Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis

Folia 5 Studia Ad Calculum Probabilitatis Eiusque Didacticam Pertinentia I (2002)

Maciej Major

Własności prawdopodobieństwa błędnie sugerowane przez prawdopodobieństwo klasyczne

Abstract. The test discussed in this paper is a specific set of problems used to asses certain competences in the domain of the probability theory and in the domain of logic. The content of each problem placed in this test verifies a certain probability theorem.

Szczególny typ zadań z rachunku prawdopodobieństwa związanych z organizacją fazy dedukcji, dotyczy weryfikacji twierdzeń odnoszących się do przestrzeni probabilistycznych, a więc formułujących pewne własności tych przestrzeni, w tym przede wszystkim własności prawdopodobieństwa. Mowa tu w istocie o rozstrzyganiu, czy pewne implikacje są prawdziwe. W matematyce tylko takie nazywa się twierdzeniami. W pracy zaliczamy do twierdzeń także implikacje fałszywe, nazywając je „twierdzeniami fałszywymi”. Problem weryfikacji twierdzenia sprowadza się zatem bądź do jego dowodu, bądź do konstrukcji kontrprzykładu. Tych kontrprzykadów należy poszukiwać raczej wśród osobliwych przestrzeni probabilistycznych ziarnistych (a więc zadanych jako pary (Ω, p)), nie będących na ogół modelami takich typowych doświadczeń losowych jak rzuty monetami, rzuty kostkami, czy schematy urnowe.

W pracy prezentuje się zestaw zadań w formie testu jako szczególnej formy kontroli pewnych kompetencji w zakresie rachunku prawdopodobieństwa (których to kompetencji na ogół się nie sprawdza, ani w szkole ani na egzaminach maturalnych, ani na egzaminach na studia[1]), a także kompetencji w zakresie logiki. Zadania, które obejmuje test, kontrolują pewne intuicje związane z pojęciem prawdopodobieństwa, a rozwijane w procesie kształtowania tego pojęcia. Celem testu jest kontrola zdolności organizowania fazy dedukcji. Chodzi tu o sprawdzenie, w jaki sposób dobiera się, bądź konstruuje kontrprzykłady i jak formułuje się wynikające z nich konkluzje. Wszystkie twierdzenia w teście sfor-

[1] Tego typu zadań nie ma w żadnym z aktualnych zbiorów zadań, podręczników, czy też w zestawach zadań maturalnych i egzaminacyjnych na studia wyższe.

mułowane są w postaci implikacji $p \Rightarrow q$. Interesujące jest tu, jak rozumiana jest przez studentów prawdziwość implikacji i jak jest ona weryfikowana.

Zamieszczony poniżej test zaproponowano studentom matematyki na sekcjach nauczycielskich różnych uczelni.

Test z rachunku prawdopodobieństwa

We wszystkich poniższych twierdzeniach mowa jest o przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$. Zweryfikuj te twierdzenia, tj. rozstrzygnij, czy są one prawdziwe, czy nie.

	twierdzenie	tak	nie	jeśli twierdzenie jest fałszywe to to uzasadnij
1.	Jeżeli $P(A) = 0$, to A jest zdarzeniem niemożliwym			
2.	Jeżeli zdarzeniu A sprzyja więcej wyników niż zdarzeniu B, to $P(A) > P(B)$			
3.	Jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$			
4.	Jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$			
5.	Jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to $P(B) = 1 - P(A)$			
6.	Jeżeli zdarzeniu A sprzyja k wyników, a wszystkich możliwych jest s, to $P(A) = \frac{k}{s}$			
7.	Jeżeli $P(A) = P(B)$, to zdarzenia A i B są równoliczne			
8.	Jeżeli $P(A \cup B) = 1$, to zdarzenia A i B są przeciwne			
9.	Jeżeli zdarzenia A i B są przeciwne, to $P(A \cup B) = 1$			
10.	Jeżeli $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, to $A \cap B = \emptyset$.			

