Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis

Folia 5 Studia Ad Calculum Probabilitatis Eiusque Didacticam Pertinentia I (2002)

Barbara Nawolska

Wartość oczekiwana czasu trwania pewnych doświadczeń losowych o losowej liczbie etapów

Abstract. This paper presents new ways of calculating the expected valves of certain random variables in countable probabilistic spaces. These methods are based on the interpretation of the duration of these random experiment of a random amount of stages as the time sport wandering on the stochastic graph.

1. Wstęp

W pracy zaprezentowano pewne metody obliczania wartości oczekiwanej zmiennej losowej, która jest czasem trwania jednorodnego łańcucha Markowa o niepustym zbiorze stanów pochłaniających. Chodzi tym samym o zmienną losową w przeliczalnej przestrzeni probabilistycznej. Metody, o których mowa, są oparte na interpretacji czasu trwania doświadczeń losowych o losowej liczbie etapów jako czasu błądzenia po grafie stochastycznym. Dzięki tej interpretacji do obliczania wartości oczekiwanej wykorzystuje się pewne procedury związane z grafem stochastycznym. Do tych pocedur należą: „sklejanie" i „rozklejanie węzłów grafu" oraz rozbicie grafu na podgrafy (co pozwala efektywnie wykorzystywać w rachunkach addytywność wartości oczekiwanej).

2. Czekanie na jedną lub na jedną z dwu serii orłów i reszek jako doświadczenie losowe o losowej liczbie etapów

Niech $\Omega = \{o, r\}$ i $p(o) = p(r) = \frac{1}{2}$. Para (Ω, p) jest przestrzenią probabilistyczną (por. [8], s. 22), którą w pracy uznajemy za model probabilistyczny (zob. [8], s. 24) rzutu monetą. Element o zbioru Ω oznacza wynik: `wypadnie orzeł`, element r – wynik: `wypadnie reszka`.

Wynik n-krotnego rzutu monetą kodujemy ciągiem wyników kolejnych etapów, a więc n-wyrazową wariacją zbioru $\{o, r\}$. Parę (Ω_n, p_n), gdzie $\Omega_n = \{o, r\}^n$ i $p_n(\omega) = (\frac{1}{2})^n$ dla każdego $\omega \in \Omega_n$, uznajemy za model probabilistyczny n-krotnego rzutu monetą.

• Wynik m-krotnego rzutu monetą, a więc m-wyrazową wariację zbioru $\{o, r\}$ nazywamy *serią orłów i reszek o długości m*.
• Niech a będzie ustaloną serią orłów i reszek o długości m. Powtarzanie rzutu monetą tak długo, aż wyniki m ostatnich rzutów utworzą serię a, nazywamy *czekaniem na serię a* i oznaczamy przez d_a.

Czekanie na serię a jest doświadczeniem losowym o losowej liczbie etapów. Wynik doświadczenia losowego d_a (jako tzw. zdarzenie elementarne) jest ciągiem o wyrazach ze zbioru $\{o, r\}$, co najmniej m-wyrazowym i takim, że podciąg m kolejnych końcowych wyrazów tworzy serię a i żaden podciąg m kolejnych wcześniejszych wyrazów nie tworzy serii a. Oznaczmy przez Ω_a zbiór wszystkich wyników czekania na serię a. Dla $\omega \in \Omega_a$, symbolem $|\omega|$ oznaczamy długość ciągu ω, tj. liczbę jego wyrazów.

Niech $p_a(\omega) = (\frac{1}{2})^{|\omega|}$ dla $\omega \in \Omega_a$. Tak określona funkcja p_a
— jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω_a, a zatem para (Ω_a, p_a) jest przestrzenią probabilistyczną,
— przypisuje wynikowi doświadczenia losowego d_a prawdopodobieństwo, z jakim doświadczenie może się zakończyć tym wynikiem[1].

Przestrzeń probabilistyczna (Ω_a, p_a) jest modelem probabilistycznym doświadczenia losowego d_a.

Niech a i b będą seriami orłów i reszek oraz $|a| = m$, $|b| = k$ i $m < k$. Mówimy, że *seria a zawiera się w serii b* jeśli ciąg a jest zarazem podciągiem m kolejnych wyrazów w ciągu b.

