Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis

Folia 5 Studia Ad Calculum Probabilitatis Eiusque Didacticam Pertinentia I (2002)

Maciej Major

Nietendencyjność losowania metodą „marynarza" jako problem stochastyczny

Abstract. The main objective of this paper is the answer to the question: „Is using the „sailor" method fair, when choosing a random person?" In this method, at the appointed sign, each participant n sticks out 1 to 5 fingers of his right hand. Afterwards the fingers are counted and the sum is added up. The person that it lands on when the fingers are counted up is considered chosen.

W wielu sytuacjach stajemy przed koniecznością wylosowania z danego skończonego zbioru jednego elementu. Chcemy aby każdy element miał w tym losowaniu równe szanse. Takie losowanie będziemy nazywać losowaniem *nietendencyjnym* albo *sprawiedliwym.* Z tego typu sytuacjami mamy do czynienia np. w przypadku losowania połowy boiska przed rozpoczęciem meczu piłkarskiego, wyboru pytania w konkursie. Do losowania wykorzystujemy wtedy np.: monety, zapałki, wyliczanki, „koła fortuny", pojemniki z kartkami, na których zapisane są nazwiska osób itp.

Pojawiają się więc pytania:

- Jak organizować sprawiedliwe losowanie elementu z danego zbioru n-elementowego?
- Jak na gruncie matematyki weryfikować sprawiedliwość tego losowania?

Problem, o którym mowa, pojawia się przede wszystkim w statystycznej kontroli jakości produkcji (SKJP), a dotyczy losowania reprezentatywnej próbki ze skończonej populacji. Procedury losowania obejmują określanie doświadczeń losowych o klasycznych modelach probabilistycznych. Tymi modelami są przestrzenie probabilistyczne rozumiane w tej pracy jako pary (Ω, p), gdzie Ω jest dowolnym skończonym zbiorem, a p funkcją określoną na zbiorze Ω o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych, nieujemną i spełniającą warunek $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$. Przestrzeń probabilistyczną (Ω, p) nazywamy w pracy modelem probabilistycznym doświadczenia losowego d, jeżeli Ω (jako tzw. *przestrzeń zdarzeń elementarnych*) jest zbiorem możliwych wyników doświadczenia losowego d, a funkcja p przypisuje każdemu wynikowi prawdopodobieństwo, z jakim doświadczenie losowe d może zakończyć się tym wynikiem.

Jeśli (Ω, p) jest przestrzenią probabilistyczną, to każdy podzbiór zbioru Ω nazywamy *zdarzeniem losowym*. *Prawdopodobieństwem zdarzenia* A nazywamy liczbę:

$$P(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A = \emptyset, \\ p(\omega), & \text{gdy } A = \{\omega\}, \\ \sum\limits_{\omega \in A} p(\omega), & \text{gdy } A \text{ jest zbiorem co najmniej dwuelementowym.} \end{cases}$$

Losowanie jest pewną procedurą dotyczącą „realnego świata". Aby na gruncie matematyki rozstrzygnąć, czy jest ono sprawiedliwe, należy najpierw sformułować probabilistyczne zadanie. Formułowanie wspomnianego zadania jest elementem *fazy matematyzacji*. Jego zaś rozwiązywanie odbywa się w określonej przestrzeni probabilistycznej. Tworzenie tej przestrzeni jako matematycznego modelu pozamatematycznej sytuacji (której dotyczą pytania) stanowi zasadniczy przedmiot *fazy matematyzacji*. Dla wielu sytuacji można skonstruować (dobrać) kilka różnych, nieizomorficznych, modeli probabilistycznych. Przyjęcie danego modelu implikuje takie albo inne narzędzia i metody rachunków. Rozwiązywanie (już) matematycznego zadania stanowi *fazę rachunków*. Rezultaty tej fazy należy następnie skonfrontować z wyjściowym, pozamatematycznym zagadnieniem. Mowa tu o interpretacji wyników uzyskanych w drodze dedukcji i rachunków na grunt rzeczywistości. Jest to *faza interpretacji*. Poszukiwanie odpowiedzi na postawione powyżej pytania obejmuje więc wszystkie fazy procesu stosowania matematyki.

Rozważymy szczególną procedurę, powszechnie stosowaną i bezkrytycznie uznawaną za metodę sprawiedliwego losowania jednej z grona n osób, zwaną metodą „marynarza". Na umówiony znak każdy z n uczestników losowania wystawia co najmniej jeden palec prawej ręki. Następnie zlicza się wystawione palce i sumę liczb łącznie wystawionych palców odlicza się kolejno jak w wyliczance. Osoba, na której zakończono odliczanie uznawana jest za wylosowaną. Weryfikacja sprawiedliwości takiego losowania obejmuje pytanie: Czy szanse wylosowania danej osoby zależą od kolejności, w jakiej odlicza się osoby i od kogo rozpoczyna się odliczanie? Przedmiotem pracy jest odpowiedź na to pytanie.

Załóżmy, że osoby ustawiono w koło, ustalono osobę, od której rozpocznie się odliczanie oraz kierunek odliczania. W zbiorze osób wprowadzono zatem porządek. Można zatem przyjąć, że każda z osób ma swój numer, jako miejsce w kolejce do odliczania. Wydaje się naturalne przyjęcie postulatu, że osoby wystawiają liczbę palców ustaloną „na chybił trafił", niezależnie od siebie. Są to założenia umożliwiające matematyzację. Przy tych założeniach mamy do czynienia z doświadczeniem losowym. Wynik doświadczenia (zdarzenie elementarne) jest w takiej sytuacji n-wyrazową wariacją zbioru $\{1,2,3,4,5\}$, jej j-ty wyraz oznacza liczbę palców wystawionych przez osobę o numerze j ($j = 1,2,\dots,n$). Wszystkie wyniki rozważanego doświadczenia należy uznać za jednakowo prawdopodobne.

