

Adam Płocki

## Symetrie a proces matematyzacji, rachunki i dedukcja w rachunku prawdopodobieństwa

**Abstract.** This paper deals with symmetry as a specific mathematical means (constructing probabilistic models of certain statistical experiments) and device in the organisation of the calculation phase of a solution and deduction in the process of solving problems in the probability theory. In this paper certain means of discovering and justifying stochastic symmetry are presented. Symmetry is presented as a device used to calculate the probability and expected value of random variables in discrete probability spaces.

*„Symetria, czy się ją określi w sposób mniej czy bardziej szeroki, jest ideą, za pomocą której człowiek starał się przez wszystkie czasy ogarniać myślą i tworzyć porządek, piękno, doskonałość” ([31], s. 11).*

*„Idea symetrii może być traktowana jako swoiste źródło interdyscyplinarnych poszukiwań jedności przyrody” ([12], s. 7).*

### 1. Wprowadzenie

Symetrie kojarzymy w zasadzie z obiektami geometrycznymi. Niniejsze rozważania są próbą ogólniejszego spojrzenia na symetrie jako zagadnienie matematyczne i dotyczą symetrii towarzyszących procesowi konstruowania i badania przestrzeni probabilistycznych. Podstawą symetrii jest w pracy niezmienniczość względem pewnych przekształceń. Są nimi:

- zamiana białej kuli w urnie na czarną, a czarnej na białą (przebarwianie kul),
- zamiana kuli o numerze  $j$  w urnie  $U_s$  o  $s$  kulach ponumerowanych na kulę o numerze  $s - j + 1$  dla  $j = 1, 2, 3, \dots, s$  (przenumerowywanie kul),
- zamiana na każdej kostce ścianki z  $j$  oczkami na ściankę z  $7 - j$  oczkami (odwracanie kostek),
- zamiana orła na reszkę i reszki na orła w przypadku rzutu monetą,
- zamiana rolami dwu wyników próby Bernoulliego (zamiana porażki na sukces i sukcesu na porażkę).

Praca składa się z dwu części. Pierwsza dotyczy symetrii jako specyficznego środka obliczania prawdopodobieństwa zdarzenia w dyskretnych przestrzeniach probabilistycznych. W części drugiej ukazano symetrie jako narzędzie:

- rozstrzygania, że pewne zmienne losowe mają identyczne rozkłady oraz
- znajdowania wartości oczekiwanej zmiennej losowej, której rozkładu nie znamy (symetrie rozkładu zmiennej losowej jako specyficzna jego własność, pozwalają znajdować wartość oczekiwaną z pominięciem definicji).

Symetrie, które pojawiają się we wnioskowaniach stochastycznych, mają (w odróżnieniu od symetrii w geometrii) naturę abstrakcyjną. W pracy ukazują się środki, dzięki którym te symetrie stają się „widzialne” (por. [15]). Mowa tu

- o pewnych środkach wizualizacji stochastycznych symetrii,
- o ujawnianiu ich istoty poprzez ich przekład na język geometrii, a więc
- o pewnej ideograficznej konkretyzacji tych symetrii.

## 2. Symetrie w matematyce, fizyce i naukach przyrodniczych

W geometrii od dawna wykorzystywano występowanie różnych rodzajów symetrii (obrotu i odbicia). W starożytności symetria była utożsamiana z pięknem geometrycznych proporcji i regularnością kształtów. Klasyczne opracowania dotyczyły symetrii ornamentów, fryzów, waz. Tak rozumianą symetrię określamy dziś jako *symetrię zewnętrzną, wizualną*. Dopiero w XIX wieku zaczęto odkrywać *symetrie wewnętrzne*, ukryte, w pewnym sensie abstrakcyjne, bo nie dające się zobaczyć. W XX w. odkryto symetrie wewnętrzne o niewyobrażalnej głębi i fundamentalnym znaczeniu dla nauki ([21], s. 10). „W drugiej połowie XX w. idea symetrii stała się jedną z najgłębszych i najbardziej uniwersalnych idei w matematyce i fizyce. W ostatnich kilkunastu latach nastąpił również znaczny wzrost zainteresowania symetrią w biologii, sztuce i naukach humanistycznych” ([12], s. 7).

Przez *symetrię* rozumie się na ogół własność figur geometrycznych lub innych tworów matematycznych czy pozamatematycznych, którą daje się wyrazić za pomocą niezmienniczości względem pewnych przekształceń. Mówimy o symetrii koła, symetrii kwadratu, ale również o symetrii wyrażenia  $(x+y)^2$ , bądź funkcji  $(x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2$ . Symetryczne jest słowo „anna” (por. [7], s. 377). Symetryczne są tzw. palindromy, tj. wariacje zbioru  $\{0,1\}$  typu: 11, 0110, 011110 (por. [9], s. 26).

W [28] określa się symetrię obiektu lub układu obiektów jako dowolną transformację, która pozostawia go niezmiennym (s. 93). W [5] (r. II) określa się symetrię pewnego obiektu  $F$  jako *zgodność niezmienniczości ze zmiennością*. Zmienność jest przy tym rozumiana jako przekształcenie i odnosi się do poszczególnych elementów obiektu  $F$ . Niezmienniczość zaś dotyczy tego obiektu  $F$  jako pewnej całości. *Symetrią obiektu  $F$  jest zatem zbiór przekształceń, względem których obiekt ten jest niezmienniczy jako całość, mimo że poszczególne jego elementy mogą w wyniku tychże przekształceń ulegać wielorakim zmianom*” ([21], s. 11). Symetria  $S_F$  obiektu  $F$  jest więc w myśl tej definicji zbiorem przekształceń zachowujących ten obiekt jako całość. Obiektem  $F$  może być np. figura geometryczna, zbiór liczb, równanie algebraiczne bądź różniczkowe, teoria, dynamika procesu fizycznego, chemicznego, biologicznego, społecznego itp. (por.

[12], s. 7). Przekształceniem, które zachowuje zbiór  $\{1, 2, \dots, n\}$ , a więc określa jego symetrie, jest permutacja. Współczesne pojmowanie symetrii osiągnęło już taki stopień ogólności, że możemy mówić o symetriach abstrakcyjnych, które nie są związane z żadnym konkretnym obiektem ([21], s. 12).

To, że symetrię można rozważać nie tylko w geometrii, ujawniło się w trakcie badań pierwiastków równań algebraicznych. Zapoczątkowali je na przełomie XVIII i XIX wieku J. Lagrange i É. Galois. Rzecz dotyczyła symetrii w zbiorze pierwiastków tego samego równania. Symetrią jest każda permutacja tych pierwiastków (por. [4], s. 365 i 366).

O *algebrze symetrii* mowa jest w [1] (s. 131). Algebrę tworzy zbiór ośmiu symetrii kwadratu jako przekształceń kwadratu na ten sam kwadrat oraz składanie symetrii jako działanie w tym zbiorze o określonych własnościach. Ta matematyczna analiza symetrii doprowadziła do powstania teorii grup. O symetrii w algebrze mowa jest obszernie w książce [2]. Praca jest teorią wielomianów symetrycznych dwu i więcej zmiennych i dotyczy rozwiązywania układów równań typu  $f_j(x_1, x_2, \dots, x_k) = c$  dla  $j = 1, 2, \dots, k$ , gdzie  $f_j(x_1, x_2, \dots, x_k)$  jest wielomianem symetrycznym.

Według G. Polya symetria ma dwa znaczenia: *bardziej powszechne, szczególne, geometryczne znaczenie, i mniej powszechne, ogólne znaczenie logiczne. W elementarnej geometrii przestrzennej rozpatruje się dwa rodzaje symetrii: symetrię względem płaszczyzny (zwaną płaszczyzną symetrii) i symetrię względem punktu (zwanego środkiem symetrii).*(...) Przy ogólniejszym rozumieniu terminu „symetria” pewną całość nazywamy symetryczną, jeżeli ma ona dające się nawzajem zamienić części. Jest wiele rodzajów symetrii; różnią się one od siebie liczbą dających się zamienić części i operacjami, przy których części się zamieniają. I tak sześcián jest wysoce symetryczny; można w nim zamienić ze sobą jego 6 ścian, jego 8 wierzchołków i jego 12 krawędzi. Wyrażenie  $yz + zx + xy$  jest symetryczne; każde dwie spośród trzech liter  $x, y, z$  można ze sobą zamienić nie zmieniając wyrażenia. (por. [27], s. 237-238). Symetryczny jest  $n$ -kąć foremny. Na symetrii trójkąta równobocznego składają się trzy obroty i trzy odbicia lustrzane względem środkowych boków.

W kontekście pewnej całości mówimy w tej pracy (za G. Polya) o symetrii, jeśli całość ta ma części, które po zamianie dają tę samą całość.

H. Weyl formułuje w [31] pewne epistemologiczne uwagi o symetrii i stawia hipotezę, że *wszystkie sądy a priori fizyki mają swe źródło w symetrii* ([31], s. 123-126). Tezę a priori, że równe ciężary muszą się równoważyć na wadze o równych ramionach, Archimedes oparł na symetrii układu mas względem płaszczyzny środkowej wagi. Z symetrii wynika, że przy rzucaniu kostki dla każdej ze ścian jej wypadnięcie jest jednakowo prawdopodobne. Ze względu na symetrię możemy w specjalnych przypadkach przewidywać a priori przyszły bieg rzeczy ([31], s. 125).

Do tych epistemologicznych uwag o symetrii H. Weyl dodaje kolejną, dotyczącą interpretacji morfologicznych praw kryształów na gruncie dynamiki atomowej: *...jeżeli jednakowe atomy wywierają na siebie wzajemnie takie siły, że jest możliwy stan równowagi całego zespołu atomów, to atomy ustawiają się w stanie równowagi z konieczności w regularny układ punktów. (...) Nic więc dziwnego, że w kryształach spotykanych w przyrodzie reprezentowane są możliwe rodzaje symetrii w bogactwie najróżnorodniejszych postaci...* ([31], s. 126).

Symetrie przyrody ujawniają się w każdej skali, od struktury cząsteczek subatomowych do całego wszechświata. Wiele cząsteczek chemicznych jest symetrycznych. Symetrie odnajdujemy w strukturze komórki. Wyraźnie symetryczne są wirusy. Symetryczne są krople deszczu i gwiazdy, wiry wodne i galaktyki, pszczele plastry, meduzy i większość kwiatów.

W fizyce określa się *symetrię cząsteczek* jako ich własność charakteryzującą niezmienniczość rozkładu gęstości elektronów w cząsteczce lub rozkładu atomów w cząsteczce względem określonych przekształceń, np. obrotów. Mówi się także o *symetrii teorii fizycznej* jako o przekształceniu podstawowych dla tej teorii wielkości fizycznych, zmieniającym rozwiązania równań tej teorii w inne ich rozwiązania, np. przesunięcia w czasie i odbicia względem wyróżnionego punktu są symetrami czasoprzestrzeni (por. [17], Suplement, s. 32). Symetria leży u podstaw unifikacji sił elektrycznych i magnetycznych w jedną siłę elektromagnetyczną. Symetrie równań Maxwella dotyczących elektryczności i magnetyzmu, sprowadzają się do tego m.in., że jeśli wszystkie symbole dla pola elektrycznego zamienimy z symbolami pola magnetycznego, to uzyskamy te same równania (por. [28], s. 111). „*Fizyków można określić jako myśliwych polujących na symetrię: w pewnym sensie różnią się oni od pozostałych ludzi tym, że odnajdują w przyrodzie coraz bardziej ukryte i coraz bardziej fundamentalne symetrie*” ([21], s. 10 oraz [22]). „*Symetrie praw przyrody, a w szczególności symetrie oddziaływań fundamentalnych<sup>1</sup>, są nowym wyrazem od dawna poszukiwanej harmonii Wszechświata*” ([12], s. 8).

„*Symetria determinuje równania wielu teorii fizycznych i określa niektóre ważne własności rozwiązań tychże równań nawet wówczas, kiedy nie umiemy ich rozwiązać. Z symetrii wynikają klasyczne dogmaty fizyki: prawa zachowania energii, pędu, momentu pędu, ładunku. Symetria odgrywa rolę klucza, podstawowego narzędzia, przy intensywnych poszukiwaniach teorii jednolicie opisującej cztery fundamentalne oddziaływania przyrody (silne, słabe, elektromagnetyczne i grawitacyjne). Innymi słowy symetria leży u podstaw dynamiki, która jest fundamentem istnienia „elementarnych cegiełek” całej obecnie znanej materii Wszechświata. Co więcej, symetrie i oparte na nich próby zbudowania jednolitej teorii oddziaływań fundamentalnych dostarczają coraz więcej informacji o narodzinach Wszechświata, pierwszych chwilach jego istnienia i pierwszych etapach jego ewolucji*” ([21], s. 10-11).

Według Pitagorasa, Platona i Keplera u podstaw praw przyrody tkwi symetria jako wyraz piękna i harmonii ([21], s. 9).

### 3. Symetrie w procesie tworzenia probabilistycznego modelu – symetrie a organizacja fazy matematyzacji

Rozważania dotyczą ziarnistych (dyskretnych) przestrzeni probabilistycznych.

<sup>1</sup>Cztery oddziaływania fundamentalne przyrody to: grawitacyjne, elektromagnetyczne, silne (oddziaływanie to wiąże nukleony w jądrze atomowym, jak też kwarki w nukleonie) i słabe (oddziaływanie to powoduje rozpad cząsteczek, oddziaływanie to narusza różne zasady symetrii, które obowiązują w pozostałych oddziaływaniach fundamentalnych) — por. [21], s. 114-115.

### 3.1. Ziarnista, czyli dyskretna przestrzeń probabilistyczna

Niech  $\Omega$  będzie dowolnym, co najmniej dwuelementowym i co najwyżej przeliczalnym zbiorem,  $p$  zaś funkcją zbioru  $\Omega$  w zbiór liczb rzeczywistych, nieujemną i taką, że  $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ . Na zbiorze  $\mathcal{Z} = 2^\Omega$  określmy funkcję  $P$ :

$$P(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A = \emptyset, \\ p(\omega), & \text{gdy } A = \{\omega\}, \\ \sum_{\omega \in A} p(\omega), & \text{gdy } A \text{ jest zbiorem co najmniej dwuelementowym.} \end{cases}$$

Nietrudno wykazać, że  $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$  jest przestrzenią probabilistyczną w sensie definicji aksjomatycznej (por. [29], s. 55-57). Nazywamy ją *ziarnistą*, albo *dyskretną przestrzenią probabilistyczną* (por. [29], s. 7). Funkcję  $p$  nazywamy *rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze  $\Omega$* . Parę  $(\Omega, p)$  także nazywamy przestrzenią probabilistyczną.

Niech  $\Omega$  będzie zbiorem  $s$ -elementowym. Funkcja  $p$  określona na  $\Omega$  wzorem:  $p(\omega) = \frac{1}{s}$  dla każdego  $\omega \in \Omega$ , jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze  $\Omega$ . Nazywamy ją *rozkładem klasycznym*, a parę  $(\Omega, p)$  — *klasyczną przestrzenią probabilistyczną*. Jeśli przestrzeń probabilistyczna  $(\Omega, p)$  jest klasyczna, zbiór  $\Omega$  ma  $s$  elementów i  $A$  jest  $k$ -elementowym podzbiorem zbioru  $\Omega$ , to  $P(A) = \frac{k}{s}$ . Tak określoną funkcję  $P$  nazywamy *prawdopodobieństwem klasycznym*.

Niech  $(\Omega, p)$  będzie przestrzenią probabilistyczną,  $g$  zaś bijekcją ze zbioru  $\Omega$  na zbiór  $\Omega$ . Jeśli

$$\forall \omega \in \Omega [\bar{\omega} = g(\omega) \implies p(\bar{\omega}) = p(\omega)],$$

to mówimy, że *bijekcja  $g$  zachowuje prawdopodobieństwo*. Jeśli  $A \subset \Omega$  i  $B \subset \Omega$  i  $g(A) = B$ , to  $P(A) = P(B)$ .