Niech a będzie serią orłów i reszek o długości m. Jeżeli $k < m$, to:
— podciąg k kolejnych początkowych wyrazów serii a nazywamy *początkiem o długości k* tej serii,
— podciąg $m - k$ kolejnych końcowych wyrazów serii a nazywamy *końcówką o długości m − k* tej serii.

• Załóżmy, że a i b są seriami orłów i reszek takimi, że $|a| = m$ oraz $|b| = k$. Jeżeli $m \neq k$, to załóżmy, że seria krótsza nie zawiera się w serii dłuższej. Powtarzanie rzutu monetą tak długo aż:
— albo wyniki m ostatnich rzutów utworzą serię a,
— albo wyniki k ostatnich rzutów utworzą serię b,
nazywamy *czekaniem na jedną z dwu serii a i b* i oznaczmy przez d_{a-b}.

Niech Ω_{a-b} będzie zbiorem ciągów o wyrazach ze zbioru $\{o, r\}$, co najmniej l-wyrazowych, gdzie $l = \min\{m, k\}$ i takich, że albo końcówka o długości m tworzy serię a, albo końcówka o długości k tworzy serię b i żaden podciąg m kolejnych wyrazów wcześniejszych nie tworzy serii a i żaden podciąg k kolejnych wcześniejszych wyrazów nie tworzy serii b. Jest więc Ω_{a-b} zbiorem wyników (zdarzeń elementarnych) doświadczenia losowego d_{a-b}. Określmy na zbiorze

[1] Wynika to z faktu, że jeśli $|\omega| = n$, to ω jest jednym spośród 2^n możliwych i jednakowo prawdopodobnych wyników n-krotnego rzutu monetą, a więc jego prawdopodobieństwo wynosi $(\frac{1}{2})^n$.

Ω_{a-b} następująco funkcję p_{a-b}:

$$p_{a-b}(\omega) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|\omega|} \quad \text{dla } \omega \in \Omega_{a-b}.$$

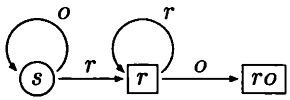
Para (Ω_{a-b}, p_{a-b}) jest przestrzenią probabilistyczną. Jest ona modelem doświadczenia losowego d_{a-b}.

W analogiczny sposób określamy czekanie na jedną z s ustalonych serii orłów i reszek oraz model probabilistyczny tego czekania.

3. Graf stochastyczny i indukowana przezeń przestrzeń probabilistyczna

Czekanie na jedną, bądź na jedną z wielu serii orłów i reszek jest jednorodnym łańcuchem Markowa o niepustym zbiorze stanów pochłaniających (por. [8], s. 318-339). Każdy taki jednorodny łańcuch Markowa ma swój graf stochastyczny (por. [4], s. 86-88, chodzi tu o tzw. graf Engla). Ten graf jest zarazem prezentacją wspomnianego łańcucha na gruncie teorii grafów.

Doświadczenie losowe d_{ro}, tj. powtarzanie rzutu monetą tak długo, aż po reszce wypadnie orzeł, jest jednorodnym łańcuchem Markowa. Jego graf stochastyczny przedstawia rysunek 1.



Rysunek 1.

Węzły grafu prezentują stany czekania, tj. ciągi już uzyskanych orłów i reszek, jako początki serii. Etykiety tych węzłów umieszczone są w prostokątach. Każdej krawędzi przypisany jest wynik rzutu monetą (na ogół w miejsce tych wyników wpisuje się ich prawdopodobieństwa).

Interpretujmy przebieg czekania na serię orłów i reszek jako błądzenie losowe po grafie stochastycznym tego czekania. Zanim rozpocznie się czekanie postawmy pionek w węźle startowym ⓢ na grafie stochastycznym. Powtarzajmy teraz rzut monetą i po każdym rzucie przesuwajmy pionek wzdłuż krawędzi, której odpowiada uzyskany wynik rzutu. Doświadczenie losowe kończy się wraz z dotarciem błądzącego pionka na brzeg grafu. Węzły brzegowe grafu nazywajmy *metami*. W przypadku doświadczenia d_{ro}, błądzenie (a więc również czekanie na serię *ro*) kończy się po dotarciu pionka do mety $\boxed{ro}$.