Treścią każdego z zadań zamieszczonych w tym teście jest weryfikacja pewnego twierdzenia dotyczącego prawdopodobieństwa. Na każde z pytań należy najpierw odpowiedzieć „tak" lub „nie". Jeśli odpowiedź brzmi „nie" (twierdzenie jest fałszywe), to należy ją uzasadnić, czyli skonstruować stosowny kontrprzykład. Miejsce na wpisanie kontrprzykładu zostało celowo ograniczone (w teście oryginalnym jest to prostokąt o wymiarach 2,5cm × 8cm). Celem tego zabiegu była sugestia, aby nie poszukiwać kontrprzykładów wśród modeli znanych doświadczeń losowych (rzuty kostkami, schematy urnowe[2]), ale aby konstruować je formalnie, bez odniesień do rzeczywistości.

W zestawie prawdziwe są tylko twierdzenia 3. i 9., wszystkie pozostałe są fałszywe.

Niech $\Omega = \{a, b, c\}$. Aby określić przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ wystarczy określić parę (Ω, p), gdzie p jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω (zob. [3], s. 22-23 oraz s. 65-66).

Mamy wówczas $\mathcal{Z} = 2^{\Omega}$ oraz $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} p(\omega)$ dla $A \in \mathcal{Z}$.

Rozkład prawdopodobieństwa p na zbiorze $\{a, b, c\}$ określmy następująco:

$\omega \in \Omega$	a	b	c
$p(\omega)$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$

- Jeśli $A = \{b\}$, to $P(A) = p(b) = 0$ i $A \neq \emptyset$, a więc twierdzenie 1. jest fałszywe.
- Niech $A = \{a, b\}$ i $B = \{c\}$. Jest $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ i $P(A) = p(a) + p(b) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3} < \frac{2}{3} = p(c) = P(B)$, a zatem twierdzenie 2. jest fałszywe.
- Jeśli $A = \{a\}$ i $B = \{c\}$, to $A \cap B = \emptyset$ i $0 = P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3}$, a więc twierdzenie 4. jest fałszywe.
- Jeśli $A = \{a\}$ i $B = \{b\}$, to $A \cap B = \emptyset$ i $P(B) = 0 \neq 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Wynika stąd, że twierdzenie 5. jest również fałszywe.
- Dla zdarzenia $A = \{a, c\}$ jest $\overline{\overline{A}} = 2$ oraz $\overline{\overline{\Omega}} = 3$ i $P(A) = 1 \neq \frac{2}{3} = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$, a zatem twierdzenie 6. jest fałszywe.
- Weźmy $A = \{a, b\}$ i $B = \{a\}$. Jest wówczas $P(A) = P(B)$ i $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}}$, co dowodzi, że twierdzenie 7. jest fałszywe.
- Niech $A = \{a\}$ i $B = \{c\}$. Wtedy $P(A \cup B) = 1$ i zdarzenia A i B nie są przeciwne, bo $A \cup B \neq \Omega$. Nie jest zatem prawdziwe twierdzenie 8.
- Dla $A = \{a, b\}$ i $B = \{b, c\}$ mamy: Jest $P(A \cup B) = P(\{a, b, c\}) = 1$ i $P(A) + P(B) = 1$, a zatem $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ i $A \cap B = \{b\} \neq \emptyset$, co dowodzi, że twierdzenie 10. jest fałszywe.

[2]Opisywanie tych procedur wymaga sporo miejsca.

Kontrprzykłady zostały skonstruowane w kontekście szczególnej przestrzeni probabilistycznej. To, czy jest ona modelem jakiegoś doświadczenia, nie ma tu (bo mieć nie może) żadnego znaczenia. Problem weryfikacji twierdzenia dotyczy bowiem świata matematyki. Rozwiązywanie zadania sprowadza się do organizacji fazy dedukcji.

Wypracowania studentów pokazują, że kontrprzykładów na ogół szuka się wśród modeli probabilistycznych doświadczeń losowych przeprowadzanych za pomocą kostek, monet, czy też urn z kulami (czasem — choć rzadziej — za pomocą ruletek). Tymczasem przykładów, o jakie tu chodzi, raczej nie ma wśród modeli probabilistycznych takich doświadczeń losowych.

Zauważmy, że jeśli do założenia w twierdzeniach: 1., 2., 6., 7. i 10. dodać warunek, że przestrzeń probabilistyczna jest klasyczna, to takie nowe twierdzenia (dotyczą one prawdopodobieństwa klasycznego) są prawdziwe.

Zauważmy, że twierdzenie 8. jest odwrotne do twierdzenia 9. Prawdziwe jest tylko twierdzenie 9. Twierdzenie 10. jest odwrotne do twierdzenia 3. Prawdziwe jest tylko twierdzenie 3. Test ma sprawdzać, czy właściwie rozumiane są relacje między prawdziwością danego twierdzenia i twierdzenia odwrotnego.

