Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis

Folia 5 Studia Ad Calculum Probabilitatis Eiusque Didacticam Pertinentia I (2002)

Ireneusz Krech

Osobliwe własności modeli probabilistycznych czekania na serie sukcesów i porażek

Abstract. This paper concerns, specific, not well known but simultancously elementary means of argumentation used in the process of constructing probabilistic spaces and calculating the probability in those spaces. The above mentioned probabilistic spaces, are probabilistic models with characteristic statistical experiments. Certain properties of the spaces can be considered paradoxal.

1. Wprowadzenie

Niech $\Omega = \{0,1\}$ i $p(1) = u > 0$ i $p(0) = v = 1 - u > 0$. Para (Ω, p) jest przestrzenią probabilistyczną. Każde doświadczenie losowe, którego modelem probabilistycznym (por. [9], s. 24–25) jest ta przestrzeń, nazywamy *próbą Bernoulliego*, albo krótko *próbą* i oznaczamy przez d_{0-1}^{u}. Wynik oznaczony cyfrą 1 (jako tzw. zdarzenie elementarne) nazywamy *sukcesem*, wynik oznaczony cyfrą 0 — *porażką*. Próbę Bernoulliego określa ustalona liczba rzeczywista u z przedziału $(0,1)$.

Każdy wynik schematu Bernoulliego o m próbach, tj. każdą m-wyrazową wariację zbioru $\{0,1\}$, nazywamy *serią sukcesów i porażek*, liczbę m nazywamy *długością serii.*

Mówimy, że seria ω_1 zawiera się w serii ω_2 i zapisujemy $\omega_1 \subset \omega_2$, jeśli ω_1 jest podciągiem kolejnych wyrazów ciągu ω_2.

Niech $g(j) = 1 - j$ dla $j \in \{0,1\}$. Serie $\omega_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ oraz $\omega_2 = (g(a_1), g(a_2), \ldots, g(a_m))$ nazywamy *seriami dualnymi*. Serię dualną do serii ω_1 oznaczamy przez $\overline{\omega_1}$.

Na zbiorze n-wyrazowych wariacji zbioru $\{0,1\}$ określamy funkcję J następująco: Jeśli $\omega = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$, to

$$J(\omega) = \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Jest więc $J(\omega)$ liczbą wyrazów równych 1 w ciągu ω.

Długość ciągu ω, tj. liczbę jego wyrazów, oznaczamy przez $|\omega|$.
Jeśli $|\omega| = n$ i $k < n$, to podciąg k-kolejnych końcowych wyrazów ciągu ω nazywamy jego *końcówką o długości k*.

Niech d^u_{0-1} będzie próbą, ω_1 i ω_2 zaś ustalonymi seriami sukcesów i porażek. Załóżmy, że $\omega_1 \neq \omega_2$. Załóżmy także, że jeśli $|\omega_1| \neq |\omega_2|$, to seria krótsza nie zawiera się w serii dłuższej. Powtarzanie próby d^u_{0-1} tak długo, aż:
— albo wyniki $|\omega_1|$ ostatnich prób utworzą serię ω_1,
— albo wyniki $|\omega_2|$ ostatnich prób utworzą serię ω_2,
nazywamy *czekaniem na jedną z dwu serii sukcesów i porażek* ω_1, ω_2 i oznaczamy przez $d^u_{\omega_1-\omega_2}$.

Każdy wynik doświadczenia $d^u_{\omega_1-\omega_2}$ (zdarzenie elementarne) jest ciągiem ω o wyrazach ze zbioru $\{0,1\}$, co najmniej r-wyrazowym, gdzie $r = \min\{|\omega_1|, |\omega_2|\}$ i takim, że:
— albo jego końcówka o długości $|\omega_1|$ tworzy serię ω_1,
— albo jego końcówka o długości $|\omega_2|$ tworzy serię ω_2,
i żaden inny podciąg kolejnych (wcześniejszych) wyrazów ciągu ω nie tworzy ani serii ω_1, ani serii ω_2.

Zbiór wszystkich wyników doświadczenia $d^u_{\omega_1-\omega_2}$ (jako tzw. zbiór zdarzeń elementarnych) oznaczamy przez $\Omega_{\omega_1-\omega_2}$.
Niech

$$p^u_{\omega_1-\omega_2}(\omega) = u^{J(\omega)} \cdot v^{|\omega|-J(\omega)} \quad \text{dla} \quad \omega \in \Omega_{\omega_1-\omega_2}.$$

Funkcja $p^u_{\omega_1-\omega_2}$ jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\Omega_{\omega_1-\omega_2}$. Para $(\Omega_{\omega_1-\omega_2}, p^u_{\omega_1-\omega_2})$ jest przestrzenią probabilistyczną, którą uznajemy za model probabilistyczny oświadczenia losowego $d^u_{\omega_1-\omega_2}$.

Czekanie na jedną z dwu serii sukcesów i porażek można uogólnić na przypadek n serii sukcesów i porażek. Niech $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ będą ustalonymi seriami sukcesów i porażek, takimi, że dla każdych dwu z tych serii różnej długości, seria krótsza nie zawiera się w serii dłuższej. Powtarzanie próby d^u_{0-1} tak długo, aż:
— albo wyniki $|\omega_1|$ ostatnich prób utworzą serię ω_1,
— albo wyniki $|\omega_2|$ ostatnich prób utworzą serię ω_2,
— ...
— albo wyniki $|\omega_n|$ ostatnich prób utworzą serię ω_n,
nazywamy *czekaniem na jedną z n serii sukcesów i porażek* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ i oznaczamy przez $d^u_{\omega_1-\ldots-\omega_n}$.