Niech a i b będą ustalonymi seriami orłów i reszek, d_a (d_{a-b}) zaś czekaniem na serię a (czekaniem na jedną z serii a i b). Przez Ω_a^* (Ω_{a-b}^*) oznaczmy zbiór wszystkich tras[2] na grafie stochastycznym doświadczenia d_a (doświadcze-

[2]Por. [4], s. 14.

nia d_{a-b}). Przypiszmy każdej trasie na grafie liczbę $(\frac{1}{2})^n$, gdzie n jest długością trasy, tj. liczbą jej krawędzi. Taki iloczyn nazywamy *wagą trasy* (por. [4], s. 61-63).

Niech p_a^* (analogicznie p_{a-b}^*) oznacza funkcję, która każdej trasie na grafie doświadczenia d_a (dowiadczenia d_{a-b}) przypisuje jej wagę. Para (Ω_a^*, p_a^*) (para $(\Omega_{a-b}^*, p_{a-b}^*)$) jest przestrzenią probabilistyczną, którą nazywamy *przestrzenią probabilistyczną indukowaną przez graf stochastyczny.*

Każdemu wynikowi doświadczenia d_{ro} odpowiada na grafie z rys. 1 dokładnie jedna trasa i każda trasa na grafie odpowiada dokładnie jednemu wynikowi doświadczenia. Istnieje bijekcja ze zbioru Ω_{ro} wyników doświadczenia d_{ro} na zbiór Ω_{ro}^* tras na grafie stochastycznym z rys. 1, zachowująca prawdopodobieństwo.

Przestrzenie probabilistyczne (Ω_{ro}, p_{ro}) i $(\Omega_{ro}^*, p_{ro}^*)$, a także ogólnie: przestrzenie (Ω_a, p_a) i (Ω_a^*, p_a^*) oraz przestrzenie (Ω_{a-b}, p_{a-b}) i $(\Omega_{a-b}^*, p_{a-b}^*)$ są izomorficzne.

4. Czas trwania doświadczenia jako zmienna losowa

Niech a będzie serią orłów i reszek o długości m. Doświadczenie losowe d_a, tj. czekanie na serię a, przebiega etapami. Liczbę jego etapów, tj. liczbę wykonanych rzutów monetą w doświadczeniu losowym d_a, nazywamy *czasem czekania na serię a*. Jeśli o tej liczbie mówić przed doświadczeniem, to jest ona zmienną losową T_a w przestrzeni probabilistycznej (Ω_a, p_a). Zbiór $T_a(\Omega_a)$ jej wartości jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych, bo

$$T_a(\Omega_a) = \{|a|, |a|+1, |a|+2, \ldots\} = \{m, m+1, m+2, \ldots\}.$$

Niech $\{T_a = n\} = \{\omega \in \Omega_a \colon T_a(\omega) = n\}$. Zbiór $\{T_a = n\}$ jest zdarzeniem w przestrzeni probabilistycznej (Ω_a, p_a). Jego prawdopodobieństwo oznaczamy przez $P(T_a = n)$. Funkcja p_{T_a} ze zbioru $T_a(\Omega_a)$ w zbiór liczb rzeczywistych określona wzorem

$$p_{T_a}(n) = \sum_{T_a(\omega)=n} p(\omega) \quad \text{dla } n = m, m+1, m+2, \ldots,$$

jest rozkładem zmiennej losowej T_a. Jest $p_{T_a}(n) = P(T_a = n)$.

Szereg

$$\sum_{n=m}^{\infty} n \cdot p_{T_a}(n)$$

jest zbieżny (i to bezwzględnie). Suma tego szeregu jest wartością oczekiwaną zmiennej losowej T_a, tj. średnim czasem czekania na serię a. Ten średni czas oznaczamy przez $E(T_a)$. Znajdowanie sumy wspomnianego szeregu na gruncie analizy matematycznej jest na ogół uciążliwe a w wielu przypadkach wręcz niemożliwe. Wynika to z faktu, że nie jest znany ciąg $(n \cdot p_{T_a}(n))$ (rozkład zmiennej losowej T_a w wielu przypadkach nie jest znany). Do znajdowania sum tego typu szeregów wykorzystuje się tzw. *algorytm średniego czasu błądzenia po grafie stochastycznym* (zob. [8], s. 305-306). Niniejsza praca zawiera propozycje innych, elementarnych i raczej nieznanych, środków znajdowania sum takich szeregów z wykorzystaniem grafu stochastycznego i addytywności wartości oczekiwanej.