Twierdzenia 3. i 4. różnią się tezą. Jedna orzeka o prawdopodobieństwie sumy zdarzeń, druga zaś o prawdopodobieństwie iloczynu zdarzeń. Fakt, że twierdzenie 3. jest prawdziwe, może sugerować że twierdzenie 4. jest również prawdziwe.

Test, o którym tu mowa (bez twierdzenia 10.), zaproponowano do rozwiązania studentom matematyki z trzech uczelni w Polsce oraz studentom matematyki Uniwersytetu w Usti nad Łabą w Czechach. Wszyscy badani studenci byli po kursie licencjackim rachunku prawdopodobieństwa.

Pierwszą badaną grupą (27 osób) byli studenci matematyki WSP w Kielcach. Badania przeprowadzono w marcu 1997 roku. Wszyscy studenci ocenili poprawnie prawdziwość twierdzeń 3. i 9. Tabela 1 prezentuje wyniki badań dotyczące oceny prawdziwości i weryfikacji tylko twierdzeń fałszywych.

Drugą badaną grupę (29 osób) stanowili studenci matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego. Badania przeprowadzono w maju 1998 roku. Wszyscy studenci tej grupy ocenili poprawnie prawdziwość twierdzeń 3. i 9. Tabela 2 prezentuje wyniki badań dotyczące oceny prawdziwości i weryfikacji twierdzeń fałszywych.

Trzecią badaną grupę (74 osoby) stanowili studenci matematyki krakowskiej WSP. Badania przeprowadzono w czerwcu 1998 roku. Studenci rozwiązywali test w trakcie pisemnego egzaminu po kursie licencjackim rachunku prawdopodobieństwa. Wszyscy studenci ocenili poprawnie prawdziwość twierdzeń 3. i 9. Tabela 3 prezentuje wyniki badań dotyczące oceny prawdziwości i weryfikacji twierdzeń fałszywych.

Test rozwiązywało też pięciu studentów matematyki z Uniwersytetu Jana

Ewangelisty Purkynĕ w Usti nad Łabą. Badania przeprowadzono w listopadzie 1998 roku. Czescy studenci także nie mieli trudności z odpowiedzią, że twierdzenia 3. i 9. są prawdziwe. Tabela 4 prezentuje wyniki badań dotyczące twierdzeń fałszywych.

tw.	ocena twierdzenia		uzasadnienie		
	prawdziwe	fałszywe	poprawne	błędne	brak
1	12	15	6	1	8
2	27	–	–	–	–
4	–	27	7	15	5
5	2	25	5	14	6
6	27	–	–	–	–
7	23	3	–	3	–
8	13	13	2	2	9

Tabela 1.

tw.	ocena twierdzenia		uzasadnienie		
	prawdziwe	fałszywe	poprawne	błędne	brak
1	22	7	2	4	1
2	24	5	2	1	2
4	3	26	10	13	3
5	–	29	15	11	4
6	27	2	–	2	–
7	22	7	2	3	2
8	3	26	11	12	3

Tabela 2.

tw.	ocena twierdzenia		uzasadnienie		
	prawdziwe	fałszywe	poprawne	błędne	brak
1	1	73	70	2	1
2	–	74	72	2	–
4	–	74	70	4	–
5	10	64	56	7	1
6	–	74	58	15	1
7	–	74	70	4	–
8	2	72	68	4	–

Tabela 3.

tw.	ocena twierdzenia		uzasadnienie		
	prawdziwe	fałszywe	poprawne	błędne	brak
1	5	–	–	–	–
2	3	2	–	2	–
4	3	2	–	1	1
5	–	5	2	1	1
6	5	–	–	2	–
7	3	2	–	2	–
8	2	3	–	2	–

Tabela 4.

W sumie badaniami objęto 135 studentów matematyki na sekcji nauczycielskiej w latach 1997–1998. Studenci krakowskiej WSP uzyskali znacznie lepsze wyniki niż studenci pozostałych grup. Wyjątek stanowi tu twierdzenie 5., które dziesięciu studentów tej grupy (13% badanych) mylnie uznało za prawdziwe. Większość badanych studentów z pozostałych trzech grup uznało za prawdziwe twierdzenia: 1. (64%), 2. (88%), 6. (97%) i 7. (77%) a więc te, które są fałszywe a zarazem niejako zasugerowane przez własności prawdopodobieństwa klasycznego (tj. twierdzenia prawdziwe przy założeniu, że przestrzeń probabilistyczna jest klasyczna).