Rozważmy zdarzenia:
$A_j = \{$*reszta z dzielenia przez n sumy liczb wystawionych palców wyniesie j*$\}$, dla $j = 1,2,\dots n-1$,
$A_n = \{$*suma liczb wystawionych palców będzie podzielna przez n*$\}$.
Zajście zdarzenia A_j oznacza, że zostanie wylosowana osoba o numerze j, dla $j = 1,2,\dots,n$.

Załóżmy, że $n = 2$. Wszystkie jednakowo możliwe przypadki wystawienia palców przez dwie osoby przedstawmy w postaci tabeli. W pierwszej kolumnie wpisano możliwe liczby palców wskazanych przez pierwszą osobę, w pierwszym wierszu — liczby palców wskazanych przez drugą osobę. W przecięciu się j-tego wiersza i k-tej kolumny wpisano liczbę $j+k$. Ta suma jest sumą liczb wyciągniętych palców przez obie osoby, jeśli pierwsza wystawiła j palców a druga k palców ($j \in \{1,2,3,4,5\}$ oraz $k \in \{1,2,3,4,5\}$).

	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10

Tabela 1.

Każde oczko tabeli 1 reprezentuje jeden wynik ω losowego wystawiania palców prawej ręki przez dwie osoby. Zbiór $\Omega_2 = \{1,2,3,4,5\}^2$ jest w omawianej sytuacji zbiorem wyników (zdarzeń elementarnych) tego doświadczenia. Każdy wynik jest jednakowo prawdopodobny. Niech $p_2(\omega) = \frac{1}{5^2}$ dla $\omega \in \Omega_2$. Klasyczna przestrzeń probabilistyczna (Ω_2, p_2) jest modelem omawianego doświadczenia. Z każdym oczkiem związana jest suma liczb wyciągniętych palców przez obie osoby, a więc na zbiorze Ω_2 określona została pewna funkcja X_2. Jest ona zmienną losową w przestrzeni probabilistycznej (Ω_2, p_2). Wartości zmiennej losowej X_2 tworzą zbiór $\Omega_{X_2} = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

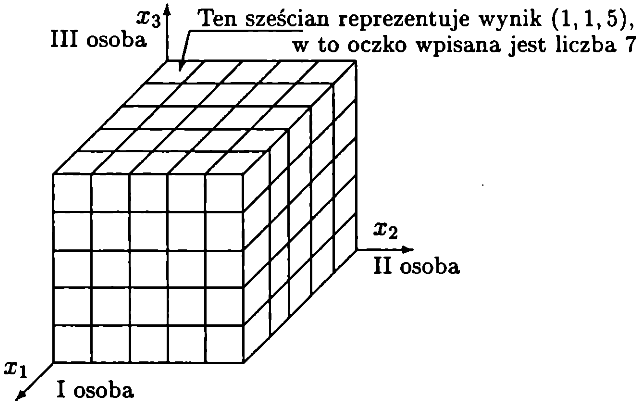
Poniższa tabela prezentuje informacje o rozkładzie zmiennej losowej X_2:

suma liczb wystawionych palców (x_j)	2	3	4	5	6	7	8	9	10
liczba wyników dających tę sumę	1	2	3	4	5	4	3	2	1

Tabela 2.

Rozważmy zdarzenia A_1 i A_2. Z 25 jednakowo prawdopodobnych wyników 12 sprzyja zdarzeniu A_1, a 13 wyników — zdarzeniu A_2. Niech P będzie prawdopodobieństwem w przestrzeni probabilistycznej (Ω_2, p_2). Jest to prawdopodobieństwo klasyczne (por. [2], s. 78), a zatem $P(A_1) = \frac{12}{25} \neq \frac{13}{25} = P(A_2)$. W przypadku dwu osób losowanie metodą „marynarza" nie jest więc sprawiedliwe.

Niech $n = 3$. Jeśli w losowaniu biorą udział trzy osoby, to każdy wynik wystawienia palców jest trzywyrazową wariacją zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Mamy zatem $\Omega_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}^3$ i $p_3(\omega) = \frac{1}{5^3}$, dla $\omega \in \Omega_3$. Jest zatem 5^3 tj. 125 jednakowo prawdopodobnych wyników losowego wystawiania palców przez 3 osoby. Rysunek 1 prezentuje zbiór Ω_3 w pewnej interpretacji geometrycznej.

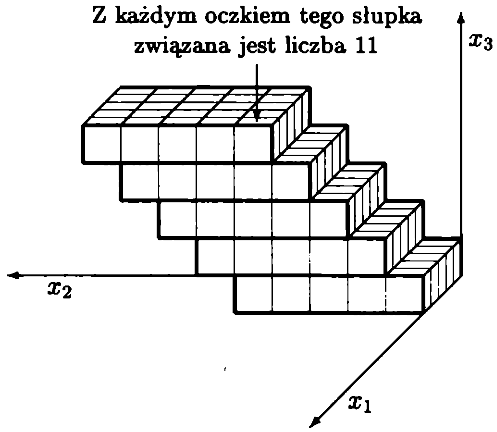


Rysunek 1.

W tej interpretacji Ω_3 jest zbiorem 125 sześcianów (oczek) tworzących trójwymiarową kostkę (sześcian). W sześcianie tym można wyróżnić 5 poziomych warstw. Warstwę j-tą stanowią te wyniki (a_1, a_2, a_3) w których $a_3 = j$ $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$. W każdej warstwie jest 25 oczek. Każde oczko reprezentuje jeden wynik. W każde oczko wpiszmy sumę liczb palców wystawionych przez trzy osoby. Na zbiorze Ω_3 określamy więc zmienną losową X_3 następująco: $X(a_1, a_2, a_3) = a_1 + a_2 + a_3$, dla $(a_1, a_2, a_3) \in \Omega_3$. Zbiór $\{3, 4, 5, \ldots, 15\}$ jest zbiorem jej wartości.