Przestrzenie probabilistyczne  $(\Omega_1, p_1)$  i  $(\Omega_2, p_2)$  nazywamy *izomorficznymi*, jeśli istnieje bijekcja  $g$  ze zbioru  $\Omega_1$  na zbiór  $\Omega_2$  i taka, że

$$\forall \omega \in \Omega_1 \forall \bar{\omega} \in \Omega_2 [\bar{\omega} = g(\omega) \implies p_2(\bar{\omega}) = p_1(\omega)].$$

Mówimy w tym przypadku, że *bijekcja  $g$  zachowuje prawdopodobieństwo oraz, że ustala izomorfizm*.

Przestrzeń probabilistyczną  $(\Omega, p)$  uznajemy za *model probabilistyczny doświadczenia losowego  $d$*  jeśli  $\Omega$  jest zbiorem wyników (czyli tzw. *zdarzeń elementarnych*) doświadczenia  $d$ , funkcja  $p$  zaś przypisuje każdemu wynikowi prawdopodobieństwo, z jakim doświadczenie może zakończyć się tym wynikiem<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Uznawanie danej przestrzeni probabilistycznej za model doświadczenia jest kwestią podejmowania decyzji a nie dowodu matematycznego

(por. [25], s. 24). Modelem doświadczenia  $d$  jest klasyczna przestrzeń probabilistyczna, ilekroć wszystkie wyniki tego doświadczenia są (według naszej o nim wiedzy) jednakowo prawdopodobne.

Niech  $\Omega = \{o, r\}$  i  $p(o) = p(r) = \frac{1}{2}$ . Klasyczną przestrzeń probabilistyczną  $(\Omega, p)$  uważamy za model rzutu monetą. Litera  $o$  oznacza wynik wypadnie orzeł, litera  $r$  — wynik wypadnie reszka.

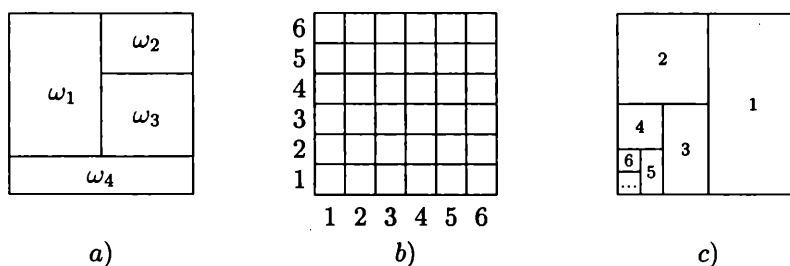
Decyzje o uznawaniu wyników doświadczenia losowego za jednakowo prawdopodobne są na ogół oparte na pewnych symetriach. Chodzi tu np. o symetrie kostki, czy monety, ale także o symetrię kołka i układu tych kołków na desce Galtona (zob. [25], s. 15 i 31). Są to symetrie geometryczne. Ale w grę mogą tu wchodzić także symetrie innej natury.

Przez  $U_{b+c}$  oznaczamy urnę, w której jest  $b$  kul białych i  $c$  czarnych, przez  $U_s$  zaś — urnę, w której jest  $s$  kul ponumerowanych od 1 do  $s$  ( $b, c$  i  $s$  są ustalonymi liczbami naturalnymi).

Podstawą decyzji o uznawaniu za jednakowo prawdopodobne wszystkich możliwych wyników losowania kuli z urny  $U_{k+k}$  (z urny  $U_s$ ), są jednakowe liczby kul białych i kul czarnych (jednakowe liczby kul o poszczególnych numerach).

### 3.2. Ziarnista przestrzeń probabilistyczna w interpretacji geometrycznej

Narzućmy prostokątną sieć na kwadrat o polu 1 (rys. 1). Funkcja, która każdemu z oczek przypisuje jego pole, jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze oczek tej sieci.



Rysunek 1.

Niech  $\Omega_2$  oznacza zbiór 36 kwadratowych oczek sieci z rys. 1b). Funkcję, która każdemu z oczek przypisuje liczbę  $\frac{1}{36}$  (a więc jego pole), oznaczmy przez  $p_2$ . Para  $(\Omega_2, p_2)$  jest klasyczną przestrzenią probabilistyczną. Możemy ją uważać za model rzutu dwiema różnymi kostkami do gry.

W przypadku nieskończonej sieci z rys. 1c) pole oczka  $n$  wynosi  $(\frac{1}{2})^n$  dla  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Funkcja  $p_3$ , która oczku przypisuje jego pole, jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze  $\Omega_3 = \{1, 2, 3, \dots\}$ . Para  $(\Omega_3, p_3)$  jest przestrzenią probabilistyczną. Jest ona modelem powtarzania rzutu monetą tak

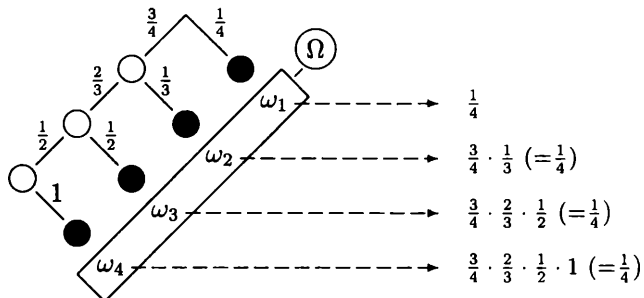
długo, aż wypadnie reszka. Oczko  $n$  prezentuje wynik: reszka wypadnie po raz pierwszy w  $n$ -tym rzucie (liczba  $n$  jest kodem tego wyniku).

### 3.3. Próba Bernoulliego

Niech  $u$  będzie dowolną liczbą rzeczywistą z przedziału  $(0,1)$ . Niech  $\Omega = \{0, 1\}$  i  $p(1) = u$  i  $p(0) = 1 - u = v$ . Doświadczenie losowe, którego modelem jest powyższa przestrzeń probabilistyczna  $(\Omega, p)$ , nazywamy *próbą Bernoulliego*, albo krótko — *próbą* i oznaczamy przez  $d_{0-1}^u$ . Wynik oznaczony cyfrą 1 nazywamy *sukcesem*, wynik oznaczony cyfrą 0 — *porażką*, liczbę  $u$  nazywamy *prawdopodobieństwem sukcesu*. Próba Bernoulliego jest losowanie kuli z urny  $U_{b+c}$ , sukcesem nazywamy w tym przypadku wylosowanie kuli czarnej. Jest tu  $u = \frac{c}{b+c}$ . Próba Bernoulliego jest rzut monetą, sukcesem nazywamy wyrzucenie reszki. Jest tu  $u = \frac{1}{2}$ .

### 3.4. Drzewo stochastyczne i symetrie a konstruowanie modelu probabilistycznego doświadczenia przebiegającego etapami

Wynik doświadczenia losowego przebiegającego etapami przedstawiamy jako ciąg wyników kolejnych etapów. Rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze  $\Omega$  wyników doświadczenia wieloetapowego określamy za pomocą tzw. *reguły mnożenia dla drzew stochastycznych* (por. [25], s. 34). Każdy wynik reprezentuje na drzewie pewną gałąź. Iloczyn liczb przypisanych kolejnym krawędziom gałęzi drzewa stochastycznego nazywamy jej *wagą*. Funkcja  $p$ , która każdej gałęzi drzewa (a tym samym wynikowi reprezentowanemu przez tę gałąź), przyporządkowuje jej wagę, jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze gałęzi (a tym samym na zbiorze  $\Omega$ ). Tę ideę konstrukcji przestrzeni probabilistycznej na przykładzie losowania bez zwracania kuli z urny  $U_{3+1}$  tak długo, aż zostanie wylosowana kula czarna ilustruje rys. 2. Przez  $\omega_j$  oznaczono wynik: kula czarna zostanie wylosowana za  $j$ -tym razem,  $j = 1, 2, 3, 4$ .



Rysunek 2.

Drzewo stochastyczne  $k$ -krotnego losowania bez zwracania kuli z urny  $U_s$  ( $k \leq s$ ) cechują wyraźne symetrie. Każda gałąź składa się z  $k$  krawędzi. Kolejnym krawędziom każdej gałęzi (licząc od korzenia drzewa) odpowiadają liczby:  $\frac{1}{s}$  — pierwszej krawędzi,  $\frac{1}{s-1}$  — drugiej krawędzi,  $\frac{1}{s-2}$  — trzeciej krawędzi, ...,  $\frac{1}{s-k+1}$  — ostatniej,  $k$ -tej krawędzi. Z tych symetrii wynika, że wagi wszystkich gałęzi są równe. Określona regułą mnożenia funkcja  $p$  jest klasycznym rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze  $\Omega$  wyników omawianego losowania. Analogiczne symetrie mamy w przypadku  $k$ -krotnego losowania ze zwracaniem kuli z urny  $U_s$ . Z symetrii drzewa wynika, że rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze wyników  $k$ -krotnego rzutu monetą, określony za pomocą reguły mnożenia dla drzewa stochastycznego, jest rozkładem klasycznym. Symetrie umożliwiają wykorzystywanie drzewa stochastycznego do konstruowania przestrzeni probabilistycznej bez jego rysowania.

Symetrie drzewa stochastycznego, o jakich mowa, zdają się być warunkiem nie tylko wystarczającym, ale i koniecznym na to, aby funkcja  $p$  określona regułą mnożenia była klasycznym rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze gałęzi drzewa. Drzewo stochastyczne z rys. 2 nie jest symetryczne. Funkcja  $p$  określona regułą mnożenia jest klasycznym rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ . Symetrie drzewa stochastycznego nie są zatem konieczne do tego, aby rozkład prawdopodobieństwa (określony regułą mnożenia) był klasyczny.

#### 4. Symetrie a błędzenia losowe jako jednorodny łańcuch Markowa

Niech  $d$  będzie jednorodnym łańcuchem Markowa o zbiorze stanów  $S = \{1, 2, \dots, s\}$  i niepustym zbiorze stanów pochłaniających. Łańcuch taki określony jest trójką  $(S, \vec{w}_0, Q)$ , gdzie  $\vec{w}_0$  jest wektorem stochastycznym  $s$ -wymiarowym,  $Q$  zaś macierzą stochastyczną stopnia  $s$ . Każda taka trójka jest z kolei algebraiczną prezentacją grafu stochastycznego Engla z niepustym brzegiem (zob. [25], s. 281-282). W takim sensie mówimy dalej o grafie stochastycznym doświadczenia losowego  $d$ . Jeśli  $\vec{w}_0$  jest wektorem, którego  $j$ -ta współrzędna jest równa 1, to trójkę  $(S, \vec{w}_0, Q)$  zastępujemy parą  $(S, Q)$ , węzeł reprezentujący stan  $j$  jest na grafie węzłem startowym.

##### 4.1. Symetrie a redukcje zbioru stanów

Symetrie mogą być podstawą redukcji zbioru stanów jednorodnego łańcucha Markowa. Dzięki symetriom można upraszczać obliczanie prawdopodobieństwa przejść z danego stanu do dowolnego stanu pochłaniającego.

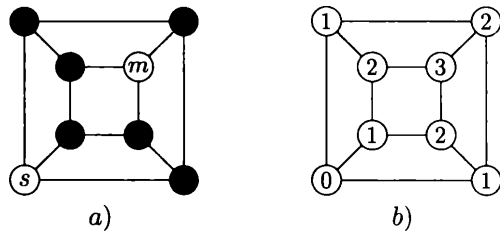
Rozważmy symetryczne błędzenie losowe po wielościanie foremnym. Ustalmy jeden lub dwa wierzchołki wielościanu jako węzły brzegowe. Nazywajmy je *metami*. W ustalonym wierzchołku stawiamy cząstkę. W kolejnych jednostkach



czasu (ta umowa pozwala wprowadzać do rozważań wartość oczekiwaną) losujemy jedną z krawędzi wychodzących z wierzchołka, w którym znajduje się cząstka, przy czym każdej z krawędzi odpowiada jednakowe prawdopodobieństwo. Cząstkę przesuwamy wzdłuż wylosowanej krawędzi. Losowanie krawędzi i przemieszczanie cząstki powtarzamy tak długo, aż cząstka trafi do jednej z met. Takie błądzenie losowe jest jednorodnym łańcuchem Markowa o niepustym zbiorze stanów pochłaniających. Z uwagi na symetrie, gdy chodzi o rolę poszczególnych wierzchołków wielościanu w tym błądzeniu, można w zbiorze wierzchołków wielościanu wprowadzić relację równoważnościową, która klasyfikuje te wierzchołki i prowadzi do redukcji zbioru stanów. Symetryczne błądzenie losowe po wielościanie foremnym można interpretować jako błądzenie losowe po grafie stochastycznym Engla o liczbie węzłów mniejszej niż liczba wierzchołków wielościanu.

Niech  $j$  będzie wierzchołkiem wielościanu,  $m$  zaś metą. Przez  $P(j \rightsquigarrow m)$  oznaczamy prawdopodobieństwo, z jakim w opisanym błądzeniu cząstka trafi z węzła  $j$  do węzła brzegowego  $m$ . To prawdopodobieństwo rozpatrujemy w nieskończonej (ale przeliczalnej) przestrzeni probabilistycznej indukowanej przez graf stochastyczny (por. [19], s. 32). Prawdopodobieństwo, o którym mowa, jest na ogół sumą pewnego szeregu, ale dzięki symetriom, można je czasami znajdować elementarnymi środkami.

Rozważmy symetryczne błądzenie losowe po sześcianie. Cząstka startuje z ustalonego wierzchołka startowego  $s$  (zob. rys. 3a). W kolejnych jednostkach czasu losowana jest jedna z trzech wychodzących z tego wierzchołka krawędzi, przy czym każdej z tych krawędzi odpowiada prawdopodobieństwo  $\frac{1}{3}$ . Błądzenie kończy się wraz z dotarciem cząstki do przeciwległego wierzchołka  $m$  (meta). Wierzchołki sześcianu są stanami (por. [9], s. 214).



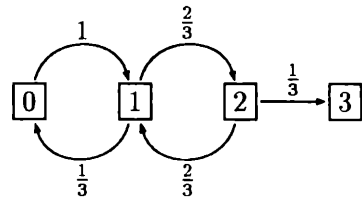
Rysunek 3.

Z symetrii (gdy chodzi o rolę wierzchołków na drodze od węzła  $s$  do  $m$ ) wynika, że wierzchołki oznaczone liczbą 1 na rys. 3b) tworzą ten sam „stan” błądzenia. Z każdego z nich wychodzą dwie krawędzie do wierzchołka 2 i jedna do wierzchołka 0. Analogicznie ten sam „stan” tworzą wierzchołki oznaczone liczbą 2. Dzięki symetriom zbiór ośmiu stanów redukuje się do czteroelemen-

towego zbioru  $S = \{0, 1, 2, 3\}$ . Macierz  $Q$  prawdopodobieństw przejść jest tu postaci

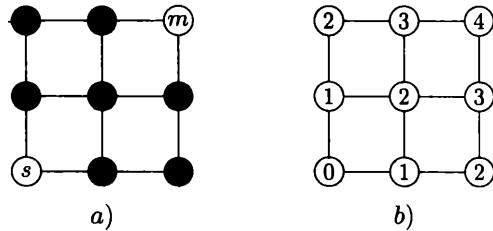
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Niech  $\vec{w}_0 = [1, 0, 0, 0, ]$ . Trójka  $(S, \vec{w}_0, Q)$  jest algebraiczną prezentacją grafu stochastycznego z rys. 4. Czas błędzenia po sześciannie jest czasem błędzenia po tym grafie (odmierzany liczbą krawędzi trasy błędzenia).



Rysunek 4.

W analogiczny sposób redukuje się liczbę stanów w przypadku symetrycznego błędzenia po figurze z rys. 5a), jeśli błędzenie rozpoczyna się w wierzchołku  $s$  i kończy wraz z dotarciem cząstki do węzła  $m$ .



Rysunek 5.