Analogicznie wprowadzamy czas trwania doświadczenia losowego d_{a-b} jako zmienną losową T_{a-b}.

5. Średni czas czekania na serie orów i reszek jako wartość oczekiwana sumy zmiennych losowych

W dalszej części pracy będziemy korzystać ze wzoru na wartość oczekiwaną czasu oczekiwania na pierwszy sukces.

Załóżmy, że $\Omega = \{0, 1\}$, $p(1) = u > 0$ i $p(0) = 1 - u > 0$, gdzie u jest ustaloną liczbą rzeczywistą $(0 < u < 1)$. Każde doświadczenie losowe, którego modelem jest powyższa przestrzeń probabilistyczna (Ω, p) nazywamy *próbą* i oznaczamy przez d_{0-1}^u (por. [8], s. 237). Wynik zakodowany cyfrą 1 nazywamy *sukcesem*, wynik zakodowany cyfrą 0 – *porażką*. Liczba u jest *prawdopodobieństwem sukcesu.*

Powtarzanie próby d_{0-1}^u tak długo, aż zakończy się sukcesem, jest doświadczeniem losowym, które nazywamy *oczekiwaniem na pierwszy sukces* i oznaczamy przez d_1^u. Przez ω_j oznaczmy wynik: `sukces pojawi się po raz pierwszy w j-tej próbie`, $j = 1, 2, 3, \ldots$. Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ oraz $p(\omega_j) = u \cdot (1-u)^{j-1}$ dla $\omega_j \in \Omega$. Para (Ω, p) jest przestrzenią probabilistyczną, którą uznajemy za model doświadczenia d_1^u.

Dalej zakładamy, że kolejne etapy doświadczenia przebiegającego etapami są przeprowadzane w kolejnych jednostkach czasu. Liczba etapów staje się przy tej umowie czasem trwania doświadczenia losowego.

Przez T oznaczmy czas trwania doświadczenia d_1^u. W przestrzeni probabilistycznej (Ω, p) jest T zmienną losową określoną wzorem

$$T(\omega_j) = j \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, 3, \ldots.$$

Przestrzeń probabilistyczną generowaną przez zmienną losową T (por. [8], s. 210) prezentuje tabela 1.

$n \in \Omega_T$	1	2	3	4	$\ldots$	n	$\ldots$
$p_T(n)$	u	$u(1-u)$	$u(1-u)^2$	$u(1-u)^3$	$\ldots$	$u(1-u)^{n-1}$	$\ldots$

Tabela 1.

Wartość oczekiwana zmiennej losowej T jest sumą szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p_T(n),$$

tj. sumą

$$1 \cdot u + 2 \cdot u(1-u) + 3 \cdot u(1-u)^2 + 4 \cdot u(1-u)^3 + \cdots + n \cdot u(1-u)^{n-1} + \cdots,$$

a więc sumą

$$\begin{aligned}
&u\left(1 + 2(1-u) + 3(1-u)^2 + 4(1-u)^3 + \cdots\right)\\
&= u \cdot \left(\begin{array}{l}
1 + (1-u) + (1-u)^2 + (1-u)^3 + \cdots\\
 + (1-u) + (1-u)^2 + (1-u)^3 + \cdots\\
 + (1-u)^2 + (1-u)^3 + \cdots\\
 + (1-u)^3 + \cdots\\
 \cdots
\end{array}\right)\\
&= 1 + (1-u) + (1-u)^2 + (1-u)^3 + \cdots\\
&= \frac{1}{u}.
\end{aligned}$$

Sens powyższego zapisu jest łatwy do odczytania. Średni czas oczekiwania na pierwszy sukces jest zatem równy $\frac{1}{u}$, gdzie u jest prawdopodobieństwem tego sukcesu.

Czas czekania na serię albo na jedną z wielu serii orłów i reszek – dzięki interpretacji tego czekania jako błądzenia po grafie stochastycznym – można przedstawić jako sumę czasów trwania pewnych etapów tego doświadczenia. Jeżeli czekanie daje się rozbić na etapy, to czas czekania jest sumą czasów trwania tych etapów. Jeśli średnie czasy trwania tych etapów są znane, to można, korzystając z addytywności wartości oczekiwanej, znaleźć średni czas trwania całego doświadczenia.