Rozważmy zdarzenia A_1, A_2 i A_3. Do obliczenia prawdopodobieństwa tych zdarzeń potrzebna jest liczba wyników (tj. elementów zbioru Ω_3) sprzyjających każdemu z tych zdarzeń. Aby znaleźć moce zbiorów A_1, A_2 i A_3, przesuńmy poszczególne warstwy kostki w sposób przedstawiony na rysunku 2. Warstwę i-tą przesuwamy o wektor $[0, i-1, 0]$, a więc dowolne oczko reprezentujące wynik (a_1, a_2, a_3) przesuwamy o wektor $[0, a_2 - 1, 0]$.

Zauważmy, że jeśli teraz spojrzymy na powstałą bryłę z góry, to we wszystkie oczka (sześciany jednostkowe) zetknięte podstawami górną i dolną wpisana jest ta sama liczba.



Rysunek 2.

Rozważmy liczby wpisane w oczka poszczególnych warstw (rys. 3).

3	4	5	6	7
4	5	6	7	8
5	6	7	8	9
6	7	8	9	10
7	8	9	10	11

warstwa 1

4	5	6	7	8
5	6	7	8	9
6	7	8	9	10
7	8	9	10	11
8	9	10	11	12

warstwa 2

5	6	7	8	9
6	7	8	9	10
7	8	9	10	11
8	9	10	11	12
9	10	11	12	13

warstwa 3

6	7	8	9	10
7	8	9	10	11
8	9	10	11	12
9	10	11	12	13
10	11	12	13	14

warstwa 4

7	8	9	10	11
8	9	10	11	12
9	10	11	12	13
10	11	12	13	14
11	12	13	14	15

warstwa 5

Rysunek 3.

Opuśćmy wszystkie warstwy na płaszczyznę wyznaczoną przez punkt $(0, 0, 0)$ i wektory $[1, 0, 0]$ i $[0, 1, 0]$. Oczko reprezentujące wynik (a_1, a_2, a_3) przesuwamy teraz o wektor $[0, 0, a_3 - 1]$. Liczby ze wszystkich pięciu warstw utworzą następującą macierz o pięciu wierszach i dziewięciu kolumnach (tab. 3).

Pięć początkowych wierszy reprezentuje pierwszą warstwę kostki, wiersze $2, 3, 4, 5, 6$ — drugą, wiersze $3, 4, 5, 6, 7$ — trzecią, wiersze $4, 5, 6, 7, 8$ — czwartą a wiersze $5, 6, 7, 8, 9$ — piątą warstwę.

Znajdźmy liczby wyników w każdej z warstw, które sprzyjają zdarzeniu A_j

($j = 1, 2, 3$). W tym celu wykorzystamy tabelę 3 (lub rys. 3).

3	4	5	6	7
4	5	6	7	8
5	6	7	8	9
6	7	8	9	10
7	8	9	10	11
8	9	10	11	12
9	10	11	12	13
10	11	12	13	14
11	12	13	14	15

Tabela 3.

Mamy zatem:

	Liczba wyników sprzyjających danemu zdarzeniu					
	warstwa 1	warstwa 2	warstwa 3	warstwa 4	warstwa 5	suma
A_1	9	8	8	9	8	42
A_2	8	9	8	8	9	42
A_3	8	8	9	8	8	41

Tabela 4.

Wszystkie wyniki są jednakowo prawdopodobne, a więc $P(A_1) = P(A_2)$ i $P(A_3) < P(A_1)$. Losowanie metodą „marynarza" jednej z trzech osób nie jest zatem sprawiedliwe. Osoba trzecia w kolejce do odliczania ma mniejsze szanse niż każda z dwu pozostałych osób.

Rozważmy $n = 4$ i zdarzenia A_j, dla $j = 1, 2, 3, 4$. Jeśli przez (Ω_4, p_4) oznaczyć model losowego wystawiania palców przez 4 osoby, to Ω_4 jest zbiorem wszystkich czterowyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Mamy więc teraz 625 jednakowo prawdopodobnych wyników, a zatem $p_4(\omega) = \frac{1}{625}$ dla każdego $\omega \in \Omega_4$.

Aby znaleźć liczby wyników sprzyjających zdarzeniu A_j, posłużymy się metodami numerycznymi (programem napisanym w języku Turbo Pascal).

```
uses crt;
var znak:char;
    i,j,k,l,s,w1,w2,w3,w4:integer;
begin
w1:=0; w2:=0; w3:=0; w4:=0;
for i:= 1 to 5 do
begin
 for j:= 1 to 5 do
```

```
  begin
   for k:= 1 to 5 do
    begin
     for l:= 1 to 5 do
      begin
        s:=i+j+k+l;
        s:= s mod 4;
        if s=1 then w1:=w1+1;
        if s=2 then w2:=w2+1;
        if s=3 then w3:=w3+1;
        if s=0 then w4:=w4+1;
      end;
    end;
  end;
end;
writeln(w1,',',w2,',',w3,',',w4);
repeat until keypressed;
znak:=readkey
end.
```

W przytoczonym programie zmienna `wj` jest liczbą wyników sprzyjających zdarzeniu A_j dla $j = 1, 2, 3, 4$. Po wykonaniu programu uzyskujemy ciąg czterech liczb:

```
156, 156, 156, 157.
```

Kolejne wyrazy tego ciągu są liczbami wyników sprzyjających odpowiednio zdarzeniom A_1, A_2, A_3 i A_4. Wynika stąd, że osoba czwarta ma większe szanse niż każda z pozostałych, a więc losowanie „marynarzem" jednej spośród czterech osób też nie jest sprawiedliwe.

Nasuwa się pytanie czy istnieje taka liczba n, przy której losowanie metodą „marynarza" jest sprawiedliwe, a jeśli tak, to jaką ma ona postać?

W przypadku losowania jednej spośród n osób zbiorem wyników losowego wystawiania palców jest zbiór wszystkich n-wyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Każdy wynik jest jednakowo prawdopodobny. Wszystkich wyników jest 5^n. Warunkiem koniecznym na to, aby losowanie było sprawiedliwe jest, aby n było naturalną potęgą liczby 5. Jest to jedynie warunek konieczny. Z faktu, że n jest potęgą liczby 5 nie wynika, że to losowanie metodą marynarz jednej z n osób jest sprawiedliwe.