Niewielu studentów z grup pierwszej, drugiej i czwartej zauważa, że twierdzenie 1. nie jest prawdziwe. Oto kilka argumentacji dotyczących kontrprzykładów, zacytowanych z wypracowań studentów:

— *Trafienie w punkt konkretny na prostej jest zdarzeniem o prawdopodobieństwie zerowym, ale nie niemożliwym,*

— *Losujemy punkt na płaszczyźnie,* $P(A) = 0$*, ale przecież któryś punkt wylosujemy,*

— *Np.* $\Omega = \mathbb{R}$*, prawdopodobieństwo trafienia w punkt 0 jest zerowe, ale nie jest niemożliwe,*

— *Trafienie w ustalony punkt na tablicy jest możliwe, a prawdopodobieństwo tego zdarzenia wynosi 0.*

W powyższych przykładach wskazywane kontrprzykłady odnoszą się do geometrycznych przestrzeni probabilistycznych ([3], s. 112). Nieprecyzyjność w sformułowaniach wynika z pewnej nieporadności w posługiwaniu się (niełatwym) językiem rachunku prawdopodobieństwa. Sama idea warta jest uznania i poprawnej oceny, świadczy bowiem o właściwych intuicjach związanych z prawdopodobieństwem oraz z prawdopodobieństwem geometrycznym.

Wszyscy badani studenci rozpoznali, że twierdzenia 3 i 9 są prawdziwe. W przypadku twierdzeń 4., 5. i 8., większość odpowiada poprawnie, że twierdzenia te nie są prawdziwe. Pojawiają się tu natomiast kłopoty z poprawnym uzasadnieniem tej decyzji. Tylko nieliczni podają w pełni poprawną argumentację. Odpowiedzi udzielane przez większość studentów pozwalają przypuszczać, że nie w pełni rozumieją oni co to znaczy wykazać, że dane twierdzenie jest fałszywe. Jeśli pojawiają się próby konstrukcji kontrprzykładu, to są one na ogół niepełne.

W wielu pracach zamiast podania kontrprzykładu, prowadzone są pewne rozumowania mające wykazać fałszywość twierdzeń. Np. w kontekście twierdzenia 4. przytaczano następujące stwierdzenia:

— *Brak założenia o niezależności zdarzeń, mamy założenie o rozłączności (tzn. np. wiemy, że* $x \in A \Rightarrow x \notin B$*).*

— *To twierdzenie oznaczałoby, że gdy tylko* $A \cap B = \emptyset$*, to* $P(A) = 0$ *lub* $P(B) = 0$.

— *Jeżeli weźmiemy zdarzenia zależne, to ten wzór nie będzie prawdziwy.*
$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$

— *Wystarczy wziąć* A, B, *takie, że* $A \cap B = \emptyset$, $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$, $0 = P(A) \cdot P(B)$.

Kontrprzykłady dla twierdzeń: 2., 6. i 7., można uzyskać w kontekście nieklasycznej przestrzeni probabilistycznej. W przypadku twierdzenia 1., 8. i 10. chodzi o przestrzeń probabilistyczną (Ω, p), w której funkcja p przyjmuje także wartość 0. Studenci poszukiwali natomiast kontrprzykładów głównie wśród modeli probabilistycznych rzutów monetami i kostkami, a tam takich przykładów nie ma. Nieliczni tylko (o czym już wspomniano) próbowali wykorzystać geometryczną przestrzeń probabilistyczną na prostej (na płaszczyźnie).