• Rozważmy doświadczenie d_r, tj. czekanie na reszkę. Zmienna losowa T_r jest czasem tego czekania. Doświadczenie d_r jest jednocześnie oczekiwaniem na pierwszy sukces o prawdopodobieństwie sukcesu $u = \frac{1}{2}$, a więc $E(T_r) = 2$.

Analogicznie, jeśli T_o oznacza czas oczekiwania na orła, to $E(T_o) = 2$.

• Rozważmy czekanie na serię *ro*. Niech T_{ro} będzie czasem trwania tego doświadczenia, odmierzanym liczbą wykonanych rzutów monetą. Znajdźmy średni czas trwania doświadczenia d_{ro} korzystając z grafu stochastycznego tego czekania (por. rys. 1).

Grupując wyniki doświadczenia d_{ro} pod kątem ich długości, zbiór Ω_{ro}

przedstawmy następująco:

$$\Omega_{ro} = \left\{ \begin{array}{rrrrr} ro, & oro, & ooro, & oooro, & ooooro, \\ & rro, & orro, & oorro, & ooorro, \\ & & rrro, & orrro, & oorrro, \; \dots \\ & & & rrrro, & orrrro, \\ & & & & rrrrro, \end{array} \right\}$$

Wartości zmiennej losowej T_{ro} tworzą zbiór

$$T_{ro}(\Omega_{ro}) = \Omega_{T_{ro}} = \{2, 3, 4, 5, 6, \dots\}.$$

Rozkład zmiennej T_{ro} jest funkcją

$$p_{T_{ro}}(n) = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{dla} \quad n = 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

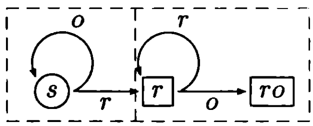
Wartość oczekiwana $E(T_{ro})$ jest więc sumą szeregu:

$$2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 5 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 6 \cdot 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots,$$

czyli

$$E(T_{ro}) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Czas czekania na serię ro, tj. czas trwania doświadczenia losowego d_{ro}, jest czasem błądzenia po grafie z rysunku 1. Ten graf stochastyczny można rozbić na dwa podgrafy (por. rys. 2).



Rysunek 2.

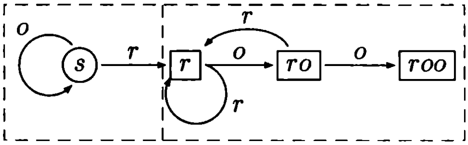
Pierwszy (lewy) podgraf grafu z rys. 2 jest grafem dla oczekiwania na reszkę, drugi jest grafem dla oczekiwania na orła. Czas czekania na serię ro został w ten sposób przedstawiony jako suma czasu oczekiwania na reszkę (zmienna losowa T_r) i czasu oczekiwania na orła (zmienna losowa T_o)). Jest więc $T_{ro} = T_r + T_o$. Z addytywności wartości oczekiwanej wynika, że

$$E(T_{ro}) = E(T_r + T_o) = E(T_r) + E(T_o) = 2 + 2 = 4.$$

Zauważmy, że tym samym na gruncie rachunku prawdopodobieństwa znaleźliśmy sumę pewnego szergu liczbowego. Jest $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^n = 4$.

• Wyznaczenie średniego czasu trwania doświadczenia d_{roo} z definicji wartości oczekiwanej wymaga obliczenia sumy skomplikowanego szeregu.

Wydaje się, że przebieg tego doświadczenia daje się wprost podzielić na trzy etapy: oczekiwanie na reszkę, następnie oczekiwanie na orła po uzyskaniu reszki i oczekiwanie na orła gdy już został uzyskany orzeł po reszce. Taki podział prowadzi do równości: $T_{roo} = T_r + T_o + T_o$, z której wynika równość: $E(T_{roo}) = E(T_r) + E(T_o) + E(T_o) = 2 + 2 + 2 = 6$. Analiza grafu z rysunku 3 pozwala zauważyć, że ostatnie rozumowanie jest błędne.



Rysunek 3.