Z symetrii, gdy chodzi o rolę danego węzła na drodze od startu  $s$  do mety  $m$  w rozważanym błędzeniu, wynika, że węzły oznaczone na rys. 5b) tą samą liczbą są równoważne.

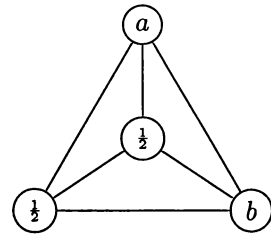
#### 4.2. Symetryczne błędzenie po wielościanie foremym z dwoma ustalonymi wierzchołkami jako węzłami brzegowymi

Ustalmy dwa wierzchołki  $a$  i  $b$  wielościanu foremnego jako węzły brzegowe (mety) i rozważmy symetryczne błędzenie losowe po tym wielościanie. W każdym wierzchołku wpiszmy prawdopodobieństwo, z jakim błędząca cząstka trafi

do mety  $a$ . Dla każdego wierzchołka  $j$  wielościanu jest

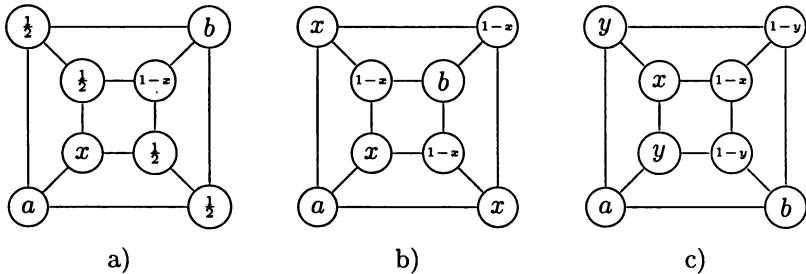
$$P(j \rightsquigarrow b) = 1 - P(j \rightsquigarrow a).$$

Rysunek 6 prezentuje płaski obraz czworościanu foremego z dwoma ustalonymi wierzchołkami  $a$  i  $b$  jako metami. Z symetrii wynika, że z każdego wierzchołka różnego od mety, prawdopodobieństwo, z jakim w błądzeniu symetrycznym po tej bryle cząstka dotrze do wierzchołka  $a$ , jest równe  $\frac{1}{2}$ .



Rysunek 6.

Rozważmy symetryczne błądzenie losowe po sześcianie z dwiema ustalonymi metami  $a$  i  $b$ . W każdym z wierzchołków wpisano prawdopodobieństwo dotarcia z tego węzła do mety  $a$ . Wpisane w wierzchołkach liczby (prawdopodobieństwa) znaleziono w oparciu o symetrię.



Rysunek 7.

W przypadku opisanym na rys. 7a) mamy

$$x = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{3}.$$

W przypadku z rys. 7b) jest

$$x = \frac{1}{3} [1 + (1 - x) + (1 - x)], \text{ czyli } x = \frac{3}{5}.$$

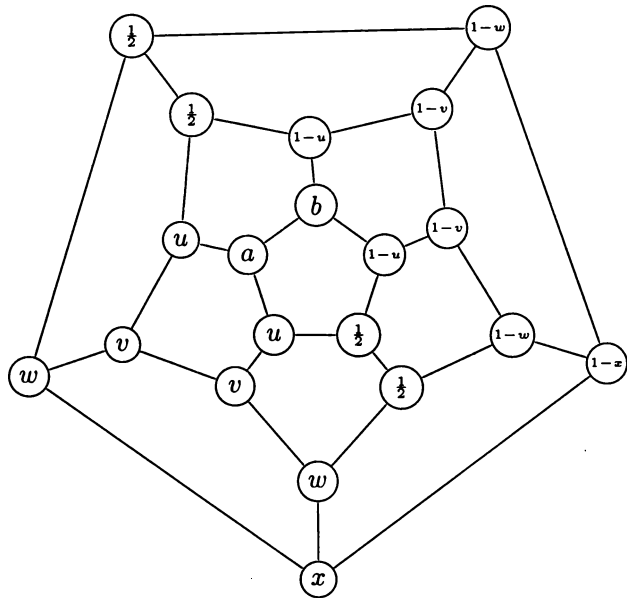
W sytuacji, którą prezentuje rys. 7c) mamy:

$$u = \frac{1}{3}[y + y + (1 - x)],$$

$$y = \frac{1}{3}[x + (1 - x) + 1],$$

a zatem  $x = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$  i  $y = \frac{9}{14}$ .

Rysunek 8 przedstawia płaski obraz dwunastościanu foremego z dwoma ustalonymi wierzchołkami  $a$  i  $b$  jako metami.



Rysunek 8.

Liczby  $\frac{1}{2}$  (jako prawdopodobieństwa) wpisane w niektórych wierzchołkach wynikają z symetrii. Ponadto z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym (i z symetrii) wynika, że:

$$u = \frac{1}{3}(v + 1 + \frac{1}{2}),$$

$$v = \frac{1}{3}(u + w + v),$$

$$w = \frac{1}{3}(v + x + \frac{1}{2}),$$

$$x = \frac{1}{3}[w + w + (1 - x)].$$

Mamy więc układ równań

$$\begin{cases} 3u - v = \frac{3}{2}, \\ 2v - u - w = 0, \\ 3w - v - x = \frac{1}{2}, \\ 4x - 2w = 1, \end{cases}$$

z którego wynika, że

$$u = \frac{27}{38} \quad \text{i} \quad v = \frac{24}{38}, \quad w = \frac{21}{38}, \quad \text{i} \quad x = \frac{20}{38}.$$

### 4.3. Klasyczne zadanie o ruinie gracza a symetrie

W tzw. *klasycznym zadaniu o ruinie gracza* (por. [25], s. 134 oraz [9], s. 40) mowa jest o następującej grze losowej. Gracz  $G_a$  ma  $a$  złotych, gracz  $G_b$  ma ich  $b$ . Wynik rzutu monetą rozstrzyga, który z graczy przekazuje złotówkę przeciwnikowi. Rzut monetą i przekazywanie złotówki przeciwnikowi powtarzane jest tak długo, aż kapitał jednego z graczy zmaleje do zera. Mówimy wtedy o ruinie gracza. Prawdopodobieństwo, że gracz  $G_a$  zostanie zrujnowany oznaczmy przez  $h(a)$ . Stan kapitału gracza  $G_a$  po kolejnym rzucie monetą przedstawmy jako punkt na prostej. Przebieg zmian stanu kapitału gracza  $G_a$  interpretujemy jako błądzenie losowe po osi całkowito-liczbowej. Możliwe stany tworzą zbiór  $S = \{0, 1, 2, \dots, a-1, a, a+1, \dots, a+b\}$ . Jest to błądzenie symetryczne (przejście z dowolnego stanu  $k$  do stanu  $k-1$  jest tak samo prawdopodobne jak przejście do stanu  $k+1$  dla  $0 < k < a+b$ ). Jest

$$h(k) = \frac{1}{2}[h(k-1) + h(k+1)] \quad \text{i} \quad h(0) = 1 \quad \text{i} \quad h(a+b) = 0.$$

Funkcja  $h$  jest więc ciągiem arytmetycznym ( $h(0), h(1), h(2), \dots, h(a+b)$ ), gdzie  $h(k) = 1 - \frac{k}{a+b}$  dla  $k = 0, 1, \dots, a+b$ . Jest zatem

$$h(a) = 1 - \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b}.$$

Z symetrii wynika, że prawdopodobieństwo ruiny gracza  $G_b$  jest równe

$$h(b) = \frac{a}{a+b}.$$

Załóżmy, że o przegranej i wygranej złotówce przez gracza  $G_a$  decyduje wynik próby  $d_{0-1}^u$ . Jeśli zakończy się ona sukcesem, to gracz  $G_a$  wygrywa złotówkę od gracza  $G_b$ , jeśli porażką — to gracz  $G_a$  traci złotówkę przekazując ją graczowi  $G_b$ . Niech  $h^u(a)$  oznacza prawdopodobieństwo ruiny gracza  $G_a$  w opisanej grze. Liczba  $v = 1-u$  jest prawdopodobieństwem, z jakim w jednej próbie złotówkę wygra gracz  $G_b$ . Jeśli  $u \neq v$ , to (por. [25], s. 134-135)

$$h^u(a) = \frac{1 - \left(\frac{u}{v}\right)^b}{1 - \left(\frac{u}{v}\right)^{a+b}}.$$

Z symetrii wynika, że prawdopodobieństwo ruiny gracza  $G_b$  jest równe:

$$h^v(b) = \frac{1 - \left(\frac{v}{u}\right)^a}{1 - \left(\frac{v}{u}\right)^{a+b}}.$$

Nietrudno sprawdzić, że ten sam wynik uzyskamy obliczając prawdopodobieństwo ruiny gracza  $G_b$  ze wzoru

$$h^v(b) = 1 - h^u(a),$$

który wynika z twierdzenia o prawdopodobieństwie zdarzenia przeciwnego.

## 5. Symetrie w schematach umowych a dedukcja i rachunki w modelach probabilistycznych tych schematów

### 5.1. Bijekcja jako podstawa symetrii w kombinatoryce

Symbol  $\binom{n}{k}$  oznacza liczbę  $k$ -elementowych podzbiorów zbioru  $n$ -elementowego. Znana w kombinatoryce tożsamość  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$  wynika z symetrii, istotą których jest fakt, że każdemu  $k$ -elementowemu podzbiоровi wybranemu ze zbioru  $n$ -elementowego odpowiada wzajemnie jednoznacznie jeden podzbiór  $(n-k)$ -elementowy (jest nim zbiór pozostałych elementów) i na odwrót. Mowa tu o pewnej bijekcji, która ustala równoliczność: zbioru  $k$ -elementowych kombinacji i zbioru  $(n-k)$ -elementowych kombinacji zbioru  $n$ -elementowego.

Oto egzemplifikacja tej, opartej na symetrii, argumentacji adresowanej do szkoły.

Dwie kłódki  $k_1$  i  $k_2$  są zamykane na szyfr. Na każdej jest 10 przycisków ponumerowanych od 0 do 9. Aby otworzyć kłódkę  $k_1$  należy nacisnąć 4 przyciski. Aby otworzyć kłódkę  $k_2$  trzeba nacisnąć 6 przycisków. W obu przypadkach numery przycisków otwierających kłódkę stanowią szyfr znany tylko właścicielowi kłódki. Aby rozstrzygnąć, w przypadku której kłódki jest mniejsze prawdopodobieństwo trafienia na kombinację stanowiącą szyfr (przy dobieraniu przycisków „na chybił trafił”), wystarczy rozstrzygnąć, która z liczb  $\binom{10}{4}$  i  $\binom{10}{6}$  jest większa. Każde cztery naciśnięte przyciski (stanowią one czteroelementową kombinację zbioru  $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ ) określają jednoznacznie zbiór sześciu przycisków nienaciśniętych (tj. sześcieelementową kombinację tego zbioru) i na odwrót. Ta bijekcja uzasadnia równość  $\binom{10}{4} = \binom{10}{6}$ .

Z czasami w zapisie  $P(A)$ , w miejsce litery  $A$  oznaczającej zdarzenie, wpisujemy słowny opis tego zdarzenia.

W przypadku  $n$ -krotnego powtarzania próby  $d_{0-1}^u$  jest:

$$P(\text{dokładnie } k \text{ sukcesów}) = P(\text{dokładnie } n - k \text{ porażek}),$$

$$P(\text{co najwyżej } k \text{ sukcesów}) = P(\text{co najmniej } n - k \text{ porażek}).$$

Równość  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$  jest podstawą symetrii, z których wynika, że w  $n$ -krotnym powtarzaniu próby  $d_{0-1}^{\frac{1}{2}}$  zachodzi (dla  $k = 0, 1, \dots, n$ ) równość:

$$P(\text{dokładnie } k \text{ sukcesów}) = P(\text{dokładnie } k \text{ porażek}).$$

## 5.2. Bijekcja jako podstawa izomorfizmu przestrzeni probabilistycznych

Rozważmy doświadczenia losowe:

$d_1$ : losowanie dwu kul z urny  $U_{3*2}$ ,

$d_2$ : losowanie trzech kul z urny  $U_{3*2}$ ,

$d_3$ : losowanie  $k$  kul z urny  $U_s$ , gdzie  $k < s$ ,

$d_4$ : losowanie  $s - k$  kul z urny  $U_s$ .

Niech  $(\Omega_j, p_j)$  oznacza model probabilistyczny doświadczenia  $d_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ).

Wynik: wśród dwu wylosowanych kul jest  $j$  białych i  $k$  czarnych oznaczmy przez  $\omega_{j*k}$ . Jest więc  $\Omega_1 = \{\omega_{2*0}, \omega_{1*1}, \omega_{0*2}\}$  i

$$p_1(\omega_{2*0}) = \frac{3}{10} \quad \text{i} \quad p_1(\omega_{1*1}) = \frac{6}{10} \quad \text{i} \quad p_1(\omega_{0*2}) = \frac{1}{10} \quad (\text{por. [24], s. 32-33}).$$

Przez  $\bar{\omega}_{j*k}$  oznaczmy wynik doświadczenia  $d_2$ : wśród trzech wylosowanych kul będzie  $j$  białych i  $k$  czarnych. Mamy więc  $\Omega = \{\bar{\omega}_{3*0}, \bar{\omega}_{2*1}, \bar{\omega}_{1*2}\}$ .

Jeśli z urny  $U_{3*2}$  wylosujemy dwie kule, to trzy kule pozostałe w urnie też są wylosowane. Wylosowanie trzech kul białych z urny  $U_{3*2}$  jest zatem tak samo prawdopodobne jak wylosowanie dwu kul czarnych z tej urny, czyli

$$p_2(\bar{\omega}_{3*0}) = p_1(\omega_{0*2}) = \frac{1}{10}.$$

Analogicznie jest

$$p_2(\bar{\omega}_{2*1}) = p_1(\omega_{1*1}) = \frac{6}{10} \quad \text{i} \quad p_2(\bar{\omega}_{1*2}) = p_1(\omega_{2*0}) = \frac{3}{10}.$$

Przestrzenie probabilistyczne  $(\Omega_1, p_1)$  i  $(\Omega_2, p_2)$  są izomorficzne. Bijekcją, która ustala ten izomorfizm, jest funkcja  $g : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  określona wzorem:

$$g(\omega_{j*k}) = \bar{\omega}_{(3-j)*(2-k)} \quad \text{dla } j = 0, 1, 2 \text{ i } k = 0, 1, 2 \text{ i } j + k = 2.$$

Niech  $\omega$  będzie wynikiem doświadczenia  $d_3$ . Jest więc  $\omega$  kombinacją  $k$ -elementową zbioru  $S = \{1, 2, 3, \dots, s\}$ , tj. zbioru numerów kul w urnie  $U_s$ . Zbiór kul pozostałych w urnie jest wynikiem doświadczenia  $d_4$ . Przez  $\bar{\omega}$  oznaczmy zbiór  $S \setminus \omega$ . Jeśli  $(\Omega_j, p_j)$  jest modelem probabilistycznym doświadczenia  $d_j$  ( $j = 3, 4$ ), to funkcja  $g$  ze zbioru  $\Omega_3$  na zbiór  $\Omega_4$ , określona wzorem

$$g(\omega) = S \setminus \omega \quad \text{dla } \omega \in \Omega_3$$

jest bijekcją zachowującą prawdopodobieństwo (oba modele są klasycznymi przestrzeniami probabilistycznymi). Modele probabilistyczne tych doświadczeń są izomorficznymi przestrzeniami probabilistycznymi.

### 5.3. Bijekcja jako podstawa symetrii we wnioskowaniach dotyczących prawdopodobieństwa

Wyjdźmy od typowego zadania z rachunku prawdopodobieństwa:

- Po potasowaniu 13 kart pikowych karty zostaną rozłożone w rzędzie. Obliczyć prawdopodobieństwo, że as trafi na wcześniejsze miejsce niż walet (zdarzenie  $A$ ).

