważać serie sukcesów i porażek o dowolnym prawdopodobieństwie sukcesu równym u ($0 < u < 1$).

Literatura

[1] A. Engel, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*, Band 1, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1980.

[2] M. Major, B. Nawolska, *Matematyzacja, rachunki, dedukcja i interpretacja w zadaniach stochastycznych*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1999.

[3] A. Płocki, *Stochastyka 1. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna jako matematyka in „statu nascendi"*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1997.

Instytut Matematyki
Akademia Pedagogiczna
ul. Podchorążych 2
30-084 Kraków
Poland
E-mail: tkapela@wsp.krakow.pl