Graf stochastyczny czekania na serię *roo* daje się podzielić na dwa podgrafy wyróżnione na rysunku 3 przerywanymi liniami. Czas czekania na serię *roo* jest sumą

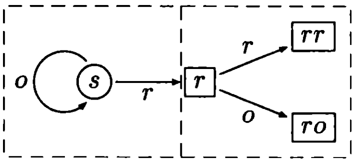
— czasu oczekiwania na reszkę i

— czasu czekania (odmierzanego po uzyskaniu pierwszej reszki) na dwa orły pod rząd, czyli na serię *oo*.

Można wykazać (np. korzystając z algorytmu średniego czasu błądzenia po grafie stochastycznym, zob. [8], s. 305-306), że $E(T_{oo}) = 6$. Mamy więc

$$E(T_{roo}) = E(T_r) + E(T_{oo}) = 2 + 6 = 8.$$

• Zajmijmy się średnim czasem czekania na jedną z dwu serii orłów i reszek: *ro* i *rr*, czyli średnim czasem trwania doświadczenia d_{ro-rr}. Chodzi o wartość oczekiwaną zmiennej losowej T_{ro-rr}. Znajdziemy ją korzystając z grafu stochastycznego z rys. 4 oraz idei jego rozbicia na podgrafy i z addytywności wartości oczekiwanej.

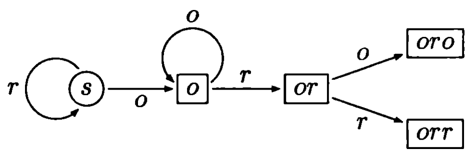


Rysunek 4.

Pierwszy (lewy) podgraf grafu wyróżniony na rys. 4 odpowiada oczekiwaniu na reszkę, drugi podgraf odpowiada pojedynczemu rzutowi monetą, który kończy doświadczenie. Jest więc

$$E(T_{ro-rr}) = E(T_r + 1) = E(T_r) + 1 = 2 + 1 = 3.$$

• Wykorzystując powyższą ideę wyznaczania średniego czasu oczekiwania na jedną z dwóch serii orłów i reszek można łatwo znaleźć $E(T_{oro-orr})$.

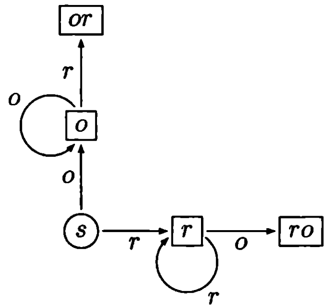


Rysunek 5.

Z rysunku 5 wynika, że $T_{oro-orr} = T_o + T_r + 1$. Z ostatniej równości oraz z addytywności wartości oczekiwanej wynika, że

$$E(T_{oro-orr}) = E(T_o + T_r + 1) = E(T_o) + E(T_r) + 1 = 2 + 2 + 1 = 5.$$

• Rysunek 6 prezentuje graf stochastyczny doświadczenia d_{or-ro}. Z grafu odczytujemy, że pierwszy rzut prowadzi do wnętrza grafu (średni czas tego etapu wynosi 1), a po pierwszym rzucie czeka się albo na reszkę, albo na orła. Średni czas czekania na każdy z tych wyników pojedynczego rzutu jest równy 2. Średni czas czekania na jedną z serii *or* i *ro* jest więc równy 1+2. Mamy więc $E(T_{or-ro}) = 3$.

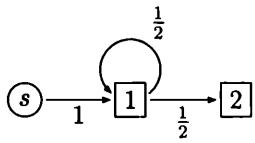


Rysunek 6.

Jeśli interesuje nas jedynie czas trwania doświadczenia d_{or-ro} (nie jest ważne, która z serii zostaje uzyskana), to przebieg doświadczenia prezentuje graf z rys. 7. Ten graf powstaje przez „sklejenie" węzłów $\boxed{o}$ i $\boxed{r}$ w jeden węzeł z etykietą $\boxed{1}$ oraz „sklejenie" obu met $\boxed{or}$ i $\boxed{ro}$ w jeden węzeł z etykietą $\boxed{2}$. Ta idea ***sklejania węzłów na grafie stochastycznym*** została opisana szczegółowo w monografii [4] (s. 287-293).