W zadaniu chodzi o obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia  $A$  w modelu probabilistycznym rozkładania w rzędzie 13 pików. Tym modelem jest klasyczna przestrzeń probabilistyczna  $(\Omega, p)$ , gdzie  $\Omega$  jest zbiorem permutacji zbioru 13 kart pikowych. W klasycznej przestrzeni probabilistycznej jest  $P(A)$  ilorazem liczby wyników rozkładania, które sprzyjają zdarzeniu  $A$  (as jest wcześniejszym wyrazem permutacji niż walet) i liczby  $13!$  (tj. liczby wszystkich permutacji). Mamy zatem

$$P(A) = \frac{12 \cdot 11! + 11 \cdot 10! + 10 \cdot 9! + \dots + 2 \cdot 1! + 1 \cdot 0!}{13!} = \frac{11! \cdot (12 + 11 + 10 + \dots + 2 + 1)}{11! \cdot 12 \cdot 13} = \frac{\frac{12+1}{2} \cdot 12}{12 \cdot 13} = \frac{1}{2}.$$

Ale ten sam wynik można uzyskać natychmiast, korzystając z symetrii. Ukażemy jej istotę w kontekście ogólniejszego zadania:

- Z urny  $U_s$  losujemy  $s$  razy bez zwracania kulę. Niech  $j, k \in \{1, 2, \dots, s\}$  i  $j \neq k$ . Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia:

$A = \{\text{kula o numerze } j \text{ zostanie wylosowana wcześniej niż kula o numerze } k\}.$

W rozwiązywaniu obu zadań chodzi o stosowanie kombinatoryki do obliczania prawdopodobieństwa klasycznego. Tymczasem rozwiązanie zadania wynika natychmiast z pewnych symetrii. Wprowadźmy do rozważań zdarzenie

$B = \{\text{kula o numerze } k \text{ zostanie wylosowana wcześniej niż kula o numerze } j\}.$

Model losowania jest klasyczną przestrzenią probabilistyczną. Wynika to z pewnych symetrii. Niech  $\omega$  będzie wynikiem sprzyjającym zdarzeniu  $A$ . Jest więc  $\omega$  permutacją zbioru  $\{1, 2, \dots, s\}$  i taką, że liczba  $j$  jest wyrazem wcześniejszym niż liczba  $k$ . Niech ciąg  $\bar{\omega}$ , powstaje z ciągu  $\omega$  przez zamianę rolami liczb  $j$  i  $k$  (ciąg  $\bar{\omega}$  jest tzw. *transpozycją*  $t_{jk}$  permutacji  $\omega$ , por. [21], s. 47). Ciąg  $\bar{\omega}$  jest wynikiem sprzyjającym zdarzeniu  $B$ . Funkcja  $h(\omega) = \bar{\omega}$  jest bijekcją ze zbioru  $A$  na zbiór  $B$  ( $h(A) = B$ ), która zachowuje prawdopodobieństwo. Ten fakt jest podstawą symetrii, z których wynika, że  $P(A) = P(B)$ . Zdarzenia  $A$  i  $B$  są przeciwne, a więc  $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ .

W zadaniu z kartami bijekcja  $h$  zamienia rolami dwie karty: asa i waleta, w rzędzie 13 rozłożonych kart.

Jeśli  $X$  jest zmienną losową w przestrzeni probabilistycznej  $(\Omega, p)$ , to przez  $\Omega_X$  oznaczamy zbiór jej wartości, a więc zbiór  $X(\Omega)$ . Jeśli  $x_j \in \Omega_X$ , to przez  $\{X=x_j\}$  oznaczamy zdarzenie:  $\{\text{zmienna losowa } X \text{ przyjmie wartość } x_j\}$ , a więc zbiór  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_j\}$ . Prawdopodobieństwo zdarzenia  $\{X=x_j\}$  oznaczamy przez  $P(X=x_j)$ .

Rozważmy urnę  $U_s$ . Niech  $k \leq s$ . Rozważmy dwa doświadczenia losowe:



$d_{zz}^k$ :  $k$ -krotne losowanie ze zwracaniem kuli z urny  $U_s$ ,

$d_{bz}^k$ :  $k$ -krotne losowanie bez zwracania kuli z urny  $U_s$ .

Każdemu wynikowi losowania przypiszmy sumę numerów wylosowanych kul. Taka suma (mówimy o niej przed losowaniem) jest zmienną losową w modelu probabilistycznym rozważanego losowania. W obu przypadkach ten model jest klasyczną przestrzenią probabilistyczną (por. [25], s. 257). W przypadku doświadczenia  $d_{zz}^k$  tę zmienną losową oznaczmy przez  $X$ , w przypadku doświadczenia  $d_{bz}^k$  — przez  $Y$ .

• Wynik losowania  $d_{zz}^k$  jest  $k$ -wyrazową wariacją zbioru  $S = \{1, 2, \dots, s\}$ . Jest  $\Omega_X = \{k, k+1, k+2, \dots, k \cdot s - 1, k \cdot s\}$ . Rozważmy dwa zdarzenia:  $\{X=k+j\}$  i  $\{X=k \cdot s - j\}$  dla  $j = 0, 1, 2, \dots, ks - k$ , tj. takich  $j$ , dla których  $k+j \in \Omega_X$ . Niech  $\omega$  będzie wynikiem sprzyjającym zdarzeniu  $\{X=k+j\}$ . Jest więc  $\omega = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  i  $a_l \in S$  i  $a_1 + a_2 + \dots + a_k = k+j$ . Niech  $\bar{\omega} = (b_1, b_2, \dots, b_k)$ , gdzie  $b_l = s - a_l + 1$  dla  $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Jest

$$b_1 + b_2 + \dots + b_k = k \cdot s - (k+j) + k = k \cdot s - j,$$

a zatem ciąg  $\bar{\omega}$  sprzyja zdarzeniu  $\{X=k \cdot s - j\}$ . Dla  $j = 0, 1, 2, \dots, k \cdot s - k$ , funkcja  $h_{zz}^j(\omega) = \bar{\omega}$  jest bijekcją ze zbioru wyników sprzyjających zdarzeniu  $\{X=k+j\}$  na zbiór wyników sprzyjających zdarzeniu  $\{X=ks-j\}$ . Bijekcja  $h_{zz}^j$  ustala ich równoliczność. Z faktu, że zbiory te są zdarzeniami w klasycznej przestrzeni probabilistycznej wynika, iż ich prawdopodobieństwa są równe. Wspomniana bijekcja jest podstawą symetrii, z których wynika, że dla  $j = 0, 1, 2, \dots, ks - k$  (tj. takich  $j$ , że  $k+j \in \Omega_X$ ) zachodzi

$$P(X = k+j) = P(X = ks - j).$$

• Wynik doświadczenia  $d_{bz}^k$  jest  $k$ -wyrazową wariacją bez powtórzeń zbioru  $S$ . Mamy tu:

$$\min \Omega_Y = 1 + 2 + \dots + k = \frac{1+k}{2} \cdot k = \frac{k+k^2}{2} \text{ i}$$

$$\max \Omega_Y = s + (s-1) + (s-2) + \dots + (s-k+1) = \frac{[s+(s-k+1)] \cdot k}{2} = \frac{2ks - k^2 + k}{2},$$

a więc

$$\Omega_Y = \left\{ \frac{k+k^2}{2}, \frac{k+k^2}{2} + 1, \frac{k+k^2}{2} + 2, \dots, \frac{2ks - k^2 + k}{2} \right\}.$$

W doświadczeniu  $d_{bz}^k$  kule o numerach  $1, 2, \dots, k$  zostaną wylosowane z takim samym prawdopodobieństwem, jak kule o numerach  $s, s-1, s-2, \dots, s-k+1$ , a więc

$$P\left(Y = \frac{1+k}{2} \cdot k\right) = P\left(Y = \frac{(s-k+1) + s}{2} \cdot k\right),$$

czyli

$$P\left(Y = \frac{k+k^2}{2}\right) = P\left(Y = \frac{2ks - k^2 + k}{2}\right).$$

Wykażemy, że dla każdego  $j = 0, 1, 2, \dots, k \cdot s - k^2$ , tj. takiego  $j$ , dla którego  $\frac{k+k^2}{2} + j \in \Omega_Y$ , zachodzi równość:

$$P\left(Y = \frac{k+k^2}{2} + j\right) = P\left(Y = \frac{2ks - k^2 + k}{2} - j\right).$$

Niech  $\omega$  będzie wynikiem sprzyjającym zdarzeniu  $\{Y = \frac{k+k^2}{2} + j\}$ . Jest więc  $\omega = (c_1, c_2, \dots, c_k)$ , gdzie  $c_l \in S$  i  $c_l \neq c_m$  dla  $l \neq m$  i  $c_1 + c_2 + \dots + c_k = \frac{k+k^2}{2} + j$ . Niech  $\bar{\omega} = (d_1, d_2, \dots, d_k)$ , gdzie  $d_l = s - c_l + 1$  dla  $l \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Jest

$$d_1 + d_2 + \dots + d_k = k \cdot s - \left(\frac{k+k^2}{2} + j\right) + k = \frac{2ks - k^2 + k}{2} - j,$$

a zatem ciąg  $\bar{\omega}$  sprzyja zdarzeniu  $\{Y = \frac{2ks - k^2 + k}{2} - j\}$ .

Dla każdego  $j = 0, 1, 2, \dots, k \cdot s - k^2$ , funkcja  $h_{b_z}^j(\omega) = \bar{\omega}$  jest bijekcją ze zbioru wyników sprzyjających zdarzeniu  $\{Y = \frac{k+k^2}{2} + j\}$  na zbiór wyników sprzyjających zdarzeniu  $\{Y = \frac{2ks - k^2 + k}{2} - j\}$ . Bijekcja  $h_{b_z}^j$  stanowi podstawę symetrii, z których wynika, że dla każdego  $j = 0, 1, 2, \dots, ks - k^2$  (tj. takiego  $j$ , że  $\frac{k+k^2}{2} + j \in \Omega_Y$ ) zachodzi równość:

$$P\left(Y = \frac{k+k^2}{2} + j\right) = P\left(Y = \frac{2ks - k^2 + k}{2} - j\right).$$

W obu wnioskowaniach pojawia się bijekcja określona przez „przenumerowanie kul”, tj. odwzorowanie, które każdej kuli o numerze  $j$  z urny  $U_s$  przypisuje kulę o numerze  $s - j$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ).

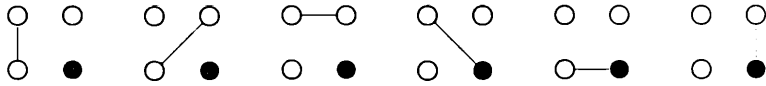
#### 5.4. „Jeśli wylosowane kule mają własność $\alpha$ , to pozostałe w urnie mają własność $\beta^*$ i wynikające z tego faktu symetrie

- Z losowaniem dwu kul z urny  $U_{3*1}$  zwiążmy dwa zdarzenia:

$A = \{\text{obie wylosowane kule będą tego samego koloru}\},$

$B = \{\text{każda z wylosowanych kul będzie innego koloru}\}.$

Równość  $P(A) = P(B)$  wynika z symetrii, istotą których jest to, że ilekroć dwie wylosowane kule są tego samego koloru, to dwie pozostałe w urnie (a więc także wylosowane) są różnych kolorów i na odwrót (zob. rys. 9, odcinek przedstawia tu dwie wylosowane kule).



Rysunek 9.

Także z symetrii (teraz chodzi o symetrię roli koloru kul) wynika, że w przypadku urny  $U_{1*3}$  jest również  $P(A) = P(B)$ .

• Z równoczesnym losowaniem  $n$  kul z urny  $U_{(2n-1)*1}$  zwiążmy zdarzenia:

$A_n = \{\text{wszystkie wylosowane kule będą białe}\},$

$B_n = \{\text{wśród } n \text{ wylosowanych kul będzie kula czarna}\}.$

Po wylosowaniu  $n$  kul z urny  $U_{(2n-1)*1}$ , w tej urnie pozostaje  $n$  kul. Są to także kule wylosowane. Jeśli wynik równoczesnego losowania  $n$  kul sprzyja zdarzeniu  $A_n$ , to pozostałe w urnie kule stanowią także wynik losowania  $n$  kul z urny  $U_{(2n-1)*1}$  i ten wynik sprzyja zdarzeniu  $B_n$ . Jest i na odwrót. Z symetrii wynika, że  $P(A_n) = P(B_n)$ . Zdarzenia  $A_n$  i  $B_n$  są przeciwne i równocześnie jednakowo prawdopodobne, a więc  $P(A_n) = P(B_n) = \frac{1}{2}$ .

W ostatnim losowaniu zbiór  $2n$  kul zostaje losowo rozbity na dwa równoliczne podzbiory. Jest tak samo prawdopodobne, że czarna kula trafi do jednego z tych podzbiorów, jak i że trafi do drugiego. Jest to inne, także oparte na symetriach, uzasadnienie faktu, że  $P(A_n) = P(B_n)$ .

• Z dwukrotnym losowaniem bez zwracania kuli z urny  $U_{n*n}$  ( $n > 1$ ) zwiążmy zdarzenia:

$A = \{\text{w obu losowaniach trafimy na kule tego samego koloru}\},$

$B = \{\text{wylosowane kule będą różnych kolorów}\}.$

Wniosek, że  $P(A) = \frac{n-1}{2n-1}$  i  $P(B) = \frac{n}{2n-1}$ , można uzyskać wprost z pewnych symetrii. Jeśli pierwsza wylosowana kula jest

— biała, to wśród  $2n - 1$  pozostałych kul jest  $n - 1$  białych i  $n$  czarnych,

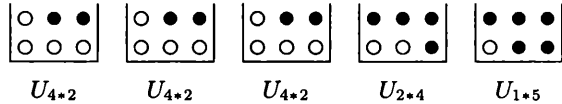
— czarna, to wśród  $2n - 1$  pozostałych kul jest  $n - 1$  czarnych i  $n$  białych.

Te dwa przypadki są symetryczne. Niezależnie od tego, jaki kolor ma pierwsza wylosowana kula, wśród  $2n - 1$  kul pozostałych jest  $n - 1$  kul tego samego koloru. Prawdopodobieństwo, że obie wylosowane kule będą tego samego koloru jest zatem równe  $\frac{n-1}{2n-1}$ , prawdopodobieństwo, że kula wylosowana za drugim razem będzie innego koloru niż kula wylosowana za pierwszym razem jest równe  $\frac{n}{2n-1}$ .

• Opisane wyżej zdarzenia  $A$  i  $B$  rozważmy teraz w kontekście dwukrotnego losowania ze zwracaniem kuli z urny  $U_{n*n}$ . Niezależnie od koloru kuli wylosowanej za pierwszym razem w urnie mamy  $n$  kul tego samego koloru co kolor już wylosowanej kuli i  $n$  kul innego koloru. Na podstawie symetrii prawdopodobieństwo tego, że za drugim razem wylosujemy kulę tego samego koloru co za pierwszym razem jest więc równe  $\frac{n}{2n}$  i jest ono równe prawdopodobieństwu tego, że w każdym losowaniu trafimy na kulę innego koloru, czyli że  $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ .

### 5.5. Zestaw urn jako niezmiennik przebarwiania a pewne symetrie

Niech  $Z = [U_{b_1 * c_1}, U_{b_2 * c_2}, \dots, U_{b_s * c_s}]$  oznacza zestaw urn z kulami białymi i czarnymi. Kolejność, w jakiej te urny rozpatrujemy w zestawie, nie ma znaczenia i pewne urny w zestawie mogą być identyczne<sup>3</sup>. Tak więc  $Z = [U_{b * c}, U_{c * b}]$  jest zestawem dwu urn, w jednej jest  $b$  kul białych i  $c$  czarnych, w jednej  $c$  białych i  $b$  czarnych. Pewien zestaw pięciu urn przedstawia rys. 10.



Rysunek 10.