Jeśli $\Omega_{\omega_1-\ldots-\omega_n}$ jest zbiorem wyników doświadczenia losowego $d^u_{\omega_1-\ldots\omega_n}$, to $\omega \in \Omega_{\omega_1-\ldots-\omega_n}$ wtedy i tylko wtedy, gdy:
— $\omega \in \{0,1\}^k$, gdzie $k \geqslant min\{|\omega_1|, |\omega_2|, \ldots, |\omega_n|\}$ i równocześnie
— albo końcówka o długości $|\omega_1|$ ciągu ω tworzy serię ω_1,
— albo końcówka o długości $|\omega_2|$ ciągu ω tworzy serię ω_2,

— ...
— albo końcówka o długości $|\omega_n|$ ciągu ω tworzy serię ω_n i
— żaden inny podciąg kolejnych wcześniejszych wyrazów ciągu ω nie tworzy żadnej z serii $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

Niech

$$p^u_{\omega_1-\ldots-\omega_n}(\omega) = u^{J(\omega)} \cdot v^{|\omega|-J(\omega)} \quad \text{dla} \quad \omega \in \Omega_{\omega_1-\ldots-\omega_n}.$$

Para $(\Omega_{\omega_1-\ldots-\omega_n}, p^u_{\omega_1-\ldots-\omega_n})$ jest przestrzenią probabilistyczną, którą uznajemy za model doświadczenia losowego $d^u_{\omega_1-\ldots\omega_n}$.

Z doświadczeniem losowym $d^u_{\omega_1-\ldots-\omega_n}$ zwiążmy zdarzenia:
$A_j = \{$*doświadczenie* $d^u_{\omega_1-\ldots-\omega_n}$ *zakończy się serią* $\omega_j\}$, dla $j = 1, 2, \ldots, n$. Symbolem $\{\ldots\omega_j\}$ oznaczmy zdarzenie A_j, a jego prawdopodobieństwo — przez $P(\ldots\omega_j)$. W przypadku doświadczenia $d^u_{\omega_1-\omega_2}$ $(n = 2)$ przyjmujemy oznaczenia: $A_1 = \{\ldots\omega_1\} = \{\omega_1 \prec \omega_2\}$ i $A_2 = \{\ldots\omega_2\} = \{\omega_2 \prec \omega_1\}$. Prawdopodobieństwa zdarzeń A_1 i A_2 oznaczamy odpowiednio przez $P(\omega_1 \prec \omega_2)$ i $P(\omega_2 \prec \omega_1)$.

Rozważmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega_{\omega_1-\ldots-\omega_n}, p^u_{\omega_1-\ldots-\omega_n})$ jako model doświadczenia losowego $d^u_{\omega_1-\ldots-\omega_n}$. Niech $l, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i $l \neq k$.

Jeżeli $P(\ldots\omega_l) = P(\ldots\omega_k)$ dla ustalonego $u_0 \in (0, 1)$, to serie ω_l i ω_k nazywamy *jednakowo dobrymi w punkcie* u_0 i oznaczamy $(\omega_l \approx \omega_k)_{u_0}$. Jeżeli dla każdego $u \in A$, gdzie $A \subset (0, 1)$, jest $(\omega_l \approx \omega_k)_u$, to mówimy, że serie ω_l i ω_k są *jednakowo dobre na zbiorze* A i oznaczamy $(\omega_l \approx \omega_k)_A$.

Jeśli $P(\ldots\omega_l) > P(\ldots\omega_k)$ dla ustalonego $u_0 \in (0, 1)$, to serię ω_l nazywamy *lepszą w punkcie* u_0 od serii ω_k i oznaczamy $(\omega_l \gg \omega_k)_{u_0}$. Jeżeli dla każdego $u \in A$, gdzie $A \subset (0, 1)$, jest $(\omega_l \gg \omega_k)_u$, to serię ω_l nazywamy *lepszą na zbiorze* A od serii ω_k i oznaczamy $(\omega_l \gg \omega_k)_A$.

W przestrzeni probabilistycznej $(\Omega_{\omega_1-\ldots-\omega_n}, p^u_{\omega_1-\ldots-\omega_n})$ rodzina zdarzeń $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ jest układem zupełnym zdarzeń. Prawdopodobieństwa zdarzeń $A_1, A_2, \ldots, A_n$ w tej przestrzeni są na ogół sumami pewnych szeregów liczbowych. Praca zawiera pewne propozycje obliczania tych prawdopodobieństw elementarnymi środkami poprzez redukcję obliczeń do sum skończonych.

Wyróżniając stany, w jakich może się znaleźć czekanie na jedną z n serii sukcesów i porażek po kolejnej próbie, doświadczenie $d^u_{\omega_1-\ldots-\omega_n}$ staje się jednorodnym łańcuchem Markowa $[S, \vec{w_0}, Q]$ (zob. [9], s. 319-339).