W [3] (por. s. 78-79) wykazano, że dla $n = 6$ losowanie metodą „marynarza" nie jest sprawiedliwe. Ostatnie rozumowanie jest uogólnieniem tamtej argumentacji.

Z zaprezentowanego wyżej rozumowania wynika, że gdy n nie jest potęgą liczby 5, to losowanie metodą „marynarza” jednej z n osób, nie jest sprawiedliwe.

Wykażemy, że dla $n = 5$ losowanie jest sprawiedliwe. W przypadku $n = 5$ modelem losowego wystawiania placów jest przestrzeń probabilistyczna (Ω_5, p_5), gdzie $\Omega_5 = \{1,2,3,4,5\}^5$ i $p_5(\omega) = \frac{1}{5^5}$ dla $\omega \in \Omega_5$. Zbiór Ω_5 można interpretować jako 5-wymiarową kostkę K^5, zbudowaną z 5^5 oczek. Każde oczko reprezentuje tu jeden pięciowyrazowy ciąg o wyrazach ze zbioru $\{1,2,3,4,5\}$. W każde oczko wpiszmy sumę wyrazów tego ciągu. W pięciowymiarowej kostce można wyróżnić pięć różnych zbiorów K_j^4, $j = 1,2,3,4,5$, gdzie

— $K_j^4 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, j) : a_i \in \{1,2,3,4,5\}, i = 1,2,3,4\}$ dla $j = 1,2,3,4,5$.

Każdy ze zbiorów K_j^4 $(j = 1,2,3,4,5)$ można utożsamić z pewną czterowymiarową kostką K^4. W każdym ze zbiorów K_j^4 można wyróżnić pięć różnych zbiorów $K_{j_k}^3$, gdzie zbiór

— $K_{j_k}^3 = \{(a_1, a_2, a_3, k, j) : a_i \in \{1,2,3,4,5\}, i = 1,2,3\}$ dla $j = 1,2,3,4,5$ i $k = 1,2,3,4,5$.

Każdy ze zbiorów $K_{j_k}^3$ $(j = 1,2,3,4$ $k = 1,2,3,4,5)$ można utożsamić z pewną trzywymiarową kostką K^3 (sześcianem złożonym ze 125 sześcianów jednostkowych). W analogiczny sposób w każdym z 25 zbiorów $K_{j_k}^3$ można wyróżnić 5 warstw.

Postąpmy podobnie jak w przypadku $n = 3$. „Rozsuńmy” tę kostkę na 5 zbiorów K_j^4 („rozsuwając” ją w kierunku osi x_4), następnie każdy ze zbiorów K_j^3 „rozsuńmy” na 5 zbiorów $K_{j_k}^3$ („rozsuwając” je w kierunku osi x_3) i każdy ze zbiorów $K_{j_k}^3$ „rozsuńmy” na pięć warstw („rozsuwając” je w kierunku osi x_2). Następnie wszystkie warstwy „opuśćmy” na płaszczyznę wyznaczoną przez punkt $(0,0,0,0,0)$ i wektory $[1,0,0,0,0]$, $[0,1,0,0,0]$. Operację tę można opisać następująco. Pięciowymiarowa kostka znajduje się w ortonormalnym układzie współrzędnych $0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$. Weźmy dowolne oczko odpowiadające wynikowi $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$. Każde oczko przesuwamy o wektor $[0, a_3 + a_4 + a_5 - 3, 1 - a_3, 1 - a_4, 1 - a_5]$. Po tym przesunięciu oczko $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ zawierające liczbę $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ zostaje odwzorowane na oczko $(a_1, a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - 3, 1, 1, 1)$ (suma współrzędnych nie ulega zmianie, więc oczko to zawiera dalej tę samą liczbę). Zauważmy, że obrazem dowolnej warstwy $K_{j_{k_l}}^2 = \{(a_1, a_2, l, k, j) : a_i \in \{1,2,3,4,5\}, i = 1,2\}$ jest warstwa $K_{1_{1_1}}^2 = \{(a_1, a_2 + j + k + l, 1, 1, 1) : a_i \in \{1,2,3,4,5\}, i = 1,2\}$ dla $j = 1,2,3,4,5$, $k = 1,2,3,4,5$ i $l = 1,2,3,4,5$.

Po tych operacjach pięciowymiarową kostkę można opisać tabelą 5. W uzyskanej tabeli każdy ze zbiorów K_j^4 reprezentowany jest przez 13 kolejnych wierszy tabeli, każdy ze zbiorów $K_{j_k}^3$ reprezentowany jest przez 9 kolejnych wierszy tabeli, zaś dowolna warstwa $K_{j_{k_l}}^2$ reprezentowana jest przez 5 kolejnych wierszy tabeli.

5	6	7	8	9
6	7	8	9	10
7	8	9	10	11
8	9	10	11	12
9	10	11	12	13
10	11	12	13	14
11	12	13	14	15
12	13	14	15	16
13	14	15	16	17
14	15	16	17	18
15	16	17	18	19
16	17	18	19	20
17	18	19	20	21
18	19	20	21	22
19	20	21	22	23
20	21	22	23	24
21	22	23	24	25

Tabela 5.

Dowolną warstwę można przedstawić następująco:

a	$a+1$	$a+2$	$a+3$	$a+4$
$a+1$	$a+2$	$a+3$	$a+4$	$a+5$
$a+2$	$a+3$	$a+4$	$a+5$	$a+6$
$a+3$	$a+4$	$a+5$	$a+6$	$a+7$
$a+4$	$a+5$	$a+6$	$a+7$	$a+8$

gdzie $a \in \{5, 6, ..., 17\}$

Dzieląc każdą z liczb z dowolnego wiersza powyższej tabeli przez 5 uzyskujemy następujące reszty $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Każda reszta występuje dokładnie jeden raz, a więc w każdej warstwie każda z reszt występuje 5 razy.