Przez *przebarwianie urny* (*przebarwianie zestawu urn*) rozumiemy dalej procedurę  $f$ , która każdą kulę białą w urnie (każdą kulę białą w każdej urnie zestawu urn) zamienia na czarną i każdą kulę czarną — na białą. Jest więc  $f$  przekształceniem urny w urnę, bądź zestawu urn w zestaw urn. Mamy np.  $f(U_{b * c}) = U_{c * b}$ ,  $f([U_{3 * 2}, U_{4 * 1}]) = [U_{2 * 3}, U_{1 * 4}]$ .

Przez  $d_{Z \rightarrow U \rightarrow k}$  oznaczamy dalej następujące doświadczenie losowe: najpierw losujemy urnę z zestawu  $Z$ , dając każdej z urn równe szanse, a następnie — nie zaglądając do wylosowanej urny — losujemy zeń kulę. Ze schematem urnowym  $d_{Z \rightarrow U \rightarrow k}$  zwiążemy zdarzenia:

$B_1 = \{\text{wylosowana kula będzie biała}\}$ ,  $C_1 = \{\text{wylosowana kula będzie czarna}\}$ .

• Niech  $Z = [U_{b * c}, U_{c * b}]$ . Z doświadczeniem losowym  $d_{Z \rightarrow U \rightarrow k}$  zwiążmy także zdarzenia:

$B = \{\text{na początku zostanie wylosowana urna } U_{b * c}\}$ ,

$C = \{\text{na początku zostanie wylosowana urna } U_{c * b}\}$ .

Z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym wynika, że:

$$P(C_1) = P(B) \cdot P(C_1|B) + P(C) \cdot P(C_1|C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{b+c} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{b+c} = \frac{1}{2}.$$

Zdarzenia  $B_1$  i  $C_1$  są przeciwne, a zatem  $P(B_1) = 1 - P(C_1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .

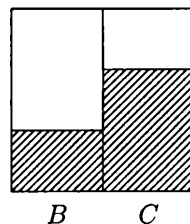
Wniosek, że  $P(B_1) = P(C_1) = \frac{1}{2}$ , wynika wprost z symetrii. Przebarwianie  $f$  odwzorowuje dany zestaw urn w ten sam zestaw ( $f(Z) = Z$ ) i każda z urn ma w losowaniu równe szanse, a zatem nie ma podstaw, aby wylosowanie kuli białej uważać za mniej (lub bardziej) prawdopodobne niż wylosowanie kuli czarnej.

Przebarwianie  $f$ , które przekształca urnę (zestaw urn) w tę samą urnę (w ten sam zestaw urn), przypomina izometrię jako szczególne przekształcenie w geometrii, dające podstawy do wnioskowań przez symetrię.

W przypadku urn  $U_{2 * 1}$  i  $U_{1 * 2}$ , zdarzenia  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $B$  i  $C$  oraz ich prawdopodobieństwa w interpretacji geometrycznej prezentuje rys. 11. Pionowe linie

<sup>3</sup>Jako obiekt matematyczny tak rozumiany zestaw urn jest kombinacją ze zwracaniem pewnego zbioru urn.

podziału kwadratu o polu 1 odpowiadają losowaniu urny, poziome — losowaniu kuli z tej urny. W tej interpretacji  $P(C_1)$  jest polem zakreskowanego sektora,  $P(B_1)$  jest polem białego sektora. Jest  $P(B_1) = P(C_1)$ .



Rysunek 11.

• Niech  $Z = [U_{(s-1)*1}, U_{(s-2)*2}, \dots, U_{1*(s-1)}]$ . Z doświadczeniem losowym  $d_{Z \rightarrow U \rightarrow k}$  zwiążmy zdarzenia  $B_1, C_1$  oraz zdarzenia:

$D_j = \{\text{na początku zostanie wylosowana urna } U_{(s-j)*j}\}, j = 1, 2, \dots, s-1.$

Jest  $P(D_j) = \frac{1}{s-1}$  i  $P(C_1|D_j) = \frac{j}{s}$ . Z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym wynika, że

$$P(C_1) = \sum_{j=1}^{s-1} P(D_j) \cdot P(C_1|D_j) = \frac{1}{s-1} \sum_{j=1}^{s-1} \frac{j}{s} = \frac{1}{s(s-1)} \sum_{j=1}^{s-1} j = \frac{s(s-1)}{2s(s-1)} = \frac{1}{2}.$$

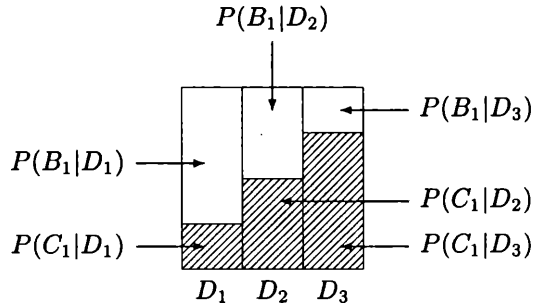
Jest  $P(B_1) = 1 - P(C_1)$ , a więc  $P(B_1) = P(C_1) = \frac{1}{2}$ .

W przypadku  $s = 4$  zdarzenia związane z doświadczeniem losowym  $d_{Z \rightarrow U \rightarrow k}$  i ich prawdopodobieństwa (także warunkowe) w interpretacji geometrycznej prezentuje rysunek 12. Pionowe linie podziału kwadratu o polu 1 odpowiadają losowaniu urny, poziome — losowaniu kuli z wylosowanej urny. W tej geometrycznej interpretacji  $P(C_1)$  jest polem zakreskowanego sektora,  $P(B_1)$  zaś — polem białego sektora. Równość  $P(B_1) = P(C_1)$  wynika zatem z równości pól tych sektorów. Geometryczna interpretacja przestrzeni probabilistycznej jako modelu omawianego tu schematu urnowego pozwala ujawniać kolejny aspekt symetrii (równość pól) jako podstawy wnioskowań probabilistycznych.

Równość  $P(B_1) = P(C_1)$  wynika wprost z symetrii, których istotą jest to, że:

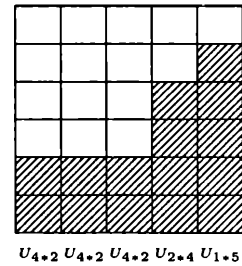
- w losowaniu urny każda z urn ma takie same szanse,
- przebarwianie zestawu urn nie zmienia tego zestawu ( $f(Z) = Z$ ).

Wydaje się, że równość  $f(Z) = Z$  jest warunkiem nie tylko wystarczającym, ale i koniecznym na to, aby (związane z doświadczeniem  $d_{Z \rightarrow U \rightarrow k}$ ) zdarzenia  $B_1$  i  $C_1$  były jednakowo prawdopodobne. Wykażemy, że tak nie jest.



Rysunek 12.

W rozmieszczeniu kul w urnach na rys. 10 nie ma wspomnianych symetrii (przebarwienie  $f$  zmienia zestaw urn). W przypadku tego zestawu  $Z$  i doświadczenia  $d_{Z \rightarrow U \rightarrow k}$  jest również  $P(B_1) = P(C_1)$ . Pewne asymetrie tego rozkładu kul zdają się sugerować, że powinno być inaczej.



Rysunek 13.

• Mamy  $\frac{s(s-1)}{2}$  kul białych i  $\frac{s(s-1)}{2}$  czarnych, które rozmieszczono w  $s - 1$  urnach tak, że w każdej urnie jest  $s$  kul. Jest  $Z = [U_{b_1 \times c_1}, U_{b_2 \times c_2}, \dots, U_{b_{s-1} \times c_{s-1}}]$  i  $b_j + c_j = s$  dla  $j = 1, 2, \dots, s - 1$  i  $b_1 + b_2 + \dots + b_{s-1} = c_1 + c_2 + \dots + c_{s-1}$ . Rozważmy doświadczenie losowe  $d_{Z \rightarrow U \rightarrow k}$ . Równość  $P(B_1) = P(C_1)$  wynika z pewnych symetrii, które można „przełożyć” na symetrie geometryczne. Kwadrat o polu 1 podzielmy najpierw pionowymi liniami na  $s - 1$  równych słupków. Każdy reprezentuje urnę. Słupek odpowiadający urnie  $U_{b \times c}$  podzielmy linią poziomą na części: białą i zakreskowaną (czarną), proporcjonalnie do liczb kul białych i czarnych w tej urnie. Zdarzenie  $C_1$  jest w tej interpretacji zbiorem zakreskowanych oczek, zdarzenie  $B_1$  jest zbiorem białych oczek (por. rys. 13, który odpowiada zestawowi urn z rys. 10).

Pole sektora białego jest w tej interpretacji prawdopodobieństwem wylosowania kuli białej, pole zakreskowanego sektora — prawdopodobieństwem wylosowania kuli czarnej. Równość prawdopodobieństw tych zdarzeń wynika z równości pól tych sektorów.

Zauważmy, że zestaw  $Z$ , o jakim mowa, ma następujące własności:  
 — w każdej z urn zestawu  $Z$  jest jednakowa liczba kul,  
 — we wszystkich urnach jest łącznie tyle samo kul białych co i czarnych.  
 Te własności zestawu urn (składają się one na nowy typ symetrii) wystarczają do równości prawdopodobieństw zdarzeń  $B_1$  i  $C_1$ .

Jeśli  $Z$  jest zestawem  $n$  urn z kulami białymi i czarnymi i w każdej z urn jest taka sama łączna liczba kul, to prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej w doświadczeniu losowym  $d_{Z \rightarrow U \rightarrow k}$  jest ilorazem łącznej liczby kul czarnych we wszystkich urnach i łącznej liczby kul we wszystkich urnach (por. [25], s. 131). Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej w opisanym doświadczeniu jest prawdopodobieństwem wylosowania kuli czarnej z urny, która powstaje z sypania do jednego pojemnika zawartości wszystkich urn zestawu  $Z$  (por. [18])<sup>4</sup>.

Jeśli liczby wszystkich kul w każdej z urn są jednakowe i liczba wszystkich kul białych jest równa liczbie wszystkich kul czarnych, to — mając na uwadze geometryczną interpretację przestrzeni probabilistycznej — jednostkowy kwadrat zostaje podzielony na  $n$  równych słupków, a każdy z nich na  $s$  równych oczek ( $s$  jest liczbą wszystkich kul w każdej urnie). Kwadrat jednostkowy zostaje zatem podzielony na  $n \times s$  przystających oczek. Liczby oczek białych i czarnych są równe, a zatem sektor biały i sektor czarny mają równe pola.

• Niech  $Z = [U_{(s-1)*1}, U_{(s-2)*2}, \dots, U_{1*(s-1)}]$ . Z każdej urny zestawu  $Z$  losujemy  $k$  kul, które następnie wkładamy do pojemnika. Z tak powstałej urny  $U_{x*y}^{k(s-1)}$  losujemy  $n$  razy ze zwracaniem kulę. Rozważmy zdarzenia:

$B_j = \{\text{wylosowana za } j\text{-tym razem kula będzie biała}\},$

$C_j = \{\text{wylosowana za } j\text{-tym razem kula będzie czarna}\} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$

W przypadku  $k = s$  jest  $P(B_1) = P(C_1) = \frac{1}{2}$ . Weźmy dowolne  $k < s$ . Z symetrii wynika, że  $P(B_1) = P(C_1)$ . Nie ma bowiem powodów, aby twierdzić, że wylosowanie kuli białej z urny  $U_{x*y}^{k(s-1)}$  jest bardziej (lub mniej) prawdopodobne niż wylosowanie kuli czarnej. Podstawą decyzji o uznawaniu zdarzeń  $B_1$  i  $C_1$  za jednakowo prawdopodobne jest i to, że  $f(Z) = Z$ . Kule losujemy ze zwracaniem, a zatem  $P(B_j) = P(C_j)$  dla  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Wprowadźmy do rozważań związanych ze zdarzeniami  $B_j$  i  $C_j$  prawdopodobieństwo warunkowe. Wydaje się oczywiste, że informacja, jaki kolor ma kula wylosowana za  $j$ -tym razem, nie wpływa na prawdopodobieństwa zdarzeń  $B_{j+1}$  i  $C_{j+1}$ , a więc że np.  $P(B_{j+1}|B_j) = P(B_{j+1}) = \frac{1}{2}$ . Kule losujemy bowiem ze zwracaniem, z tej samej urny. Wydaje się zatem, że zdarzenia  $B_{j+1}$  i  $B_j$ , a także zdarzenia  $B_{j+1}$  i  $C_j$ , a także  $C_{j+1}$  i  $C_j$ , a również zdarzenia  $C_{j+1}$  i  $B_j$ , są stochastycznie niezależne. Tymczasem jest inaczej. Zdarzenia  $B_{j+1}$  i  $B_j$  (a także każde dwa pozostałe z wyżej wymienionych) są zależne. Mamy tu przykład niewłaściwego kojarzenia stochastycznej niezależności ze schematem losowania ze zwracaniem.

<sup>4</sup>Ten fakt można odkryć dzięki geometrycznej interpretacji przestrzeni probabilistycznej.

## 6. Zmienna losowa i symetrie

### 6.1. Rozkłady i momenty pewnych zmiennych losowych a symetrie

Niech  $X$  będzie zmienną losową w przestrzeni probabilistycznej  $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ . Jeśli zbiór  $\Omega_X$  wartości zmiennej losowej  $X$  jest co najwyżej przeliczalny, to rozkład zmiennej losowej  $X$  (jako prawdopodobieństwo generowane na prostej przez zmienną losową  $X$ , por. [25] s. 210) jest określony jednoznacznie przez funkcję  $p_X : \Omega_X \rightarrow \mathcal{R}$  określoną wzorem  $p_X(x_j) = P(X=x_j)$  dla  $x_j \in \Omega_X$ .

W [6] przytacza się następujące zadanie o krzesłach:

1. Przy okrągłym stole, przy którym stoi  $s$  krzesel, losowo zasiadło  $c < s$  osób. Wśród nich pan Jan. Jaka jest oczekiwana liczba  $\mu$  wolnych miejsc między panem Janem a jego sąsiadem?<sup>5</sup>

Odpowiedź  $\mu = \frac{s-c}{s}$  uzyskano w drodze prostego rozumowania opartego na symetriach. Symetrie, o których mowa, uznano za synonim losowości. Sama losowość utożsamiana jest z rozkładem klasycznym.

W [25] (s. 177-178) znajduje się następujące zadanie:

2. W grze uczestniczy czterech graczy:  $G_1, G_2, G_3$  i  $G_4$ . Każdy wpłaca  $z$  złotych za wstęp do gry. Gracz  $G_1$  tasuje karty pełnej talii (52 karty) i wykłada po jednej tak długo, aż wyłoży asa. Resztę kart przekazuje graczowi  $G_2$ , który wykłada po jednej karcie tak długo, aż wyłoży asa. Pozostałe karty przekazuje graczowi  $G_3$ , który wykłada po jednej karcie tak długo, aż wyłoży asa. Resztę kart przekazuje graczowi  $G_4$ , który wykłada po jednej karcie tak długo, aż wyłoży asa. Każdy wygrywa tyle złotych, ile wyłoży kart. Czy można ustalić kwotę  $z$ , aby opisana gra była sprawiedliwa dla każdego z graczy? Jaką odpowiedź podsuwa Ci intuicja?

Problemy, o których mowa w tych zadaniach, są w istocie identyczne. Wszystkie można interpretować w kontekście losowego rozmieszczenia  $k$  kul na  $s$  ponumerowanych miejscach. Dla każdej z kul losuje się miejsce, na które ona trafi (każdemu z miejsc dając za każdym razem równe szanse), przy czym wylosowane miejsce nie bierze udziału w następnym losowaniu.

Rozważmy w tym kontekście kolejne zadanie:

3. Z urny  $U_{b+c}$ , przy czym  $b \geq 2$  i  $c \geq 2$ , będzie losowana bez zwracania kula tak długo, aż zostanie wylosowana kula czarna. Liczba wyciągniętych kul (mówimy o niej przed losowaniem) jest zmienną losową  $T$ . Znaleźć jej wartość oczekiwaną.