Rozważmy doświadczenie $d^u_{100-001}$. Mamy następujące *stany* czekania na jedną z dwu serii 100, 001: 0, 1, 10, 00, 001, 100 i stan początkowy, który oznaczamy przez s. Ponumerujmy te stany następująco:

stan:	0	1	10	00	100	001
numer stanu:	1	2	3	4	5	6

Zbiór $S = \{1,2,3,4,5,6,\}$ jest zbiorem stanów.[1]

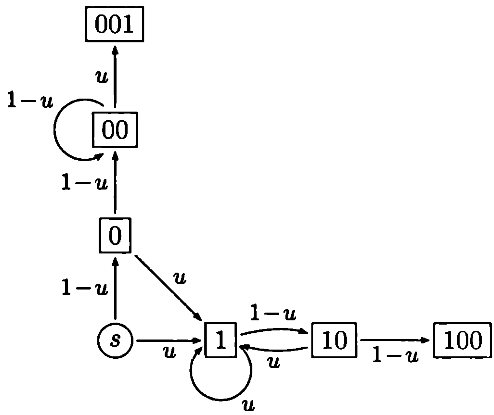
Przez $p_{j\to k}$ oznaczamy prawdopodobieństwo, z jakim czekanie znajdzie się po danej próbie w stanie k, skoro po próbie poprzedniej było ono w stanie j ($j,k \in S$). Niech $Q = [p_{j\to k}]$. Mamy tu

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & u & 0 & 1-u & 0 & 0 \\ 0 & u & 1-u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & 1-u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-u & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jest $p_{5\to 5} = 1$ i $p_{6\to 6} = 1$, a więc stany 5 (001) i 6 (100) są w tym przypadku stanami pochłaniającymi. Jeśli $p_j^0 = p_{s\to j}$ (dla $j \in S$) jest prawdopodobieństwem, z jakim czekanie znajdzie się po pierwszej próbie w stanie j, to

$$\vec{w_0} = [p_1^0, p_2^0, p_3^0, p_4^0, p_5^0, p_6^0] = [1-u, u, 0, 0, 0, 0, 0].$$

Doświadczenie losowe $d^u_{100-001}$ jest w takim jego ujęciu jednorodnym łańcuchem Markowa, którego prezentacją algebraiczną jest trójka $[S, \vec{w_0}, Q]$.



Rysunek 1.

Powróćmy do doświadczenia $d^u_{\omega_1-\ldots-\omega_n}$. Interpretujmy stan (również stan początkowy s) jako punkt płaszczyzny i nazywajmy go *węzłem*. Węzeł grafu, reprezentujący stan j, będziemy oznaczać przez $\boxed{j}$. Jeśli $p_{j\to k} > 0$, to węzeł $\boxed{j}$ łączymy z węzłem $\boxed{k}$ zorientowanym odcinkiem prostej lub krzywej. Ten odcinek nazywamy *krawędzią grafu* i oznaczamy przez $j\to k$. Liczbę $p_{j\to k}$ wpisujemy obok tego odcinka. Jeśli $p_{j\to j} > 0$, to krawędź $j\to j$ nazywamy *pętlą*.

[1] Jeżeli możliwy jest powrót do stanu początkowego s, to s włączamy do zbioru stanów.

Jeśli $p_{j \to j} = 1$, to pętlę $j \to j$ pomijamy a węzeł $\boxed{j}$ nazywamy *węzłem brzegowym*. Zbiór wszystkich węzłów brzegowych nazywamy *brzegiem grafu*. W takiej interpretacji trójka $[S, \vec{w_0}, Q]$ staje się grafem stochastycznym Engla (zob. [9], s. 282 oraz [1]). Nazywamy go *grafem doświadczenia losowego* $d^u_{\omega_1 - \ldots - \omega_n}$. Graf stochastyczny doświadczenia $d^u_{001-100}$ prezentuje rys. 1.

Każde doświadczenie $d^u_{\omega_1 - \ldots - \omega_n}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa, a więc ma swój graf stochastyczny. W pracy będziemy interpretować przebieg doświadczenia $d^u_{\omega_1 - \ldots - \omega_n}$ jako błądzenie losowe po grafie stochastycznym tego doświadczenia losowego. Na początku stawiamy pionek w węźle startowym s. Po kolejnej próbie przesuwamy ów pionek wzdłuż krawędzi z przypisaną liczbą u, ilekroć próba zakończy się sukcesem i wzdłuż krawędzi z przypisaną liczbą v, ilekroć próba zakończy się porażką.

Każdy ciąg krawędzi taki, że początkiem pierwszej krawędzi jest węzeł s, końcem ostatniej krawędzi jest węzeł brzegowy i w przypadku każdych dwu kolejnych krawędzi koniec poprzedniej jest zarazem początkiem krawędzi następnej, nazywamy *trasą*. *Wagą trasy* nazywamy iloczyn liczb przypisanych jej kolejnym krawędziom.

Rozważmy graf stochastyczny doświadczenia $d^u_{\omega_1 - \ldots - \omega_n}$. Przez $\Omega^*_{\omega_1 - \ldots - \omega_n}$ oznaczamy zbiór wszystkich tras na jego grafie stochastycznym. Funkcja $p^*_{\omega_1 - \ldots - \omega_n}$, która każdej trasie przypisuje jej wagę, jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\Omega^*_{\omega_1 - \ldots - \omega_n}$. Para $(\Omega^*_{\omega_1 - \ldots - \omega_n}, p^*_{\omega_1 - \ldots - \omega_n})$ jest przestrzenią probabilistyczną. Nazywamy ją *przestrzenią indukowaną przez graf stochastyczny*. Rachunki i wnioskowania prowadzone są dalej także w takiej przestrzeni probabilistycznej indukowanej przez graf. Przestrzenie probabilistyczne $(\Omega_{\omega_1 - \ldots - \omega_n}, p^u_{\omega_1 - \ldots - \omega_n})$ oraz $(\Omega^*_{\omega_1 - \ldots - \omega_n}, p^*_{\omega_1 - \ldots - \omega_n})$ są izomorficzne (zob. [7], s. 32).