Rozważmy zdarzenia A_j dla $j = 1, 2, 3, 4, 5$. W wyniku prowadzonej konstrukcji zbiór Ω_5 możliwych wyników został przedstawiony jako suma równolicznych i parami rozłącznych zbiorów (warstw). W każdej warstwie każdemu ze zdarzeń A_j sprzyja jednakowa liczba wyników, a zatem $P(A_j) = \frac{1}{5}$ dla $j = 1, 2, 3, 4, 5$. Interpretacja tego matematycznego faktu prowadzi do wniosku, że losowanie metodą „marynarza" jednej z pięciu osób jest sprawiedliwe.

Załóżmy, że w losowaniu metodą „marynarza" uczestniczy n osób i $n \geqslant 2$. Modelem wystawiania palców jest przestrzeń probabilistyczna (Ω_n, p_n), gdzie Ω_n (jako zbiór wyników wystawiania palców) jest zbiorem n-wyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $p_n(\omega) = \frac{1}{5^n}$ dla $\omega \in \Omega_n$.

Rozważmy zdarzenia:
$A_j = \{reszta\ z\ dzielenia\ przez\ n\ sumy\ liczb\ wystawionych\ palców\ wyniesie\ j\}$, dla $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$,
Zajście zdarzenia A_j jest równoznaczne z wylosowaniem osoby o numerze j, dla $j = 1, 2, \ldots, n-1$, zajście zdarzenia A_0 zaś – z wylosowaniem osoby o numerze n.

Zaproponujemy pewien algorytm obliczania prawdopodobieństwa zdarzeń A_j dla $j = 1, 2, \ldots, n$.

Niech X_n będzie sumą łącznie wystawionych palców przez n osób uczestniczących w losowaniu. Jest to zmienna losowa w przestrzeni probabilistycznej (Ω_n, p_n). Jej wartości tworzą zbiór $\Omega_{X_n} = \{n, n+1, n+2, \ldots, 5n\}$. Określmy wektor $\overrightarrow{x_n} = [n, n+1, n+2, \ldots, 5n]$. Jego współrzędne są kolejnymi wartościami zmiennej losowej X_n, ma on zatem $4n+1$ współrzędnych. Niech I_k^n będzie zbiorem wskaźników tych współrzędnych wektora $\overrightarrow{x_n}$, które przy dzieleniu przez n dają resztę k.

Rozważmy wielomian $w(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ oraz wektor $\overrightarrow{w_n}$, którego kolejne współrzędne są kolejnymi współczynnikami wielomianu $[w(x)]^n$. Przyjmijmy $\overrightarrow{v_n} = \frac{\overrightarrow{w_n}}{5^n}$. Wykażemy, że

$$P(X_n = x_{n_l}) = v_{n_l} \text{ dla } l = 1, 2, \ldots, 4n+1$$

oraz

$$P(A_k) = \sum_{i \in I_k^n} v_{n_i} \text{ dla } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

1°. Dla $n = 2$ mamy:

$$\overrightarrow{x_2} = [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10],$$

$$I_0^2 = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad I_1^2 = \{2, 4, 6, 8\}$$

oraz

$$[w(x)]^2 = (1+x+x^2+x^3+x^4)^2 = 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+4x^5+3x^6+2x^7+x^8,$$

a więc

$$\overrightarrow{w_2} = [1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1].$$

Dzieląc współrzędne wektora $\overrightarrow{w_2}$ przez 5^2 otrzymujemy, że

$$\overrightarrow{v_2} = \left[\frac{1}{25}, \frac{2}{25}, \frac{3}{25}, \frac{4}{25}, \frac{5}{25}, \frac{4}{25}, \frac{3}{25}, \frac{2}{25}, \frac{1}{25}\right],$$

a zatem

$$P(A_0) = \frac{1}{25} + \frac{3}{25} + \frac{5}{25} + \frac{3}{25} + \frac{1}{25} = \frac{13}{25},$$

$$P(A_1) = \frac{2}{25} + \frac{4}{25} + \frac{4}{25} + \frac{2}{25} = \frac{12}{25}.$$

2°. Wykażemy teraz, że jeśli algorytm zachodzi dla n, to zachodzi także dla $n+1$.

Niech $\overrightarrow{w_k} = \left[w_{n_1}, w_{n_2}, w_{n_3}, \ldots, w_{n_{4n+1}}\right]$. Zauważmy, że $w_{n_1} = w_{n_{4n+1}} = 1$, oraz, że $w_{n_k} = w_{n_{4n+2-k}}$ dla $k = 1, 2, \ldots, 2n+1$.

Jest

$$\begin{aligned} [w(x)]^{k+1} &= [w(x)]^k \cdot w(x) \\ &= [w(x)]^k + x \cdot [w(x)]^k + x^2 \cdot [w(x)]^k + x^3 \cdot [w(x)]^k \\ &\quad + x^4 \cdot [w(x)]^k + x^5 \cdot [w(x)]^k, \end{aligned}$$

a więc współrzędne wektora $[w(x)]^{k+1}$ można w prosty sposób uzyskać ze współrzędnych wektora $[w(x)]^k$ poprzez następującą operację (**TS**):

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & w_{n_1} & w_{n_2} & w_{n_3} & w_{n_4} & w_{n_5} & \cdots & w_{n_{4n+1}} & & & & \\
 & & w_{n_1} & w_{n_2} & w_{n_3} & w_{n_4} & \cdots & \cdots & w_{n_{4n+1}} & & & \\
 & & & w_{n_1} & w_{n_2} & w_{n_3} & \cdots & \cdots & \cdots & w_{n_{4n+1}} & & \\
 & & & & w_{n_1} & w_{n_2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & w_{n_{4n+1}} & \\
+ & & & & & w_{n_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & w_{n_{4n+1}} \\
\hline
 & w_{n+1_1}, & w_{n+1_2}, & w_{n+1_3}, & w_{n+1_4}, & w_{n+1_5}, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & w_{n+1_{4(n+1)+1}}
\end{array}$$