Przejście z węzła ⓢ do węzła $\boxed{1}$ odpowiada pojedynczemu rzutowi monetą. Dotarcie do węzła $\boxed{2}$ oznacza, że została uzyskana któraś z serii *or* albo *ro*.

Graf 7 można podzielić na dwa podgrafy. Czas błądzenia po pierwszym podgrafie wynosi 1 (odpowiada on pojedynczemu rzutowi monetą). Drugi podgraf prezentuje oczekiwanie na pierwszy sukces (czekanie na orła, jeśli w pierwszym rzucie wypadła reszka albo czekanie na reszkę, jeśli w pierwszym rzucie wypadł orzeł). Średni czas błądzenia po tym podgrafie wynosi 2. Średni czas trwania doświadczenia d_{or-ro} jest zatem sumą $1+2$, czyli jest równy 3.



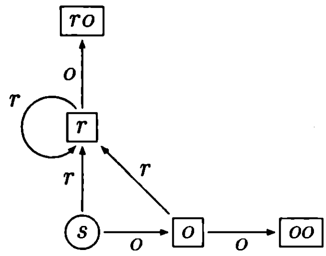
Rysunek 7.

Zauważmy, że opisane doświadczenie jest schematem kolekcjonera (por. [8], s. 272), kolekcję stanowią tu oba wyniki rzutu monetą.

• Rozważmy zmienną losową T_{oo-ro}, tj. czas trwania doświadczenia losowego d_{oo-ro}. Jest to zarazem czas błądzenia losowego po grafie z rys. 8. Niezależnie od wyniku pierwszego rzutu, dalszy ciąg doświadczenia d_{oo-ro} jest oczekiwaniem na orła, a zatem

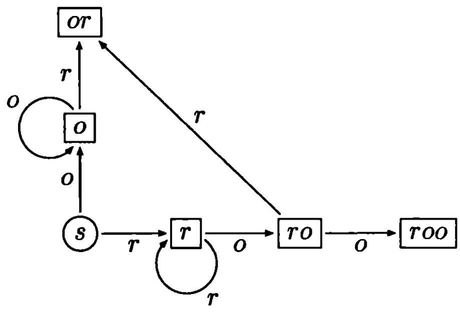
$$E(T_{oo-ro}) = E(1+T_o) = 1 + E(T_o) = 1+2 = 3.$$

Jeśli interesuje nas tylko czas trwania doświadczenia d_{oo-ro}, to doświadczenie d_{oo-ro} opisuje graf stochastyczny z rys. 7. Graf ten wyjaśnia jednocześnie istotę ostatniego rozumowania.



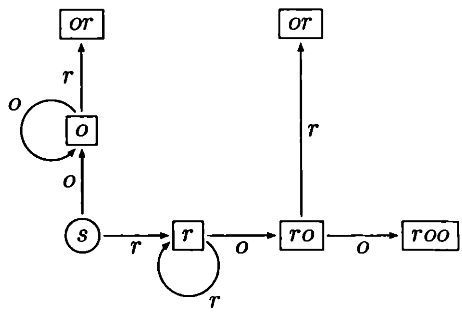
Rysunek 8.

• T_{or-roo} jest czasem trwania doświadczenia d_{or-roo}. Jest to zarazem czas błądzenia po grafie z rys. 9. Średni czas błądzenia z węzła (s) przez węzeł $\boxed{r}$ wynosi 4. Na taki przebieg błądzenia składa się wyrzucenie reszki w jednym rzucie, oczekiwanie na wyrzucenie orła i pojedynczy rzut monetą kończący doświadczenie (zob. rys. 9). Średni czas błądzenia z węzła (s) przez węzeł $\boxed{o}$ jest równy 3. Na taki przebieg błądzenia składa się wypadnięcie orła w jednym rzucie i oczekiwanie na wypadnięcie reszki.



Rysunek 9.

Ostatnie fakty łatwiej dostrzec, jeśli przebieg doświadczenia d_{or-roo} interpretujemy jako błądzenie losowe po grafie stochastycznym z rysunku 10. Powstał on z grafu z rysunku 9 przez „rozklejenie" mety $\boxed{or}$ na dwie mety o identycznej etykiecie.