Mówimy, że grafy stochastyczne $(S_1, \vec{w_0}_1, Q_1)$ i $(S_2, \vec{w_0}_2, Q_2)$ doświadczeń losowych $d_{\omega_1 - \omega_2}$ i $d_{\omega_3 - \omega_4}$ są *izomorficzne* (por. [9], s. 282), jeżeli istnieje bijekcja h ze zbioru S_1 na zbiór S_2 i taka, że

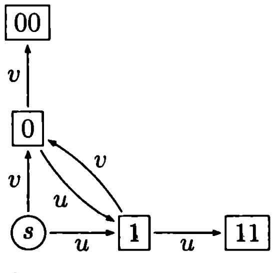
— $\forall j_1 \in S_1 \, \forall j_2 \in S_2 \, [h(j_1) = j_2] \Rightarrow [p^0_{j_1} = p^0_{j_2}]$,

— $\forall j_2, k_2 \in S_2 \, [j_2 = h(j_1) \wedge k_2 = h(k_1)] \Rightarrow [p_{j_2 \to k_2} = p_{j_1 \to k_1}]$.

2. Czekanie na jedną z dwu serii sukcesów i porażek długości 2

Są cztery serie sukcesów i porażek o długości 2: 00, 01, 10, 11. Jest więc 6 różnych doświadczeń $d^u_{\omega_1 - \omega_2}$, gdzie $|\omega_1| = |\omega_2| = 2$ i $\omega_1 \neq \omega_2$. Na przykładzie tych doświadczeń przedstawimy różne, oparte na grafie stochastycznym, sposoby obliczania prawdopodobieństwa zdarzeń w przeliczalnych przestrzeniach probabilistycznych typu $(\Omega_{\omega_1 - \omega_2}, p^u_{\omega_1 - \omega_2})$.

2.1. Niech $\omega_1 = 00$ i $\omega_2 = 11$. Rysunek 2 prezentuje graf stochastyczny doświadczenia losowego d^u_{00-11}.



Rysunek 2.

Niech $P(11 \prec 00) = x$. Obliczanie tego prawdopodobieństwa odnieśmy do przestrzeni indukowanej przez graf stochastyczny z rys. 2. Interpretujmy przebieg czekania d_{00-11} jako błądzenie losowe po grafie. Dotarcie pionka do węzła $\boxed{00}$ oznacza, że czekanie zakończyło się uzyskaniem serii 00, a więc, że zaszło zdarzenie $\{00 \prec 11\}$, dotarcie pionka do węzła $\boxed{11}$ jest równoznaczne z zajściem zdarzenia $\{11 \prec 00\}$. W przestrzeni probabilistycznej indukowanej przez graf zdarzenie $\{00 \prec 11\}$ jest zbiorem wszystkich tych tras na grafie, które kończą się w węźle $\boxed{00}$. Jest więc $P(00 \prec 11)$ prawdopodobieństwem dotarcia w błądzeniu po grafie do węzła brzegowego $\boxed{00}$, a więc (zgodnie z definicją prawdopodobieństwa w ziarnistej przestrzeni probabilistycznej, zob.[9], s. 65-66) jest sumą wag wszystkich tras prowadzących do węzła brzegowego $\boxed{00}$.

Analogicznie, $P(11 \prec 00)$ jest prawdopodobieństwem dotarcia do węzła brzegowego $\boxed{11}$. Prawdopodobieństwo dotarcia pionka do węzła brzegowego grafu można — jak pokażemy dalej — znajdować elementarnymi środkami.

Z grafu z rys. 2 wynika, że

$$\begin{aligned} x &= u^2 + u^2 \cdot vu + u^2 \cdot (vu)^2 + u^2 \cdot (vu)^3 + \ldots \\ &\quad + vu^2 + vu^2 \cdot vu + vu^2 \cdot (vu)^2 + vu^2 \cdot (vu)^3 + \ldots, \end{aligned}$$

a zatem

$$\begin{aligned} x &= u^2 + vu^2 + vu \cdot [u^2 + u^2 \cdot vu + u^2 \cdot (vu)^2 + u^2 \cdot (vu)^3 + \ldots \\ &\quad + vu^2 + vu^2 \cdot vu + vu^2 \cdot (vu)^2 + vu^2 \cdot (vu)^3 + \ldots] \\ &= u^2 + vu^2 + vu \cdot x. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że

$$x = \frac{u^2 + vu^2}{1 - vu} = \frac{2u^2 - u^3}{1 - u + u^2},$$

a więc

$$P(11 \prec 00) = \frac{2u^2 - u^3}{1 - u + u^2}.$$

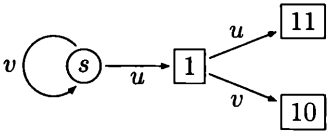
Zdarzenia $\{00 \prec 11\}$ oraz $\{11 \prec 00\}$ są przeciwne, a więc

$$P(00 \prec 11) = 1 - P(11 \prec 00),$$

skąd wynika, że

$$P(00 \prec 11) = \frac{u^3 - u^2 - u + 1}{1 - u + u^2}.$$

2.2. Niech $\omega_1 = 10$ i $\omega_2 = 11$. Graf doświadczenia d^u_{10-11} przedstawia rys. 3.



Rysunek 3.

Doświadczenie d^u_{10-11} rozpoczyna się od oczekiwania na pierwszy sukces (zob. [9], s. 246). Z prawdopodobieństwem 1 ten sukces zostanie uzyskany wcześniej czy później. Po uzyskaniu sukcesu doświadczenie kończy się po kolejnej próbie. Jest więc

$$P(10 \prec 11) = v = 1 - u, \text{ oraz } P(11 \prec 10) = u.$$

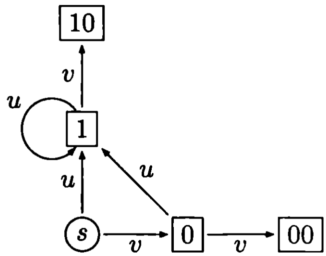
2.3. Niech $\omega_1 = 01$ i $\omega_2 = 00$. Serie 01 i 10 oraz 00 i 11 są dualne, a zatem z symetrii wynika, że

$$P(01 \prec 00) = 1 - v = 1 - (1 - u) = u,$$

a stąd wynika, że

$$P(00 \prec 01) = 1 - u.$$

2.4. Niech $\omega_1 = 10$ i $\omega_2 = 00$. Graf stochastyczny doświadczenia losowego d^u_{10-00} prezentuje rys. 4.



Rysunek 4.