Zbiór Ω_{n+1}, tj. zbiór wyników wystawiania palców przez $n+1$ osób, jest zbiorem $(n+1)$-wyrazowych wariacji zbioru $\{1,2,3,4,5\}$. Ten zbiór można interpretować jako $(n+1)$-wymiarową kostkę K^{n+1} zawartą w $\mathbb{R}^{n+1}$ i zbudowaną z 5^{n+1} oczek. Każde oczko reprezentuje pewną $(n+1)$-wyrazową wariacją zbioru $\{1,2,3,4,5\}$. W każde oczko wpiszmy sumę wyrazów tej wariacji. Niech X_{n+1} będzie sumą łącznie wystawionych palców przez $n+1$ osób. Wartości zmiennej losowej X_{n+1} tworzą zbiór $\Omega_{X_{n+1}} = \{n+1, n+2, \ldots, 5(n+1)\}$ i $\overrightarrow{x_{n+1}} = [n+1, n+2, \ldots, 5(n+1)]$.

W $(n+1)$-wymiarowej kostce można wyróżnić pięć różnych zbiorów K_j^{n+1}, $j = 1,2,3,4,5$, gdzie zbiór $K_j^{n+1} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n, j) : a_i \in \{1,2,3,4,5\}, i = 1,2,\ldots,n\}$ dla $j = 1,2,3,4,5$.

Każdy ze zbiorów K_j^{n+1} $(j = 1,2,3,4,5)$ można utożsamić z n-wymiarową kostką K^n, zawartą w $\mathbb{R}^n$.

Rozłóżmy kostkę K^{n+1} na 5 wspomianych zbiorów K_j^{n+1} $(j = 1,2,3,4,5)$. Zauważmy, że zmienna losowa X_{n+1} przyjmuje wartości:

$n+1$, $n+2$,..., $5n+1$, dla wyników należących do zbioru K_1^{n+1},

$n+2$, $n+3$,..., $5n+2$, dla wyników należących do zbioru K_2^{n+1},

$n+3$, $n+4$,..., $5n+3$, dla wyników należących do zbioru K_3^{n+1},

$n+4$, $n+5,\ldots$, $5n+4$, dla wyników należących do zbioru K_4^{n+1},
$n+5$, $n+6,\ldots$, $5n+5$, dla wyników należących do zbioru K_5^{n+1}.

Na mocy założenia indukcyjnego wiemy, ile razy każda z wartości zmiennej losowej X_{n+1} jest przyjmowana na wynikach należących do każdego ze zbiorów K_j^{n+1} ($j \in \{1,2,3,4,5\}$. Opisują to kolejne współrzędne wektora $\overrightarrow{w_n}$. Wynika stąd, że współrzędne wektora $\overrightarrow{w_{n+1}}$ można uzyskać za pomocą współrzędnych wektora $\overrightarrow{w_n}$ poprzez określoną wcześniej operację (**TS**). Tak uzyskane współrzęne wektora $\overrightarrow{w_{n+1}}$ są kolejnymi współczynnikami wielomianu $[w(x)]^{n+1}$.

Korzystając z przedstawionego algorytmu pokażemy, że dla $n = 25$ losowanie metodą „marynarza" nie jest sprawiedliwe.

Zbiór wyników losowego wystawiania palców przez 25 osób jest zbiorem $\Omega_{25} = \{1,2,3,4,5\}^{25}$. Niech A_j oznacza zdarzenie $\{$*zostanie wylosowana j-ta osoba*$\}$ dla $j = 1,2,\ldots,25$.

Rozważmy wektor

$$\overrightarrow{x_{25}} = [25, 26, 27, \ldots, 125]$$

oraz wektor

$$\overrightarrow{w_{25}} = [1, 24, 300, 2600, 17550, 98256, ..., 98256, 17550, 2600, 300, 24, 1].$$

Przedstawiamy jedynie szkic rozwiązania, dlatego nie podajemy wszystkich współrzędnych wektora $\overrightarrow{w_{25}}$.

Jest tu $I_{25}^{25} = \{1, 26, 51, 76, 101\}$, $w_{25_1} = w_{25_{101}} = 1$, $w_{25_{26}} = w_{25_{76}} = 26421479140746$, $w_{25_{51}} = 16704680297731631$, a więc

$$\begin{aligned} P(A_{25}) &= \frac{w_{25_1}}{5^{25}} + \frac{w_{25_{26}}}{5^{25}} + \frac{w_{25_{51}}}{5^{25}} + \frac{w_{25_{76}}}{5^{25}} + \frac{w_{25_{101}}}{5^{25}} \\ &= \frac{16757523256013125}{298023223876953125} \approx 0,0562 \neq \frac{1}{25} \end{aligned}$$

co dowodzi, że losowanie jednej z 25 osób metodą „marynarza" nie jest sprawiedliwe.

Problem sprawiedliwości losowania metodą „marynarza" w przypadku, gdy liczba osób wyraża się wzorem 5^k, dla $k \in \mathbb{N} \wedge k \geqslant 3$ jest otwarty.

Sformułujmy ogólniejszy problem.

Aby z grona n osób wylosować jedną, każda z tych osób pisze na kartce liczbę naturalną ze zbioru $\{1,2,\ldots,k\}$ ($k \geqslant 2$). Następnie oblicza się sumę tych liczb i od pewnej ustalonej osoby w ustalonej kolejności odlicza się tę sumę tak, jak w wyliczance. Za wylosowaną zostaje uznana ta osoba, na której kończy się odliczanie.

Niech D_k oznacza zbiór dzielników liczby k. Sformułujmy następującą hipotezę:

Losowanie wg. opisanej procedury jednej z n osób jest sprawiedliwe wtedy i tylko wtedy gdy $n \in D_k$.

Jeżeli $n = k$, to sprawiedliwość losowania można uzasadnić analogicznie, jak uzasadniono sprawiedliwości losowania w przypadku $k = n = 5$.