Analiza ankiet pozwala wyróżnić następujące typy błędów popełnianych w trakcie rozwiązywania takich specyficznych zadań z rachunku prawdopodobieństwa dotyczących organizacji fazy dedukcji oraz fazy interpretacji (chodzi tu o interpretację „wewnątrz matematyki", por. [2], s. 266-273):

— *błędy natury stochastycznej*: rozpatrywanie zdarzeń „poza przestrzenią probabilistyczną", błędy, które wynikają z jednostronności przykładów, którymi ilustruje się obliczanie prawdopodobieństwa (na ogół narzędziem rachunków bywa twierdzenie klasyczne, niepoprawnie zwane też „definicją klasyczną");

— *błędy natury logicznej*: chodzi o błędy związane z istotą implikacji i jej zaprzeczenia (np. w przypadku twierdzenia 1. jego fałszywość uzasadniana jest m.in. tym, że prawdziwe jest twierdzenie odwrotne, argumentacja oparta jest na błędnym stwierdzeniu, że *twierdzenie odwrotne do prawdziwego nie może być prawdziwe*), w licznych przypadkach odpowiedź nie jest na temat, wskazuje się bowiem dodatkowe założenia, przy których twierdzenie — ale nie jest to już twierdzenie, o które chodziło — jest prawdziwe (w kontekście twierdzenia

4. jeden ze studentów stwierdza: *teza twierdzenia zachodzi o ile te zdarzenia są niezależne*),

Do błędów natury logicznej zaliczyć trzeba nierzadki wniosek typu: *„udowodniłam, że z założenia wynika nie teza"* (zamiast: *„z założenia nie wynika teza"*), formułowany po skonstruowaniu kontrprzykładu. Mowa tu o wnioskowaniach stanowiących pewien element fazy interpretacji „wewnątrz matematyki".

— *błędy natury językowej* wynikające z braku umiejętności formułowania myśli i opisywania prowadzonych konstrukcji w poprawnym języku matematyki,

— *błędy rachunkowe*, głównie natury kombinatorycznej, wynikające z niewłaściwego zliczania wyników (zdarzeń elementarnych) sprzyjających danemu zdarzeniu.

Błędy, o których wyżej mowa, wiążą się z organizacją fazy dedukcji i w pewnym zakresie także fazy interpretacji. Zadania, rozwiązywanie których jest przedmiotem niniejszych rozważań, dotyczą organizacji fazy dedukcji (chodzi o weryfikację twierdzenia) i fazy interpretacji (ta wiąże się z formułowaniem wniosków, jakie wynikają z kontrprzykładu).

Omawiany test pozwolił na rejestrację, statystyczną i jakościową analizę oraz kategoryzację pewnych błędów popełnianych przy formułowaniu własności dowolnej przestrzeni probabilistycznej. Wyniki badań skłaniają do wielu refleksji i inspirują zarazem pytania:

— Czego rezultatem mogą być te powszechne błędy przy formułowaniu wniosków na temat przestrzeni probabilistycznych (w tym więc także na temat prawdopodobieństwa) bez głębszego zastanowienia, bez rachunków i dedukcji?

— Poprzez jakie zabiegi na zajęciach ze studentami eliminować te błędy?

Gdy chodzi o powszechne przypisywanie każdej przestrzeni probabilistycznej tych własności, które posiada przestrzeń klasyczna, można postawić hipotezę, że przyczyny tego błędu tkwią w nadmiernym, a czasami wyłącznym odwoływaniu się na zajęciach z rachunku prawdopodobieństwa do klasycznych przestrzeni probabilistycznych. „Fetysz" klasycznych przestrzeni probabilistycznych w nauczaniu rachunku prawdopodobieństwa jest pewną nieprawidłowością w procesie nauczania tej dziedziny matematyki (por. [4], s. 288-289).

Ujawnianie i identyfikacja charakteru oraz przyczyn błędów we wnioskowaniach stochastycznych, jakie popełniają nasi studenci, ale także kandydaci na studia matematyczne, oraz propozycje zabiegów dydaktycznych pozwalających usuwać te błędy, jest dziś ważnym zagadnienia dydaktyki stochastyki.

Literatura

[1] M. Major, *Kontrola i ocena stochastycznej wiedzy studentów nauczycielskich kierunków matematycznych*, Dydaktyka Matematyki 22, Kraków 2000.

[2] M. Major, B. Nawolska, *Matematyzacja, dedukcja, rachunki i interpretacja w zadaniach stochastycznych*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1999.

[3] A. Płocki, *Stochastyka 1. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna „in statu nascendi"*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1997.

[4] A. Płocki, *Stochastyka 2. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Zarys dydaktyki*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1997.

Instytut Matematyki
Akademia Pedagogiczna
ul. Podchorążych 2
30-084 Kraków
Poland
E-mail: mmajor@wsp.krakow.pl