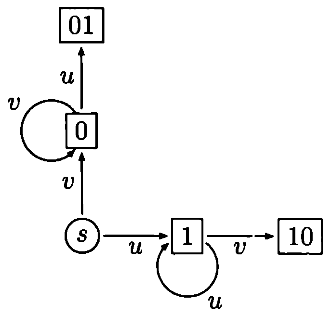
Jeśli czekanie znajdzie się w stanie 1 (jeśli błądząca po grafie cząstka znajdzie się w węźle $\boxed{1}$), to z prawdopodobieństwem 1 doświadczenie d_{10-00} zakończy się uzyskaniem serii 10, bo dalszy ciąg czekania jest oczekiwaniem na porażkę. Prawdopodobieństwo dotarcia do węzła $\boxed{1}$ jest równe $u+vu = u(2-u)$, a zatem

$$P(10 \prec 00) = u(2-u) \text{ oraz } P(00 \prec 10) = 1 - P(10 \prec 00) = (1-u)^2.$$

2.5. Niech $\omega_1 = 01$ i $\omega_2 = 11$. Serie 01 i 10 oraz 11 i 00 są dualne, a zatem z symetrii otrzymujemy, że

$$P(01 \prec 11) = (1-u)(1+u) \text{ oraz } P(11 \prec 01) = u^2.$$

2.6. Niech $\omega_1 = 10$ i $\omega_2 = 01$. Graf doświadczenia losowego d^u_{10-01} prezentuje rys. 5.



Rysunek 5.

O tym, która z serii zostanie uzyskana w doświadczeniu d^u_{10-01}, decyduje wynik pierwszej próby. Jeśli pierwsza próba zakończy się porażką, to dalszy przebieg doświadczenia jest oczekiwaniem na pierwszy sukces, a więc z prawdopodobieństwem 1 doświadczenie zakończy się — wcześniej czy później — uzyskaniem serii 01. Analogicznie, jeśli pierwsza próba zakończy się sukcesem, to z prawdopodobieństwem 1 doświadczenie zakończy się uzyskaniem serii 10. Jest więc

$$P(10 \prec 01) = u \quad \text{i} \quad P(01 \prec 10) = v = 1-u.$$

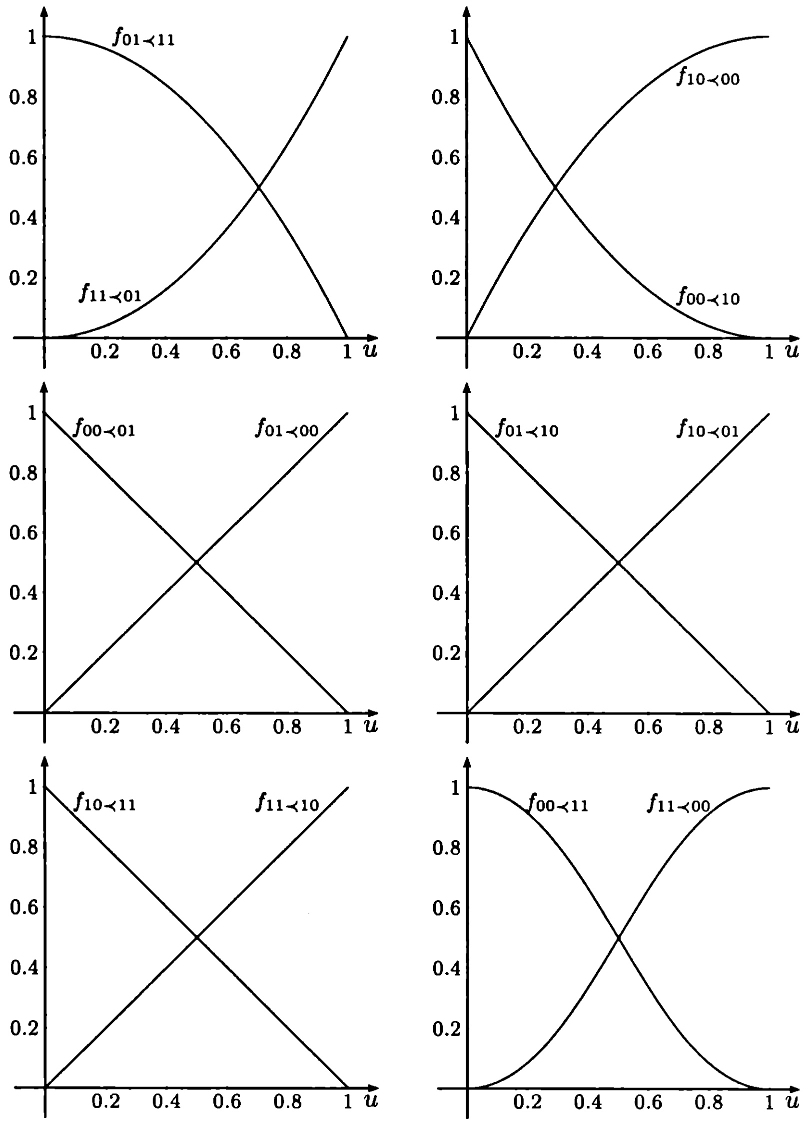
3. Prawdopodobieństwo uzyskania danej serii jako funkcja prawdopodobieństwa sukcesu