Jest  $E(T) = \frac{b}{c+1} + 1$ . To rozwiązanie można uzyskać bez znajomości rozkładu zmiennej losowej  $T$ . Podstawą wnioskowania mogą być pewne symetrie.

Niech  $b + c = s$ . Rozważmy ciąg  $s$  miejsc ponumerowanych od 1 do  $s$ . Można przyjąć, że losowanie trwa aż do opróżnienia urny i że kula wylosowana

<sup>5</sup>w cytowanym tekście zmieniono niektóre oznaczenia



za  $j$ -tym razem trafia na  $j$ -te miejsce ( $j = 1, 2, \dots, s$ ).

Niech  $X_1$  oznacza liczbę białych kul wylosowanych do momentu uzyskania czarnej kuli po raz pierwszy. Jest więc  $X_1$  liczbą początkowych miejsc „zajętych” przez kule białe oraz  $T = X_1 + 1$ .

Niech  $X_2$  będzie liczbą kul białych wylosowanych po uzyskaniu kuli czarnej po raz pierwszy, ale przed uzyskaniem kuli czarnej po raz drugi. I ogólnie: przez  $X_j$  oznaczymy liczbę kul białych leżących pomiędzy  $(j-1)$ -szą a  $j$ -tą z kolei kulą czarną. Przez  $X_{c+1}$  oznaczymy liczbę kul białych znajdujących się na końcu. Jest  $X_1 + X_2 + \dots + X_{c+1} = b$ , a więc

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_{c+1}) = b.$$

Każda ze zmiennych losowych  $X_1, X_2, \dots, X_{c+1}$  ma ten sam zbiór wartości. Z symetrii wynika, że rozkłady zmiennych losowych  $X_1, X_2, \dots, X_{c+1}$  są identyczne, a zatem  $(c+1) \cdot E(X_1) = b$ , czyli  $E(X_1) = \frac{b}{c+1}$ , a więc

$$E(T) = E(X_1 + 1) = \frac{b}{c+1} + 1.$$

Osoby, o których mowa w zadaniu 1., interpretujemy jako kule czarne. Procedurę opisaną w zadaniu 1. można interpretować jako losowanie bez zwracania kuli z urny  $U_{(s-c)*c}$ , przy czym kolejno wylosowaną kulę kładziemy na kolejne z  $s$  ponumerowanych miejsc (tym razem te miejsca ustawione są w krąg). Pan Jan może być w tej interpretacji czarną kulą wylosowaną za pierwszym razem.

W przypadku drugiego zadania jest  $s = 52$  i  $c = 4$ . Zmienna losowa  $X_j + 1$  jest wygraną gracza  $G_j$ . Gra jest sprawiedliwa dla gracza  $G_j$  jeśli jego opłata za udział w grze jest równa wartości oczekiwanej jego wygranej. Skoro  $E(X_j + 1)$  nie zależy od  $j$ , to odpowiedź na postawione w drugim zadaniu pytanie jest pozytywna.

## 6.2. Symetrie rozkładu zmiennej losowej a jej wartość oczekiwana

Załóżmy, że zbiór  $\Omega_X$  wartości zmiennej losowej  $X$  jest skończony. Niech  $p_X(x_j) = P(X=x_j)$  dla  $x_j \in \Omega_X$ . Interpretujemy liczbę  $p_X(x_j)$  jako masę skupioną na osi liczbowej w punkcie  $x_j$ . W tej fizycznej interpretacji rozkład zmiennej losowej jest rozkładem jednostkowej masy na osi liczbowej,  $E(X)$  zaś jest środkiem ciężkości owego układu mas.

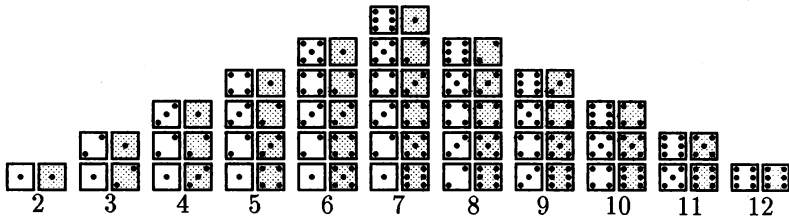
Jeżeli zbiór  $\Omega_X$ , jako zbiór punktów na osi liczbowej, ma środek symetrii w punkcie  $m$  i

$$\forall x_j \in \Omega_X \exists x_k \in \Omega_X \left[ m = \frac{x_j + x_k}{2} \wedge p_X(x_j) = p_X(x_k) \right],$$

to punkt  $m$  nazywamy *środkiem symetrii* funkcji  $p_X$ . Prosta  $x = m$  jest osią symetrii wykresu funkcji  $p_X$ . W interpretacji fizycznej rozkładu  $p_X$  taki punkt  $m$  jest środkiem ciężkości, a więc  $m = E(X)$ .

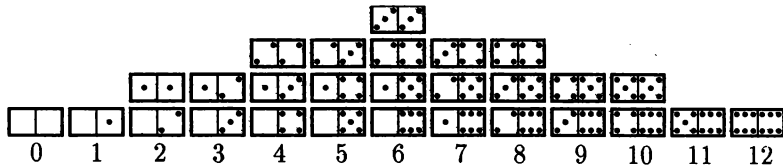
• Niech  $X$  będzie sumą liczb oczek uzyskanych w rzucie  $s$  kostkami. Jest  $\Omega_X = \{s, s+1, s+2, \dots, s \cdot 6\}$ . Jeśli wynik rzutu  $s$  kostkami sprzyja zdarzeniu  $\{X=j\}$ , to po odwróceniu kostek uzyskujemy wynik sprzyjający zdarzeniu  $\{X=7s-j\}$  i na odwrót. Przekształcenie  $g$ , o jakim tu mowa, jest bijekcją, która zachowuje prawdopodobieństwo. Jest  $g(\{X=j\}) = \{X=7s-j\}$  dla każdego  $j \in \Omega_X$ , a więc  $P(X=j) = P(X=7s-j)$ . Rozkład zmiennej losowej  $X$  posiada więc środek symetrii<sup>6</sup>, a zatem  $E(X) = \frac{s+s \cdot 6}{2} = \frac{7}{2} \cdot s$ .

• Rysunek 14 prezentuje klasyfikację zbioru wyników rzutu dwiema kostkami ze względu na liczbę łącznie wyrzuconych oczek. Jest to zarazem prezentacja układu zupełnego zdarzeń generowanego przez zmienną losową  $X$  w przypadku  $s = 2$ . Rysunek ten jest kolejnym środkiem argumentacji, że rozkład  $p_X$  ma środek symetrii w punkcie 7. Jest więc  $E(X) = 7$ .



Rysunek 14.

• Suma liczb oczek na kamieniu wylosowanym z zestawu 28 kamieni domina jest zmienną losową  $Z$ . Rysunek 15 prezentuje klasyfikację zbioru kamieni domina ze względu na sumę oczek, a zarazem rozkład zmiennej losowej  $Z$ . Rozkład  $p_Z$  ma środek symetrii w punkcie 6, a zatem  $E(Z) = 6$ .



Rysunek 15.

Niech  $h$  będzie przekształceniem, w którym każde pole z liczbą  $j$  oczek na kamieniu zostaje zamienione na pole z liczbą oczek  $6-j$  ( $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ). Przez  $A_j$  oznaczmy zbiór tych kamieni domina, na których jest łącznie  $j$  oczek ( $j = 0, 1, 2, \dots, 12$ ). Dla każdego  $j = 0, 1, 2, 3, 5, 6$  funkcja  $h$  jest bijekcją ze

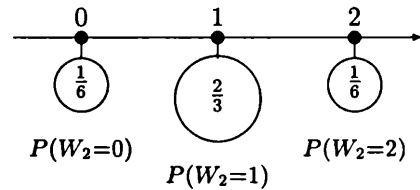
<sup>6</sup>Rozumowania oparto na fakcie, że sumy liczb oczek na przeciwległych ściankach kostki są równe 7. Należy tu wspomnieć o krytyce tej argumentacji przez H. Freudenthala w [11]. Rozkład zmiennej losowej ma także środek symetrii w przypadku, gdy liczby oczek na kostce są rozmieszczone inaczej (por. [26], s. 233-234).

zbioru  $A_j$  na zbiór  $A_{12-j}$  zachowującą prawdopodobieństwo. Wynika stąd, że  $P(Z=j) = P(Z=12-j)$  dla  $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , a więc rozkład  $p_Z$  ma środek symetrii. Z symetrii wynika zatem, że  $E(Z) = 6$ .

• Z urny  $U_{n \cdot n}$  losujemy równocześnie  $n$  kul. Liczba kul czarnych wśród wylosowanych, jeśli o niej mówić na początku, jest zmienną losową  $W_n$ . Z symetrii, których istotą są równe liczby kul białych i czarnych, wynika że

$$P(W_n = j) = P(W_n = n - j) \text{ dla } j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Rozkład zmiennej losowej  $W_n$  ma więc środek symetrii. Jest nim punkt  $\frac{n}{2}$  na osi (por. rys. 16, który odpowiada  $n = 2$ ), a zatem  $E(W_n) = \frac{n}{2}$ .



Rysunek 16.

• Niech  $u \in (0, 1)$ . Funkcja  $p_S: \{0, 1, 2, \dots, n\} \rightarrow (0, 1)$  określona wzorem

$$p_S(k) = \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k} \text{ dla } k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ . Nazywa się ją *rozkładem dwumianowym*. Jeśli  $d_{0-1}^u$  jest próbą Bernoulliego, to funkcja  $p_S$  jest rozkładem zmiennej losowej  $S$ , która wynikowi schematu Bernoulliego o  $n$  próbach przypisuje liczbę sukcesów. Z symetrii wzoru  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$  wynika, że w przypadku gdy  $u = 1 - u = \frac{1}{2}$  jest

$$p_S(k) = p_S(n - k) \text{ dla } k \in \{0, 1, 2, \dots, n\},$$

a zatem gdy  $u = \frac{1}{2}$ , to rozkład dwumianowy  $p_S$  ma środek symetrii w punkcie  $m = \frac{0+n}{2}$ . Jest więc

$$E(S) = \frac{n}{2}, \text{ gdy } u = \frac{1}{2}.$$

• Rozważmy  $k$ -krotne losowanie ze zwracaniem kuli z urny  $U_s$ . Zmienna losowa  $X$  przypisuje wynikowi tego losowania sumę numerów wylosowanych kul. Jest

$$\Omega_X = \{k, k + 1, k + 2, \dots, k \cdot s\}.$$

Korzystając z symetrii wykazaliśmy, że  $P(X = k + j) = P(X = k \cdot s - j)$  dla  $k + j \in \Omega_X$ , tj. dla  $j = 0, 1, 2, \dots, k \cdot s - k$ .

Rozkład zmiennej losowej  $X$  ma więc środek symetrii w punkcie  $\frac{k+k \cdot s}{2}$ , a zatem

$$E(X) = \frac{k + k \cdot s}{2} = \frac{k \cdot (s + 1)}{2}.$$

• Niech  $Y$  oznacza sumę numerów kul wylosowanych w  $k$ -krotnym losowaniu bez zwracania kuli z urny  $U_s$  ( $k \leq s$ ). Wykazaliśmy, że dla  $\frac{k+k^2}{2} + j \in \Omega_Y$ , to jest dla  $j = 0, 1, \dots, k \cdot s - k^2$  zachodzi

$$P\left(Y = \frac{k+k^2}{2} + j\right) = P\left(Y = \frac{2ks - k^2 + k}{2} - j\right)$$

Rozkład  $p_Y$  ma zatem środek symetrii. Jest nim średnia arytmetyczna najmniejszej i największej wartości zmiennej losowej  $Y$ . Z symetrii rozkładu  $p_Y$  wynika, że

$$E(Y) = \frac{\frac{k+k^2}{2} + \frac{2ks - k^2 + k}{2}}{2} = \frac{k(s+1)}{2}.$$

Zauważmy, że  $E(X) = E(Y)$  dla  $k \leq s$ .

## 7. Sprawiedliwość gry losowej a symetrie

### 7.1. Gra losowa z udziałem $n$ graczy i jej sprawiedliwość

Załóżmy, że dyskretna (ziarnista) przestrzeń probabilistyczna  $(\Omega, p)$  jest modelem doświadczenia losowego  $d$  oraz, że zbiór  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  jest układem zupełnym zdarzeń w tej przestrzeni. W grze z udziałem  $n$  graczy  $G_1, G_2, \dots, G_n$  przeprowadza się doświadczenie losowe  $d$  i jeśli zakończy się ono wynikiem sprzyjającym zdarzeniu  $A_j$  (jeśli zajdzie zdarzenie  $A_j$ ), to zwycięża gracz  $G_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Tego typu grę losową nazywamy *sprawiedliwą*, jeśli  $P(A_j) = \frac{1}{n}$  dla  $j = 1, 2, \dots, n$ . Sprawiedliwość gry oznacza zatem, że dla każdego z graczy prawdopodobieństwo jego zwycięstwa jest jednakowe (potocznie mówimy, że szanse graczy są równe).

### 7.2. Gra losowa z udziałem dwu graczy, w której czeka się na pierwszy sukces

Powtarzanie próby  $d_{0-1}^u$  tak długo, aż zakończy się sukcesem, nazywamy *oczekiwaniem na pierwszy sukces* ([25], s. 255) i oznaczamy przez  $d_1^u$ . Przez  $0_{n-1}1$  oznaczamy ciąg  $n$ -wyrazowy, którego ostatni wyraz jest równy 1, a wszystkie wcześniejsze są równe 0. Niech  $0_{n-1}1 = \omega_n$  dla  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$  oraz  $p_1(\omega_n) = (1-u)^{n-1}u$  dla  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Para  $(\Omega_1, p_1)$  jest przestrzenią probabilistyczną. Jest ona modelem doświadczenia  $d_1^u$ . Ciąg  $\omega_n$  prezentuje wynik sukces pojawi się po raz pierwszy w  $n$ -tej próbie.

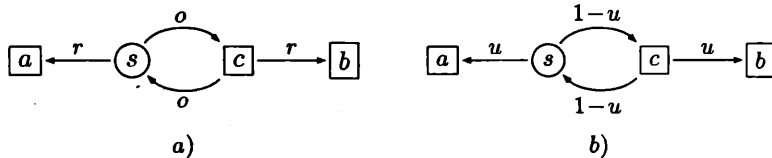
Niech  $g_2^u$  oznacza grę losową, w której dwaj gracze  $G_1$  i  $G_2$  powtarzają na przemian próbę  $d_{0-1}^u$  i zwycięża ten, kto pierwszy uzyska sukces. Przeprowadzone w tej grze doświadczenie losowe jest oczekiwaniem na pierwszy sukces. Załóżmy że gracz  $G_1$  pierwszy wykonuje próbę. W regulaminie gry mowa jest o dwu zdarzeniach przeciwnych związanych z doświadczeniem  $d_1^u$ :  
 $A_1 = \{\text{sukces pojawi się po raz pierwszy na nieparzystym etapie}\}$ ,  
 $A_2 = \{\text{sukces pojawi się po raz pierwszy na parzystym etapie}\}$ .  
 Zajście zdarzenia  $A_j$  oznacza zwycięstwo gracza  $G_j$  ( $j = 1, 2$ ). W modelu probabilistycznym oczekiwania na pierwszy sukces jest

$$P(A_1) = \frac{1}{1 + (1 - u)} \quad \text{i} \quad P(A_2) = \frac{1 - u}{1 + (1 - u)} \quad (\text{por. [25], s. 247}).$$

Jest  $P(A_1) > P(A_2)$  dla każdego  $u \in (0, 1)$ . Gra  $g_2^u$  nie jest sprawiedliwa i nie da się jej uczynić sprawiedliwą poprzez dobór parametru  $u$ .

### 7.3. Graf stochastyczny jako środek argumentacji

Oto inne uzasadnienie ostatniego faktu. Przebieg gry  $g_2^u$  interpretujemy jako błądzenie losowe pionka po grafie stochastycznym z rys. 17b.