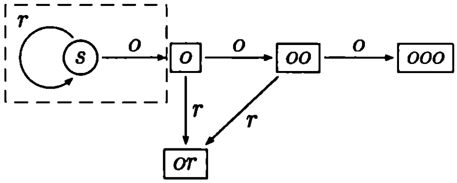


Rysunek 10.

Przestrzenie probabilistyczne indukowane przez oba grafy stochastyczne są izomorficzne. Takie „rozmnożenie" met nie wpływa więc ani na prawdopodobieństwa dotarcia do poszczególnych met ani na średni czas błądzenia po grafie, pozwala natomiast wyodrębnić na grafie (rys. 10) dwa podgrafy. Jeżeli w pierwszym rzucie wypadnie orzeł, błądzenie rozpoczyna się po podgrafie skierowanym na rys. 10 ku górze. Średni czas tego błądzenia jest równy 3. Jeśli w pierwszym rzucie wypadnie reszka, to błądzenie rozpoczyna się po podgrafie skierowanym na prawo. Średni czas błądzenia po tym podgrafie wynosi 4. Jest $p(o) = p(r) = \frac{1}{2}$, a więc średni czas błądzenia po grafie wynosi $\frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 3\frac{1}{2}$.

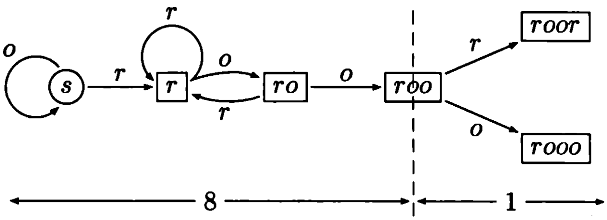
• Zmienna losowa T_{ooo-or} jako czas trwania doświadczenia d_{ooo-or}, jest zarazem czasem błądzenia po grafie z rys. 11. Pierwszy etap doświadczenia d_{ooo-or} jest oczekiwaniem na orła (średni czas tego etapu wynosi 2). Czas błądzenia z węzła $\boxed{o}$ jest zmienną losową, która przyjmuje tylko wartości 1 lub 2, każdą z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Średni czas trwania tego etapu jest zatem sumą $1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2}$, czyli jest równy $\frac{3}{2}$. Jest więc ostatecznie

$$E(T_{ooo-or}) = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}.$$



Rysunek 11.

• Wykazaliśmy, że średni czas czekania na serię *roo* wynosi 8. Korzystając z tego faktu oraz prezentowanej tu idei obliczania średniego czasu błądzenia po grafie stochastycznym, można znaleźć średni czas trwania doświadczenia $d_{rooo-roor}$. Rozwiązanie prezentuje rysunek 12.



Rysunek 12.

W przytoczonych wyżej argumentacjach graf stochastyczny jawi się jako prosty środek rozumowania, w tym także jako środek sugerujący pewne idee organizacji fazy rachunków w przeliczalnych przestrzeniach probabilistycznych.

Literatura

[1] János A. Csirik, *Optimal strategy for the first player in the Penney ante game*, Combinatorics, Probability and Computing 1 (1992).

[2] A. Engel, *Abak probabilistyczny*, Matematyka 3 (1976).

[3] A. Engel, *Stochastik*, Ernst Klett Verlage, Stuttgart 1987.

[4] M. Major, B. Nawolska, *Matematyzacja, rachunki, dedukcja i interpretacja w zadaniach stochastycznych*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1999.

[5] M. Major, B. Nawolska, *Gry Penneya i wartość oczekiwana*, Matematyka 1 (1999).

[6] B. Nawolska, *Kształcenie stochastyczne i rozwijanie aktywności matematycznych przez analizę błędów i naiwnych intuicji*, Dydaktyka Matematyki 22, Kraków 2000.

[7] B. Nawolska, A. Płocki, *Problemy i paradoksy rachunku prawdopodobieństwa związane z grami Penneya*, Gradient 1 (2000).

[8] A. Płocki, *Stochastyka 1. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna in statu nascendi*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Kraków 1997.

[9] A. Płocki, *Stochastyka 2. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Zarys dydaktyki*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1997.

Katedra Pedagogiki Przedszkolnej i Szkolnej
Akademia Pedagogiczna
ul. Ingardena 4
PL 30-060 Kraków
Poland
E-mail: bnawol@wsp.krakow.pl