Dla każdego doświadczenia $d^u_{\omega_1-\ldots-\omega_n}$ oraz ustalonego $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ jest $P(\ldots\omega_j)$ funkcją parametru u. Niech

$$P(\ldots\omega_j) = f_{\ldots\omega_j}(u) \quad \text{dla} \quad u \in (0,1).$$

W przypadku $n = 2$, niech $P(\omega_1 \prec \omega_2) = f_{\omega_1 \prec \omega_2}(u)$ dla $u \in (0,1)$. Nietrudno zauważyć, że $P(\omega_2 \prec \omega_1) = 1 - f_{\omega_1 \prec \omega_2}(u)$.

Na rysunku 6 przedstawiono (na wspólnym układzie współrzędnych) wykresy funkcji $f_{\omega_1 \prec \omega_2}$ i $f_{\omega_2 \prec \omega_1}$ dla serii $\omega_1, \omega_2 \in \{11, 10, 01, 00\}$, gdzie $\omega_1 \neq \omega_2$.



Rysunek 6.

Z wykresów odczytujemy, że:

$(10 \gg 11)_{(0,\frac{1}{2})}$, $(11 \gg 10)_{(\frac{1}{2},1)}$ oraz $(10 \approx 11)_{\frac{1}{2}}$,

$(01 \gg 10)_{(0,\frac{1}{2})}$, $(10 \gg 01)_{(\frac{1}{2},1)}$ oraz $(01 \approx 10)_{\frac{1}{2}}$,

$(00 \gg 10)_{(0,\frac{2-\sqrt{2}}{2})}$, $(10 \gg 00)_{(\frac{2-\sqrt{2}}{2},1)}$ oraz $(00 \approx 10)_{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$,

$(01 \gg 11)_{(0,\frac{\sqrt{2}}{2})}$, $(11 \gg 01)_{(\frac{\sqrt{2}}{2},1)}$ oraz $(01 \approx 11)_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$,

$(00 \gg 11)_{(0,\frac{1}{2})}$, $(11 \gg 00)_{(\frac{1}{2},1)}$ oraz $(11 \approx 00)_{\frac{1}{2}}$,

$(00 \gg 01)_{(0,\frac{1}{2})}$, $(01 \gg 00)_{(\frac{1}{2},1)}$ oraz $(00 \approx 01)_{\frac{1}{2}}$.

Uzyskane w ten sposób informacje o seriach zebrano w tabeli 1.

<table>
<tr><th>$u \in \left(0, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$</th><th>$u \in \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$</th><th>$u \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$</th><th>$u \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$</th></tr>
<tr><td colspan="2">$10 \prec 11$</td><td colspan="2">$11 \prec 10$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$01 \prec 10$</td><td colspan="2">$10 \prec 01$</td></tr>
<tr><td>$00 \prec 10$</td><td colspan="3">$10 \prec 00$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$01 \prec 11$</td><td>$11 \prec 01$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$00 \prec 11$</td><td colspan="2">$11 \prec 00$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$00 \prec 01$</td><td colspan="2">$01 \prec 00$</td></tr>
</table>

Tabela 1.

Z danych zebranych w tabeli wynika, że relacja $\gg$ dla $u \in (0, \frac{2-\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ jest relacją przechodnią, natomiast dla $u \in (\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ nie jest relacją przechodnią.

4. Czekanie na jedną z trzech serii sukcesów i porażek o długości 2

Niech $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \{0,1\}^2$. Są cztery doświadczenia losowe typu $d^u_{\omega_1-\omega_2-\omega_3}$.

4.1. Rys. 7 przedstawia graf stochastyczny doświadczenia losowego $d^u_{10-11-01}$.
Z grafu odczytujemy, że:

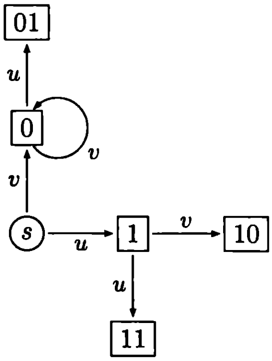
— jeśli pierwsza próba zakończy się porażką, to z prawdopodobieństwem 1 doświadczenie zakończy się serią 01;

— jeśli pierwsza próba zakończy się sukcesem a druga porażką, to doświadczenie kończy się serią 10;

— jeśli dwie pierwsze próby zakończą się sukcesem, to doświadczenie kończy sie serią 11,

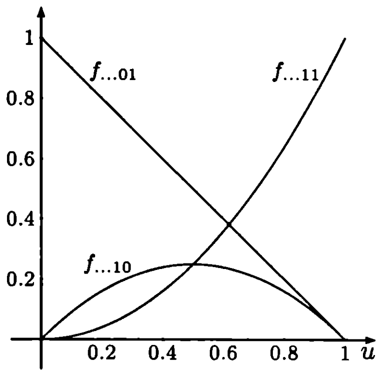
a zatem

$$P(\ldots 01) = v = 1 - u, \quad P(\ldots 10) = uv = u(1-u) \quad \text{i} \quad P(\ldots 11) = u^2.$$



Rysunek 7.

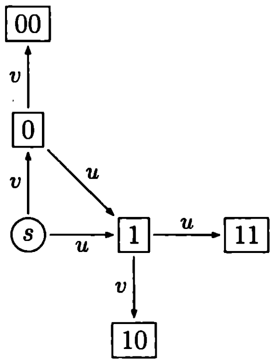
Wykresy funkcji $f_{\ldots 01}$, $f_{\ldots 10}$ i $f_{\ldots 11}$ przedstawia rysunek 8.