Udowodnimy, że hipoteza jest prawdziwa dla $k = 2$.

Wynik doświadczenia jest w takiej sytuacji n-wyrazową wariacją zbioru $\{1, 2\}$, jej j-ty wyraz oznacza liczbę wskazaną przez osobę nr j ($j = 1, 2$). Rozważmy zdarzenia:
A_j = {*reszta z dzielenia przez n sumy wskazanych liczb wyniesie j*} dla $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$,
Zajście zdarzenia A_j jest równoznaczne z tym, że zostanie wylosowana osoba o numerze j, dla $j = 1, 2, \ldots, n-1$, zajście zdarzenia A_0 zaś – z tym, że zostanie wylosowana osoba o numerze n.

Na zbiorze Ω_n wyników rozważanego doświadczenia losowego określmy fukcję X_n, która wynikowi przypisuje sumę łącznie wskazanych liczb. Funkcja X_n jest zmienną losową. Zbiorem jej wartości jest $\{n, n+1, \ldots 2n\}$.

Rozważmy wektor $\overrightarrow{x_n} = [n, n+1, \ldots, 2n]$ oraz wielomian $w(x) = 1 + x$. Postępując tak jak poprzednio, skonstruujmy współrzędne wektora $\overrightarrow{w_n}$ (jako kolejne współczynniki wielomianu $[w(x)]^n$).

Mamy

$$[w(x)]^n = (1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n,$$

zatem

$$\overrightarrow{w_n} = \left[\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}\right] = [1, n, \ldots, n, 1],$$

oraz

$$\overrightarrow{w_n} = \left[\frac{1}{2^n}, \frac{n}{2^n}, \ldots, \frac{n}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right].$$

Niech I_0^n będzie zbiorem wskaźników tych współrzędnych wektora $\overrightarrow{x_n}$, które to współrzędne, przy dzieleniu przez n dają resztę 0. Ponieważ $I_0^n = \{1, 2n\}$, więc $P(A_n) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{2}{2^n}$. Losowanie jest sprawiedliwe wtedy i tylko wtedy, gdy $P(A_n) = \frac{1}{n}$, a zatem gdy

$$\frac{2}{2^n} = \frac{1}{n}.$$

Jedynymi naturalnymi pierwiastkami powyższego równania są: $n = 1$ oraz $n = 2$. Losowanie jest zatem sprawiedliwe wtedy i tylko wtedy, gdy uczestniczą w nim dwie osoby (dla $n = 1$ losowanie nie ma sensu).

Uwagi dotyczące losowania metodą „marynarza"

1. W pracy uzasadniliśmy, że losowanie metodą „marynarza" — w sytuacji, gdy każdy z uczestników losowania pisze na kartce liczbę naturalną ze zbioru $\{1,2\}$ — jest sprawiedliwe wtedy i tylko wtedy, gdy w losowaniu biorą udział dwie osoby. Przeanalizujmy sytuację, gdy w losowaniu metodą „marynarza" biorze udział n osób ($n \geqslant 2$), oraz gdy każda z nich pisze na kartce liczbę ze zbioru $\{1,2,3\}$. Wynik doświadczenia jest w takiej sytuacji n-wyrazową wariacją zbioru $\{1,2,3\}$, której j-ty wyraz oznacza liczbę wskazaną przez osobę nr j ($j = 1,2,3$).

Rozważmy zdarzenie:
$A_0 = \{$*reszta z dzielenia przez n sumy wskazanych liczb wyniesie* $0\}$.
Zajście zdarzenia A_0 oznacza, że zostanie wylosowana osoba o numerze n.

Niech X_n będzie sumą łącznie wskazanych liczb przez n osób. Zbiorem wartości tej zmiennej losowej jest $\{n, n+1, \ldots, 2n, \ldots, 3n\}$.

Określmy wektor $\overrightarrow{x_n} = [n, n+1, \ldots, 2n, \ldots, 3n]$ (ma on $2n+1$ współrzędnych) i rozważmy wielomian $w(x) = 1 + x + x^2$. Współrzędne wektora $\overrightarrow{w_n}$ są kolejnymi współczynnikami wielomianu $[w(x)]^n$, a zatem:

$$\begin{aligned}
(1+x+x^2)^n &= (1+x(1+x))^n \\
&= \binom{n}{0}x^n(1+x)^n + \binom{n}{1}x^{n-1}(1+x)^{n-1} \\
&\quad + \binom{n}{2}x^{n-2}(1+x)^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}x(1+x) + \binom{n}{n} \\
&= \binom{n}{0}\left[x^n\left(\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}\right)\right] \\
&\quad + \binom{n}{1}\left[x^{n-1}\left(\binom{n-1}{0}x^{n-1} + \binom{n-1}{1}x^{n-2}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \cdots + \binom{n-1}{n-2}x + \binom{n-1}{n-1}\right)\right] \\
&\quad + \binom{n}{2}\left[x^{n-2}\left(\binom{n-2}{0}x^{n-2} + \binom{n-2}{1}x^{n-3}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \cdots + \binom{n-2}{n-4}x^2 + \binom{n-2}{n-3}x + \binom{n-2}{n-2}\right)\right] \\
&\quad + \cdots + \binom{n}{n-1}x(1+x) + \binom{n}{n},
\end{aligned}$$

skąd wynika, że $w_{n_1} = w_{n_{2n+1}} = 1$. Niech $\overrightarrow{v_n} = \frac{\overrightarrow{w_n}}{3^n}$. Zauważmy, że

$$P(A_0) = P(X_n = n) + P(X_n = 2n) + P(X_n = 3n)$$

oraz, że

$$P(X_n = n) = v_{n_1}, \quad P(X_n = 3n) = v_{n_{2n+1}} \quad \text{i} \quad P(X_n = 2n) = v_{n_{n+1}}.$$

Ponieważ $w_{n_{n+1}}$ jest współczynnikiem wielomianu $(1 + x + x^2)^n$ występującym przy x^n, więc

$$w_{n_{n+1}} = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-2k},$$

oraz

$$P(X_n = 2n) = v_{n_{n+1}} = \frac{\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-2k}}{3^n}.$$

Uwzględniając to, że $P(X_n = n) = P(X_n = 3n) = \frac{1}{3^n}$ oraz fakt że $\binom{n-k}{n-2k} = \binom{n-k}{k}$ dostajemy następujący warunek konieczny na to, aby losowanie było sprawiedliwe:

$$2 + \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-2k} = \frac{3^n}{n}.$$

Ostatni warunek jest spełniony dla $n = 3$.