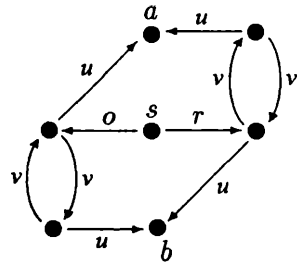
Rysunek 17.

Ten graf jest planszą do omawianej gry losowej. Na początku stawiamy pionek w węźle  $s$ . Po kolejnej próbie przesuujemy ów pionek wzdłuż krawędzi z przypisaną liczbą  $u$ , ilekroć próba zakończy się sukcesem, a wzdłuż krawędzi z przypisaną liczbą  $1 - u$ , ilekroć próba zakończy się porażką. Gracz  $G_A$  zwycięża, gdy pionek dotrze do węzła  $a$ . Zwycięstwo gracza  $G_B$  jest równoznaczne z dotarciem pionka do węzła  $b$ . Węzły  $a$  i  $b$  to węzły brzegowe grafu. Oznaczmy przez  $x$  prawdopodobieństwo dotarcia błądzącego pionka z węzła  $s$  do węzła  $a$ . Jest  $x = u + (1 - u)^2 \cdot x$ , a więc  $x = \frac{u}{1 - (1 - u)^2}$ . Równanie

$$\frac{u}{1 - (1 - u)^2} = \frac{1}{2}$$

nie ma pierwiastka na przedziale  $(0, 1)$ , a więc nie istnieje takie  $u$ , przy którym gra  $g_2^u$  byłaby sprawiedliwa. Powiemy, że tej gry  $g_2^u$  nie da się usprawiedliwić poprzez dobór liczby  $u$ .

Wprowadźmy do opisanej gry  $g_2^u$  rundę wstępną, która polega na losowaniu za pomocą monety gracza, który uzyska prawo pierwszeństwa we właściwej grze. Załóżmy, że jeśli wypadnie orzeł, to pierwszy wykonuje próbę gracz  $G_1$ , jeśli wypadnie reszka — to gracz  $G_2$ . Oznaczmy tę nową grę przez  $*g_2^u$ . Graf stochastyczny z rys. 18 jest planszą do gry  $*g_2^u$ . Jest to graf symetryczny<sup>7</sup>. Istotą symetrii jest teraz to, że gdy na grafie będącym planszą do gry  $*g_2^u$  zamienimy „orła” na „reszkę” i „reszkę” na „orła” oraz zamienimy rolami węzły  $a$  i  $b$ , to otrzymamy znów graf stochastyczny, który jest planszą do gry  $*g_2^u$ . Z tych (stochastycznych) symetrii wynika, że gra  $*g_2^u$  jest sprawiedliwa.



Rysunek 18.

#### 7.4. Sprawiedliwość gry i symetrie jako podstawa argumentacji

Dwaj gracze  $G_A$  i  $G_B$  rzucają na przemian monetą i zwycięża ten, kto pierwszy wyrzuci reszkę. Planszą do tej gry jest graf z rys. 17a. Próba jest teraz rzut monetą, sukcesem — wyrzucenie reszki,  $u = \frac{1}{2}$ . Załóżmy, że pierwszy rzuca monetą gracz  $G_A$ . Rysunek 19a) prezentuje kolejną argumentację opartą na geometrycznej interpretacji przestrzeni probabilistycznej. Pole białego sektora jest prawdopodobieństwem, że w takiej grze  $g_2^u$  zwycięży gracz  $G_A$ , pole zakreskowanego sektora jest prawdopodobieństwem, że zwycięży gracz  $G_B$ . Prawdopodobieństwo, że zwycięży gracz  $G_A$  jest równe  $\frac{2}{3}$ .

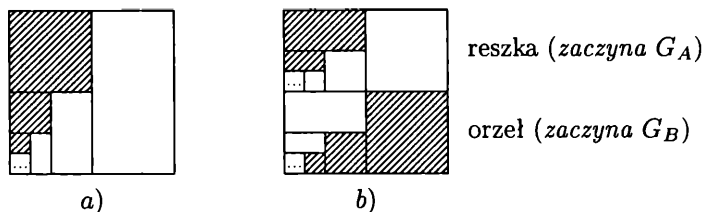
Wprowadźmy do gry rundę wstępną. Rzut monetą rozstrzyga, który z graczy uzyska prawo do pierwszego rzutu. Załóżmy, że jeśli wypadnie orzeł, to pierwszy rzuca w grze gracz  $G_B$ , jeśli reszka — to gracz  $G_A$ . Jest to nowa gra, którą oznaczmy przez  $*g_1^u$ . Rozważmy dwa zdarzenia:

$$A^* = \{\text{zwycięży gracz } G_A\}, \quad B^* = \{\text{zwycięży gracz } G_B\}.$$

Sektor złożony z białych oczek na rys. 19b) przedstawia zdarzenie  $A^*$ , jego pole jest prawdopodobieństwem tego zdarzenia. Sektor złożony z zakreskowanych oczek przedstawia zdarzenie  $B^*$ , jego pole jest prawdopodobieństwem

<sup>7</sup>Ma on środek symetrii, ale nie ta geometryczna właściwość grafu jest tu istotna. Chodzi tu o symetrie stochastyczne, które zostają zachowane także i wtedy, gdy graf z rys. 18 narysujemy inaczej, burząc ową geometryczną symetrię.

tego zdarzenia. Z symetrii wynika, że pola tych sektorów są równe, a więc  $P(A^*) = P(B^*)$ . Ta nowa gra jest sprawiedliwa.



Rysunek 19.

## 8. Czekać na serie sukcesów i porażek oraz własności tych serii wynikające z pewnych symetrii

### 8.1. Serie sukcesów i porażek. Serie ortów i reszek

Niech  $u$  będzie dowolną liczbą rzeczywistą z przedziału  $(0, 1)$ ,  $d_{0-1}^u$  zaś próbą Bernoulliego. Wynik  $m$ -krotnego powtarzania próby  $d_{0-1}^u$ , tj.  $m$ -wyrazową wariację zbioru  $\{0, 1\}$ , nazywamy *serią sukcesów i porażek*. Liczbę  $m$  nazywamy *długością serii*. Zapis 00011 oznacza pięciowyrazową wariację zbioru  $\{0, 1\}$ . Przedstawia ona wynik pięciokrotnego powtórzenia próby  $d_{0-1}^u$ , czyli serię sukcesów i porażek o długości 5.

Serie sukcesów i porażek oznaczamy małymi literami  $a, b, c$  itd. Długość serii  $a$  oznaczmy przez  $|a|$ . Jest np.  $|001| = 3$ ,  $|00011| = 5$ .

Niech  $J$  będzie funkcją, która każdej wariacji zbioru  $\{0, 1\}$  przypisuje liczbę jej wyrazów równych 1. Jeśli  $\omega = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  i  $\omega \in \{0, 1\}^n$ , to

$$J(\omega) = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Niech  $g^*(j) = 1 - j$  dla  $j \in \{0, 1\}$ . Jeśli  $a = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_m)$  jest serią sukcesów i porażek oraz  $b = (g^*(a_1), g^*(a_2), g^*(a_3), \dots, g^*(a_m))$ , to  $b$  jest też serią sukcesów i porażek. Nazywamy ją *serią dualną do serii  $a$*  i oznaczamy przez  $\bar{a}$ . Jeśli  $b = \bar{a}$ , to  $a = \bar{b}$  (serie  $a$  i  $b$  możemy nazywać *seriami dualnymi*).

Niech  $\omega \in \{0, 1\}^n$ . Jeśli  $k < n$  to:

- podciąg  $k$ -kolejnych początkowych wyrazów wariacji  $\omega$  nazywamy jej *podciągkiem o długości  $k$* ,
- podciąg  $k$ -kolejnych końcowych wyrazów wariacji  $\omega$  nazywamy jej *końcówką o długości  $k$* .

Mówimy że *seria  $a$  o długości  $k$  zawiera się w serii  $b$  o długości  $m$*  (gdzie  $k < m$ ) i zapisujemy  $a \subset b$ , jeśli ciąg  $a$  jest zarazem podciągkiem  $k$  kolejnych wyrazów ciągu  $b$ . Seria 001 zawiera się w serii 10010. Seria 1010 nie zawiera się w serii 11001101.

Ciąg  $n$ -wyrazowy postaci  $000\dots 01$  oznaczamy przez  $0_n 1$ . Jest to szczególna seria sukcesów i porażek o długości  $n + 1$ . Analogicznie rozumiemy oznaczenia:  $1_n 0$ ,  $10_n$  i  $01_n$ .

Jeśli  $u = \frac{1}{2}$ , to próbę  $d_{0-1}^u$  możemy utożsamiać z rzutem monetą, wyrzucenie reszki uznając za sukces. Serię sukcesów i porażek nazywamy w tym przypadku *serią reszek i orłów*. Serią reszek i orłów o długości  $m$  jest każdy wynik  $m$ -krotnego rzutu monetą. Zapis  $ooorr$  oznacza pięciowyrazową wariację zbioru  $\{o, r\}$ , a więc wynik pięciokrotnego rzutu monetą, czyli serię reszek i orłów o długości 5. Zapis  $orrr$  oznacza serię reszek i orłów o długości 4.

Na zbiorze  $\{o, r\}$  określmy funkcję  $g$  następująco:

$$g(x) = \begin{cases} o, & \text{gdy } x = r, \\ r, & \text{gdy } x = o. \end{cases}$$

Serie  $a = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_m)$ , gdzie  $a_j \in \{o, r\}$  dla  $j = 1, 2, 3, \dots, m$  i  $\bar{a} = (g(a_1), g(a_2), g(a_3), \dots, g(a_m))$  są seriami dualnymi. Seria  $\bar{a}$  powstaje przez zamianę w serii  $a$  wszystkich „orłów” na „reszki” i wszystkich „reszek” na „orły”.

## 8.2. Przestrzeń probabilistyczna jako model czekania na serię sukcesów i porażek. Czas czekania na serię sukcesów i porażek

Niech  $a$  będzie ustaloną serią sukcesów i porażek o długości  $m$ . Powtarzanie próby  $d_{0-1}^u$  tak długo, aż wyniki  $m$  ostatnich prób utworzą serię  $a$ , nazywamy *czekaniem na serię  $a$*  i oznaczamy przez  $d_a^u$ . Niech  $v = 1 - u$ .

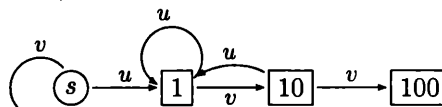
Czekanie na serię  $a$  jest doświadczeniem losowym o losowej liczbie etapów. Wynik doświadczenia losowego  $d_a^u$  (zdarzenie elementarne) jest ciągiem o wyrazach ze zbioru  $\{0, 1\}$ , co najmniej  $m$ -wyrazowym i takim, że jego końcówka o długości  $m$  jest serią  $a$  i żaden podciąg  $m$  kolejnych wcześniejszych wyrazów nie tworzy serii  $a$ . Oznaczmy przez  $\Omega_a$  zbiór wszystkich wyników czekania na serię  $a$ . Niech

$$p_a^u(\omega) = u^{J(\omega)} \cdot v^{|\omega| - J(\omega)}, \quad \text{dla każdego } \omega \in \Omega_a,$$

gdzie  $|\omega|$  oznacza długość wariacji  $\omega$ , tj. liczbę jej wyrazów. Funkcja  $p_a^u$  jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze  $\Omega_a$ , a więc para  $(\Omega_a, p_a^u)$  jest przestrzenią probabilistyczną. Jeśli  $u = \frac{1}{2}$ , to  $p_a^u(\omega) = (\frac{1}{2})^{|\omega|}$  dla  $\omega \in \Omega_a$ .

Wyróżniając stany czekania po kolejnych próbach, doświadczenie  $d_a^u$  staje się jednorodnym łańcuchem Markowa. Można zatem interpretować przebieg doświadczenia  $d_a^u$  jako błądzenie losowe po grafie stochastycznym Engla. Dla doświadczenia  $d_{100}^u$  taki graf prezentuje rys. 20





Rysunek 20.

Funkcja  $T_a$  określona na zbiorze  $\Omega_a$  wzorem

$$T_a(\omega) = |\omega| \text{ dla } \omega \in \Omega_a$$

jest zmienną losową w przestrzeni probabilistycznej  $(\Omega_a, p_a)$ . Nazywamy ją *czasem czekania na serię a*. Czas czekania na serię  $a$  jest:

- liczbą prób wykonanych w doświadczeniu  $d_a^u$  a zarazem
- czasem błędzenia po grafie stochastycznym doświadczenia  $d_a^u$ , a odmierzaniem długością trasy błędzenia.

Z definicji  $E(T_a)$  jest sumą pewnego szeregu. W przypadku niektórych serii można obliczyć  $E(T_a)$  bez odwoływania się do rozkładu zmiennej losowej  $T_a$ , a więc z pominięciem definicji. Środkiem argumentacji może być graf stochastyczny a także pewne symetrie.

- Do serii sukcesów i porażek włączamy także dwie serie długości 1, tj. pojedyncze wyniki próby Bernoulliego  $d_{0-1}^u$ . Przez  $d_1^u$  ( $d_0^u$ ) oznaczamy powtarzanie próby aż do uzyskania sukcesu (porażki). Doświadczenie  $d_1^u$  jest oczekiwaniem na pierwszy sukces (por. [25], s. 246). Jeśli  $T_j$  oznacza czas trwania doświadczenia losowego  $d_j^u$  dla  $j = 0, 1$ , to  $E(T_1) = \frac{1}{u}$  (zob. [25], s. 255). Z symetrii wynika, że

$$E(T_0) = \frac{1}{1-u} = \frac{1}{v}.$$

- Nietrudno zauważyć, że  $T_{01} = T_0 + T_1$ , a zatem

$$E(T_{01}) = E(T_0) + E(T_1) = \frac{1}{1-u} + \frac{1}{u} = \frac{1}{u(1-u)}.$$

Z symetrii wynika, że

$$E(T_{10}) = \frac{1}{(1-u)u}.$$

Jest więc  $E(T_{01}) = E(T_{10})$  dla każdego  $u \in (0, 1)$ .

- Wartość oczekiwana czasu czekania na serię  $a$  jest funkcją parametru  $u$ . Jeśli  $E(T_a) = h(u)$ , to z symetrii wynika, że  $E(T_{\bar{a}}) = h(1-u)$ .

Dla każdego  $u \in (0, 1)$  przestrzenie probabilistyczne  $(\Omega_{100}, p_{100})$  oraz  $(\Omega_{001}, p_{001})$  są izomorficzne (por. [19], s. 76). Z tego izomorfizmu wynika, że rozkłady zmiennych losowych  $T_{100}$  i  $T_{001}$  są identyczne, a więc  $E(T_{100}) = E(T_{001})$ . Jest  $E(T_{100}) = \frac{1}{u(1-u)^2}$  i  $E(T_{001}) = \frac{1}{u(1-u)^2}$ , a zatem z symetrii wynika, że

$$E(T_{011}) = E(T_{110}) = \frac{1}{(1-u)u^2}.$$

Niech  $1_n$  oznacza serię  $n$  sukcesów,  $0_n$  zaś — serię  $n$  porażek. Jest

$$E(T_{1_n}) = \frac{1-u^n}{u^n(1-u)}.$$

Z symetrii wynika zatem, że

$$E(T_{0_n}) = \frac{1-(1-u)^n}{(1-u)^n u}.$$

• Jeśli  $u = \frac{1}{2}$ , to rozkłady zmiennych losowych  $T_a$  i  $T_{\bar{a}}$  są identyczne. Wynika to z izomorfizmu przestrzeni probabilistycznych  $(\Omega_a, p_a)$  i  $(\Omega_{\bar{a}}, p_{\bar{a}})$ . Jeśli  $a$  jest serią reszek i orłów, to  $E(T_a) = E(T_{\bar{a}})$ . Jeśli  $u = \frac{1}{2}$ , to  $E(T_{100}) = 8$  (zob. [25], str. 305-307). Z faktu, że serie 100 i 011 są dualne, wynika, iż  $E(T_{100}) = E(T_{011}) = 8$ , gdy  $u = \frac{1}{2}$ .