Rysunek 8.

Mamy w tym przypadku:
$(01 \gg 10)_{(0,1)}$,
$(01 \gg 11)_{(0,\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2})}$,
$(11 \gg 01)_{(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2},1)}$,
$(10 \gg 11)_{(0,\frac{1}{2})}$,
$(11 \gg 10)_{(\frac{1}{2},1)}$.

4.2. Graf stochastyczny doświadczenia $d^u_{10-11-00}$ przedstawia rys. 9.



Rysunek 9.

Przestrzeń probabilistyczna tego doświadczenia jest skończona. Mamy bowiem $\Omega_{10-11-00} = \{00, 10, 11, 010, 011\}$ i
$p^u_{10-11-00}(00) = v^2 = (1-u)^2$,
$p^u_{10-11-00}(10) = uv = u(1-u)$,
$p^u_{10-11-00}(11) = u^2$,
$p^u_{10-11-00}(010) = uv^2 = u(1-u)^2$,
$p^u_{10-11-00}(011) = u^2v = u^2(1-u)$.

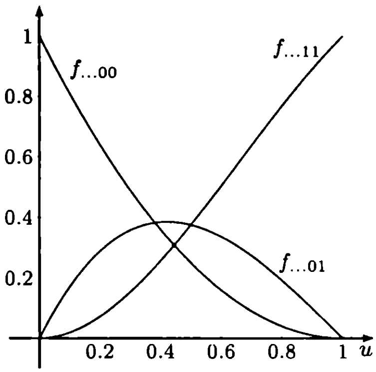
We wspomnianej przestrzeni probabilistycznej jest

$$\{\ldots 00\} = \{00\}, \quad \{\ldots 11\} = \{11, 011\} \quad \text{i} \quad \{\ldots 10\} = \{10, 010\},$$

a zatem
$P(\ldots 00) = (1-u)^2$,
$P(\ldots 10) = u(1-u) + u(1-u)^2 = u(1-u)(2-u)$ oraz
$P(\ldots 11) = u^2 + u^2(1-u) = u^2(2-u)$.

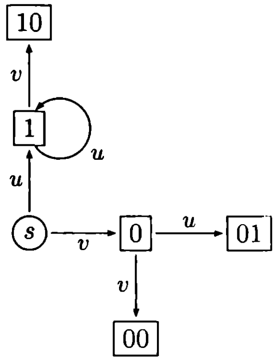
Wykresy funkcji $f_{\ldots 00}$, $f_{\ldots 10}$ i $f_{\ldots 11}$ przedstawiono na rysunku 10. Mamy więc:
$(01 \gg 00)_{(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}, 1)}$,
$(00 \gg 01)_{(0, \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})}$,

$(00 \gg 11)_{(0, u_0)}$, $(11 \gg 00)_{(u_0, 1)}$, gdzie $u_0 = \dfrac{2\sqrt{7}\sin\left(\dfrac{\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)}{3}\right)}{3} \approx 0,445$,
$(11 \gg 01)_{(\frac{1}{2}, 1)}$, $(01 \gg 11)_{(0, \frac{1}{2})}$.



Rysunek 10.

4.3. Graf stochastyczny doświadczenia losowego $d^u_{10-00-01}$ przedstawia rys. 11.



Rysunek 11.

Serie 11 i 00 są dualne, a więc — rozumując analogicznie jak w przypadku doświadczenia $d^u_{10-11-01}$ — dostajemy, że

$$P(\ldots 01) = u, \quad P(\ldots 10) = uv = u(1-u) \quad \text{i} \quad P(\ldots 00) = v^2 = (1-u)^2.$$

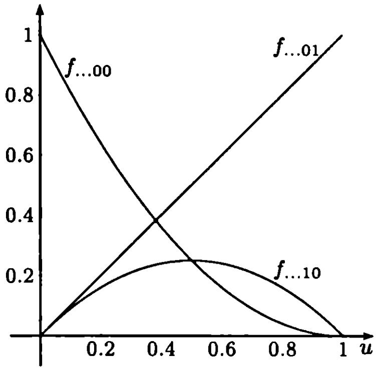
Wykresy funkcji $f_{\ldots 01}$, $f_{\ldots 10}$ i $f_{\ldots 00}$ prezentuje rysunek 12. Otrzymujemy zatem, że:

$(01 \gg 10)_{(0,1)}$,

$(00 \gg 01)_{(0,\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})}$,

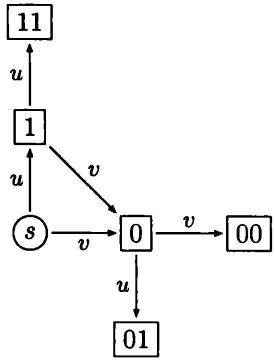
$(01 \gg 00)_{(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})}$,

$(00 \gg 10)_{(0,\frac{1}{2})}$, $(10 \gg 00)_{(\frac{1}{2},1)}$.



Rysunek 12.

4.4. Weźmy pod uwagę doświadczenie losowe $d^u_{01-11-00}$. Graf tego doświadczenia losowego przedstawia rys. 13.



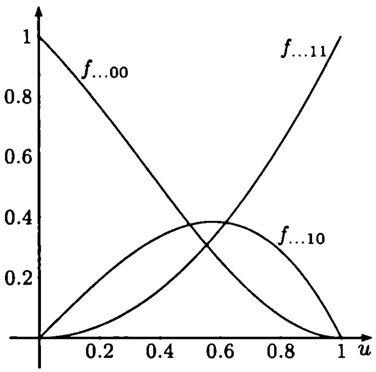
Rysunek 13.