2. W pracy wykazaliśmy, że losowanie metodą „marynarza" (uczestnicy wystawiają od 1 do 5 palców) nie jest sprawiedliwe gdy w losowaniu uczestniczy 25 osób. Przybliżenia prawdopodobieństw zdarzeń A_j $(j = 1, 2, \ldots, 25)$ są następujące:

$P(A_{25}) \approx 0,0562,$
$P(A_1) = P(A_{24}) \approx 0,0557,$
$P(A_2) = P(A_{23}) \approx 0,0542,$
$P(A_3) = P(A_{22}) \approx 0,0518,$
$P(A_4) = P(A_{21}) \approx 0,0486,$
$P(A_5) = P(A_{20}) \approx 0,0449,$
$P(A_6) = P(A_{19}) \approx 0,0409,$
$P(A_7) = P(A_{18}) \approx 0,0369,$
$P(A_8) = P(A_{17}) \approx 0,0331,$
$P(A_9) = P(A_{16}) \approx 0,0297,$
$P(A_{10}) = P(A_{15}) \approx 0,0278,$
$P(A_{11}) = P(A_{14}) \approx 0,0251,$
$P(A_{12}) = P(A_{13}) \approx 0,0241,$

skąd wynika np., że ostatnia osoba w kolejce ma ponad dwa razy większe szanse na wylosowanie, niż osoby będące w „środku" (osoba dwunasta i trzynasta).

3. W pracy przedstawiliśmy metodę konstrukcji współrzędnych wektora $\overrightarrow{w_n}$. Rozważmy współrzędne kolejnych wektorów $\overrightarrow{w_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ w sytuacji, gdy uczestnicy losowania wystawiają od 1 do 5 palców. Wypiszmy współrzędne tych wektorów w następujący sposób:

$\overrightarrow{w_2}$							1	2	3	4	5	4	3	2	1						
$\overrightarrow{w_3}$					1	3	6	10	15	18	19	18	15	10	6	3	1				
$\overrightarrow{w_4}$			1	4	10	20	35	52	68	80	85	80	68	52	35	20	10	4	1		
$\overrightarrow{w_5}$	1	5	15	35	70	121	185	255	320	365	381	365	320	255	185	121	70	35	15	5	1
$\vdots$											$\dots$										

Zauważmy, że

$$w_{n_1} = w_{n_{4n+1}} = 1 = \frac{1}{0!},$$
$$w_{n_2} = w_{n_{4n}} = n = \frac{n}{1!},$$
$$w_{n_3} = w_{n_{4n-1}} = \frac{n^2+n}{2!},$$
$$w_{n_4} = w_{n_{4n-2}} = \frac{n^3+3n^2+2n}{3!},$$
$$w_{n_5} = w_{n_{4n-3}} = \frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{4!}, \quad \text{dla } n = 1,2,\dots,$$
$$w_{n_6} = w_{n_{4n-4}} = \frac{n^5+10n^4+35n^3+50n^2-96n}{5!}, \quad \text{dla } n = 2,3,\dots.$$

Uwagi końcowe

Sformułowany na początku pracy pozamatematyczny problem stał się punktem wyjścia do formułowania i rozwiązywania probabilistycznego zadania. W tym celu należało przełożyć pozamatematyczny problem na język matematyki, skonstruować stosowny model probabilistyczny, wykonać w nim obliczenia a następnie odpowiednio zinterpretować uzyskane wyniki liczbowe. W tym sensie rozwiązywanie problemów było zarazem ilustracją procesu stosowania matematyki (por. [3], s. 109).

W pracy zaprezentowano pewną drogę poszukiwania rozwiązania zadania prowadzącą od rozważania przypadków szczególnych do uzyskania pewnych ogólnych wyników. Uwagi zebrane na końcu pokazują jak wiele ciekawych problemów pojawiło się w trakcie rozwiązywania zadania. Odkrywanie, formułowanie i dowodzenie własności współrzędnych wektora $\overrightarrow{w_n}$ (punkt 3.) stają się kolejnymi zadaniami matematycznymi powstałymi na bazie rozważanego problemu.

Celem pracy było:

— ukazanie konstrukcji przestrzeni probabilistycznej będącej modelem doświadczenia losowego jako ważnego etapu rozwiązywania zadań z rachunku prawdopodobieństwa,

— ukazanie drogi poszukiwania ogólnego rozwiązania zadania poprzez ustalanie zmiennych, rozwiązywanie najpierw prostszych przypadków a następnie uogólnianie metody postępowania w celu uzyskania ogólnych wyników,
— ukazanie, jak racjonalizować obliczanie prawdopodobieństwa, pomijając uciążliwe (a niekiedy i niewykonalne) rachunki związane z kombinatoryką, przy obliczaniu prawdopodobieństwa w klasycznych przestrzeniach probabilistycznych.

Literatura

[1] Major M., Nawolska. B., *Matematyzacja, dedukcja, rachunki i interpretacja w zadaniach stochastycznych*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1999.

[2] A. Płocki, *Stochastyka 1. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna „in statu nascendi"*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1997.

[3] A. Płocki, *Stochastyka 2. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna, „Zarys dydaktyki"*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1997.

[4] G. Polya *Jak to rozwiązać*, PWN. Warszawa 1964.

Instytut Matematyki
Akademia Pedagogiczna
ul. Podchorążych 2
30-084 Kraków
Poland
E-mail: mmajor@wsp.krakow.pl