Rozumując analogicznie jak powyżej i wykorzystując wcześniej uzyskane wyniki otrzymujemy, że

$$P(\ldots 01) = u(1-u)(1+u), \quad P(\ldots 11) = u^2 \text{ i } P(\ldots 00) = (1+u)(1-u)^2.$$

Wykresy funkcji $f_{\ldots 01}$, $f_{\ldots 11}$ i $f_{\ldots 00}$ przedstawia rysunek 14. Mamy tu:
$(00 \gg 01)_{(0,\frac{1}{2})}$,
$(01 \gg 00)_{(\frac{1}{2},1)}$,
$(00 \gg 11)_{(0,u_0)}$, $(11 \gg 00)_{(u_0,1)}$, gdzie $u_0 = \frac{2}{3} - \dfrac{2\sqrt{7}\sin\left(\dfrac{\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)}{3}\right)}{3} \approx 0,555$,
$(01 \gg 11)_{(0,\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2})}$,

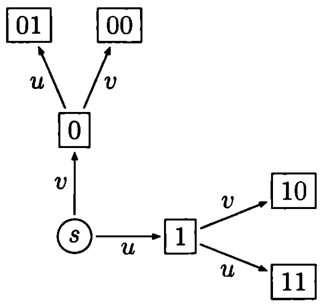
$(11 \gg 01)_{(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2},1)}$.



Rysunek 14.

5. Czekanie na jedną z czterech serii sukcesów i porażek o długości 2

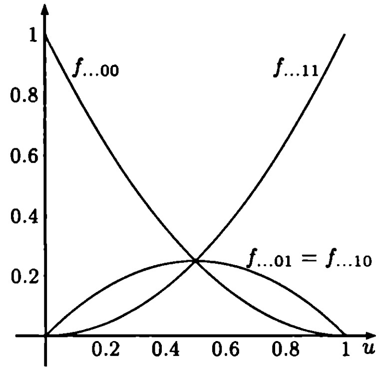
Graf doświadczenia $d^u_{11-10-01-00}$ przedstawia rys.15.



Rysunek 15.

Przestrzeń probabilistyczna $(\Omega_{11-10-01-00}, p^u_{11-10-01-00})$ jest skończona, bo $\Omega_{11-10-01-00} = \{11, 10, 01, 00\}$. Jest tu
$p^u_{11-10-01-00}(11) = u^2$,
$p^u_{11-10-01-00}(10) = u(1-u)$,
$p^u_{11-10-01-00}(01) = u(1-u)$ oraz
$p^u_{11-10-01-00}(00) = (1-u)^2$.

W tej skończonej przestrzeni probabilistycznej jest:
$P(\ldots 11) = u^2$, $P(\ldots 10) = u(1-u)$, $P(\ldots 01) = u(1-u)$ i $P(\ldots 00) = (1-u)^2$.



Rysunek 16.

Z wykresów funkcji $f_{...00}$, $f_{...01}$, $f_{...10}$ i $f_{...11}$, przedstawionych na rysunku 16, wynika, że:
$(01 \approx 10)_{(0,1)}$, $(00 \gg 01)_{(0,\frac{1}{2})}$, $(01 \gg 00)_{(\frac{1}{2},1)}$,
$(00 \gg 10)_{(0,\frac{1}{2})}$, $(10 \gg 00)_{(\frac{1}{2},1)}$, $(00 \gg 11)_{(0,\frac{1}{2})}$,
$(11 \gg 00)_{(\frac{1}{2},1)}$, $(11 \gg 01)_{(\frac{1}{2},1)}$, $(01 \gg 11)_{(0,\frac{1}{2})}$,
$(11 \gg 10)_{(\frac{1}{2},1)}$, $(10 \gg 11)_{(0,\frac{1}{2})}$.

W pracy omówiono specyficzne środki i metody konstrukcji oraz badania przestrzeni probabilistycznych jako modeli czekania na serie sukcesów i porażek. Metody dotyczą obliczania prawdopodobieństwa pewnych zdarzeń i są oparte na grafie stochastycznym. Istota metod sprowadza się do przejścia od przeliczalnych (nieskończonych) przestrzeni probabilistycznych do przestrzeni skończonych.

Literatura

[1] A. Engel, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*, Band 1, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1980.

[2] M. Gardner, *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*, W.H. Freeman and Company, New York 1988.

[3] R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.

[4] H. Humenberger, *Ein Paradoxon bei Münzwurfserien und bedingte Erwartungswerte* , Beiträge der 32. Tagung für Didaktik der Mathematik, München 1998.

[5] H. Humenberger, *Kopf-Adler-Muster in Münzwurfserien, unendliche Reihen und Fibonacci-Zahlen*, Beiträge zum Mathematikunterricht, Verlag Franzbecker, Hildeshein, Berlin 1999, 245-248.

[6] I. Krech, *Probability in probability spaces connected with generalised Penney's games*, Acta Universitatis Purkynianae 42, Usti nad Labem 1999, 71-77.

[7] M. Major, B. Nawolska, *Matematyzacja, rachunki, dedukcja i interpretacja w zadaniach stochastycznych*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1999.

[8] A. Płocki, *Gry Penneya i paradoksy stochastyczne*, Matematyka **1** (1999), 12-18.

[9] A. Płocki, *Stochastyka 1. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna jako matematyka in statu nascendi*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1997.

Instytut Matematyki
Akademia Pedagogiczna
ul. Podchorążych 2
30-084 Kraków
Poland
E-mail: ikrech@wsp.krakow.pl