### 8.3. Przestrzeń probabilistyczna jako model czekania na jedną z wielu ustalonych serii sukcesów i porażek i jej pewne własności

Niech  $a$  i  $b$  będą ustalonymi seriami sukcesów i porażek. Załóżmy, że  $|a| = k$  i  $|b| = m$  oraz, że w przypadku  $k \neq m$  seria krótsza nie zawiera się w serii dłuższej. Powtarzanie próby  $d_{0-1}^u$  tak długo aż:

— wyniki  $k$  ostatnich prób utworzą serię  $a$ , albo

— wyniki  $m$  ostatnich prób utworzą serię  $b$ ,

nazywamy *czekaniem na jedną z dwóch serii  $a$  lub  $b$*  i oznaczamy przez  $d_{a-b}^u$ .

Niech  $l = \min\{k, m\}$ . Wynik doświadczenia  $d_{a-b}^u$  jest ciągiem o wyrazach ze zbioru  $\{0, 1\}$ , co najmniej  $l$ -wyrazowym i takim, że albo końcówka o długości  $k$  jest serią  $a$ , albo końcówka o długości  $m$  jest serią  $b$  i żaden podciąg  $k$  kolejnych wyrazów wcześniejszych nie tworzy serii  $a$  i żaden podciąg  $m$  kolejnych wyrazów wcześniejszych nie tworzy serii  $b$ . Zbiór wszystkich wyników doświadczenia losowego  $d_{a-b}^u$  oznaczamy przez  $\Omega_{a-b}$ . Niech

$$p_{a-b}^u(\omega) = u^{J(\omega)} v^{|\omega| - J(\omega)} \quad \text{dla każdego } \omega \in \Omega_{a-b}.$$

Funkcja  $p_{a-b}^u$  jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze  $\Omega_{a-b}$ , a więc para  $(\Omega_{a-b}, p_{a-b}^u)$  jest przestrzenią probabilistyczną. W przypadku, gdy  $a$  i  $b$  są seriami reszek i orłów ( $u = \frac{1}{2}$ ) jest:  $p_{a-b}^u(\omega) = (\frac{1}{2})^{|\omega|}$  dla  $\omega \in \Omega_{a-b}$ .

Rozważmy zdarzenia:

$A = \{\text{doświadczenie } d_{a-b}^u \text{ zakończy się serią } a \text{ (seria } a \text{ pojawi się wcześniej)}\}$ .

$B = \{\text{doświadczenie } d_{a-b}^u \text{ zakończy się serią } b \text{ (seria } b \text{ pojawi się wcześniej)}\}$ .

Zdarzenia  $A$  i  $B$  oznaczamy odpowiednio przez  $\{a < b\}$  i  $\{b < a\}$ , a ich prawdopodobieństwa — przez  $P(a < b)$  i  $P(b < a)$ . Zdarzenia  $\{a < b\}$  i  $\{b < a\}$  są na ogół nieskończonymi (przeliczalnymi) podzbiorami zbioru  $\Omega_{a-b}$ , a zatem ich prawdopodobieństwa są sumami pewnych szeregów liczbowych. W przypadku niektórych serii  $a$  i  $b$  te prawdopodobieństwa można znaleźć z pominięciem teorii szeregów. W rachunkach można wykorzystywać symetrie.

Jeśli  $P(a < b) = P(b < a) = \frac{1}{2}$ , to serie  $a$  i  $b$  nazywamy *jednakowo dobrymi* i oznaczamy  $a \approx b$ . Jeśli  $P(a < b) > P(b < a)$ , to serię  $a$  nazywamy *lepszą* od serii  $b$  i zapisujemy  $a \gg b$ .

#### 8.4. Własności serii sukcesów i porażek wynikające z symetrii

Niech  $d_{a-b}^u$  będzie czekaniem na jedną z serii  $a$  i  $b$  sukcesów i porażek. Prawdopodobieństwo zdarzenia  $\{a < b\}$  jest funkcją parametru  $u$  określoną na przedziale  $(0,1)$ .

• Niech  $P(a < b) = f(u)$ . Zdarzenia  $\{a < b\}$  i  $\{b < a\}$  są przeciwne, a zatem  $P(b < a) = 1 - f(u)$ .

Jest  $P(111 < 011) = u^3$ , a zatem  $P(011 < 111) = 1 - u^3$ .

Jest  $P(100 < 001) = u + (1 - u)u$ , a więc  $P(001 < 100) = 1 - [u + (1 - u)u] = (1 - u)^2$ .

• Jeśli  $P(a < b) = f(u)$ , to  $P(\bar{a} < \bar{b}) = f(1 - u)$ .

Jest  $P(11 < 00) = \frac{u^2 + (1-u)u^2}{1-u(1-u)}$ , a zatem

— z symetrii wynika, że  $P(00 < 11) = \frac{(1-u)^2 + u(1-u)^2}{1-(1-u)u}$ ,

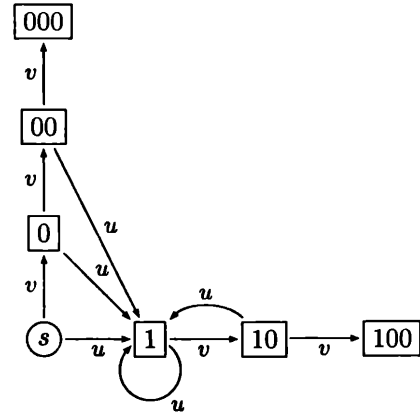
— z twierdzenia o prawdopodobieństwie zdarzeń przeciwnych wynika, że

$$P(00 < 11) = 1 - P(11 < 00) = 1 - \frac{u^2 + (1-u)u^2}{1-u(1-u)}.$$

Jeśli  $P(11 < 00) = f(u)$ , to:  $P(00 < 11) = 1 - f(u)$  i  $P(00 < 11) = f(1 - u)$ , czyli  $1 - f(u) = f(1 - u)$ .

Wyróżniając stany, w jakich może się znaleźć oczekiwanie po kolejnej próbie, doświadczenie  $d_{a-b}^u$  staje się jednorodnym łańcuchem Markowa. Przebieg czekania możemy interpretować jako błądzenie losowe po grafie stochastycznym tego czekania.

• Rysunek 21 prezentuje graf stochastyczny doświadczenia  $d_{000-100}^u$ . Zajście zdarzenia  $\{100 < 000\}$  jest równoważne z trafieniem błądzącej po grafie cząstki do węzła (metry)  $\boxed{100}$ , a to z kolei jest równoważne z dotarciem tej cząstki do węzła  $\boxed{1}$ . Zajście zdarzenia  $\{000 < 100\}$  jest równoważne z dotarciem błądzącej cząstki do węzła  $\boxed{000}$ .



Rysunek 21.

Z grafu wynika zatem, że

$$P(000 \prec 100) = v^3 \text{ i } P(100 \prec 000) = u + v \cdot u + v^2 \cdot u = 1 - v^3.$$

Z symetrii wynika zatem, że w przypadku doświadczenia  $d_{111-011}^u$  jest

$$P(111 \prec 011) = u^3 \text{ oraz } P(011 \prec 111) = 1 - u^3.$$

• W przypadku serii  $a = 01_{n-1}$  i  $b = 1_n$ , zdarzeniu  $\{1_n \prec 01_{n-1}\}$  sprzyja tylko jeden wynik czekania  $d_{a-b}^u$ . Jest nim ciąg  $1_n$ , a zatem

$$P(1_n \prec 01_{n-1}) = p_{01_{n-1}-1_n}^u(1_n) = u^n \text{ i } P(01_{n-1} \prec 1_n) = 1 - u^n.$$

Z symetrii wynika, że w przypadku doświadczenia  $d_{0_n-10_{n-1}}^u$  jest:

$$P(0_n \prec 10_{n-1}) = v^n \text{ i } P(10_{n-1} \prec 0_n) = 1 - v^n.$$

• Rozważmy zdarzenia  $\{10000 \prec 00001\}$  i  $\{00001 \prec 10000\}$ , związane z doświadczeniem  $d_{10000-00001}^u$ . Ileokroć sukces pojawi się nie później niż w czwartej próbie, to zajście zdarzenia  $\{00001 \prec 10000\}$  nie jest już możliwe. Aby po sukcesie uzyskanym nie później niż w czwartej próbie można było doczekać się serii 00001, kolejne cztery próby musiałyby zakończyć się porażką i następna sukcesem. Ale w takiej sytuacji po czterech porażkach uzyskanych pod rząd (po sukcesie) doświadczenie  $d_{10000-00001}^u$  kończy się, bo wyniki pięciu ostatnich prób utworzyły serię 10000. Jest więc  $P(10000 \prec 00001)$  równe prawdopodobieństwu uzyskania sukcesu nie później niż w czwartej próbie po raz pierwszy, czyli

$$P(10000 \prec 00001) = u + v \cdot u + v^2 \cdot u + v^3 \cdot u = \frac{u \cdot (1 - u^4)}{1 - v} = 1 - v^4.$$

- Zdarzenia  $\{10000 \prec 00001\}$  i  $\{00001 \prec 10000\}$  są przeciwne, a zatem

$$P(00001 \prec 10000) = 1 - P(10000 \prec 00001) = 1 - (1 - v^4) = v^4.$$

W nieskończonej przestrzeni probabilistycznej  $(\Omega_{10000-00001}, p_{10000-00001})$  zdarzenia  $\{10000 \prec 00001\}$  i  $\{00001 \prec 10000\}$  są nieskończonymi podzbiarami zbioru  $\Omega_{10000-00001}$ , a więc ich prawdopodobieństwa są sumami pewnych szeregów. Poprzez przejście do skończonej przestrzeni probabilistycznej znaleźliśmy prawdopodobieństwa zdarzeń  $\{10000 \prec 00001\}$  i  $\{00001 \prec 10000\}$  bez odwoływania się do teorii szeregów.

- Ogólnie, w przypadku serii  $a = 10_n$  i  $b = 0_n1$  oraz doświadczenia  $d_{a-b}^u$  mamy:

$$P(10_n \prec 0_n1) = 1 - v^{n-1} \quad \text{i} \quad P(0_n1 \prec 10_n) = v^{n-1}.$$

Z symetrii wynika, że

$$P(01_n \prec 1_n0) = 1 - u^{n-1} \quad \text{oraz} \quad P(1_n0 \prec 01_n) = u^{n-1}.$$

Rozstrzyganie, dla jakich  $u$  z przedziału  $(0,1)$  powyższe serie  $a$  i  $b$  są jednako dobre, sprowadza się do rozwiązywania pewnych równań. Poszukiwanie takich  $u$ , przy których  $a \gg b$  lub  $b \gg a$ , prowadzi do rozwiązywania pewnych nierówności. Problematyka ilustruje tym samym realizację idei fuzjonizmu ([26], s. 39) na zajęciach z rachunku prawdopodobieństwa.

### 8.5. Czas czekania na jedną z wielu serii sukcesów i porażek i jego wartość oczekiwana

Niech  $T_{a-b}$  będzie czasem trwania doświadczenia  $d_{a-b}^u$  odmierzanym liczbą prób wykonanych w tym doświadczeniu. Jest więc  $T_{a-b}$  zmienną losową w przestrzeni probabilistycznej  $(\Omega_{a-b}, p_{a-b}^u)$  i

$$T_{a-b}(\omega) = |\omega| \quad \text{dla} \quad \omega \in \Omega_{a-b}.$$

Jeśli doświadczenie  $d_{a-b}^u$  interpretować jako błądzenie losowe po grafie stochastycznym, to  $T_{a-b}$  jest czasem błądzenia po tym grafie (czasem odmierzanym długością trasy błądzenia). Na ogół  $E(T_{a-b})$  jest sumą pewnego szeregu. Graf stochastyczny i symetrie są w niektórych przypadkach narzędziami znajdowania  $E(T_{a-b})$  bez odwoływania się do teorii szeregów (a więc z pominięciem definicji wartości oczekiwanej).

Zmienna losowa  $T_{10-11}$  jest czasem trwania doświadczenia  $d_{10-11}^u$ . Jego przebieg można rozbić na dwa etapy: pierwszy etap jest oczekiwaniem na pierwszy sukces, a więc jego czas trwania jest zmienną losową  $T_1$ . Po uzyskaniu pierwszego sukcesu kolejna próba kończy czekanie na jedną z serii 10 lub 11. Mamy więc  $T_{10-11} = T_1 + 1$ , a zatem

$$E(T_{10-11}) = E(T_1 + 1) = E(T_1) + 1 = \frac{1}{u} + 1 = \frac{1+u}{u}.$$

• Jest  $E(T_{a-b})$  funkcją parametru  $u$ . Niech  $E(T_{a-b}) = e(u)$ . Z symetrii wynika, że  $E(T_{\bar{a}-\bar{b}}) = e(1-u)$ . Z faktu, że  $E(T_{10-11}) = \frac{1+u}{u}$  wynika, że

$$E(T_{01-00}) = \frac{1+(1-u)}{1-u} = \frac{2-u}{1-u}.$$

• Jeśli  $u = \frac{1}{2}$  (jeśli  $a$  i  $b$  są seriami reszek i orłów), to  $E(T_{a-b}) = E(T_{\bar{a}-\bar{b}})$ .

• Rozważmy trzy serie sukcesów i porażek:

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_k), a = (c_1, c_2, \dots, c_k, 0) \text{ i } b = (c_1, c_2, \dots, c_k, 1).$$

Zmienna losowa  $T_{a-b}$  jest czasem trwania doświadczenia losowego  $d_{a-b}^u$ , na przebieg którego składa się czekanie na serię  $c$  i pojedyncza próba, która rozstrzyga jaką serią kończy się czekanie. Jest więc  $T_{a-b} = T_c + 1$ , czyli  $E(T_{a-b}) = E(T_c) + 1$ .

Wcześniej rozstrzygnęliśmy, że  $E(T_{100}) = E(T_{001}) = \frac{1}{u(1-u)^2}$ . Z powyższych rozważań wynika, że

$$E(T_{1000-1001}) = E(T_{100}) + 1 = \frac{1}{u(1-u)^2} + 1 = \frac{1+u(1-u)^2}{u(1-u)^2}.$$

Z symetrii wynika, że

$$E(T_{0111-0110}) = E(T_{011}) + 1 = \frac{1}{(1-u)u^2} + 1 = \frac{1+(1-u)u^2}{(1-u)u^2}.$$

## 8.6. Symetrie grafu stochastycznego i wynikające z nich wnioski

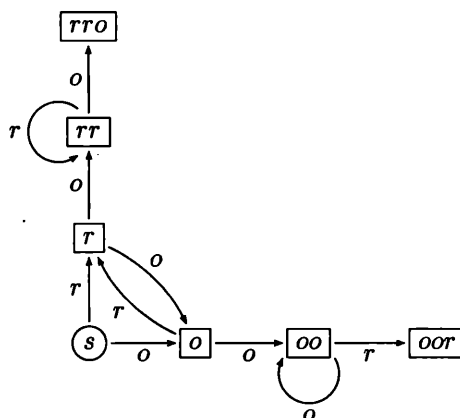
Niech próbą będzie rzut monetą,  $a$  i  $b$  zaś seriami reszek i orłów. Czekanie na jedną z tych dwu serii, jako czekanie na serie sukcesów i porażek w przypadku, gdy  $u = \frac{1}{2}$ , oznaczamy krótko przez  $d_{a-b}$ . Na grafie stochastycznym doświadczenia  $d_{a-b}$  wpisujemy obok krawędzi wynik rzutu monetą, który odpowiada przejściu wzdłuż tej krawędzi (zamiast — jak dotąd — jego prawdopodobieństwa).

Niech  $a$  będzie serią reszek i orłów. Jeśli  $b = \bar{a}$ , to graf stochastyczny doświadczenia  $d_{a-b}$  ma tę własność, że po zamianie każdej litery  $o$  na  $r$  i każdej litery  $r$  na  $o$  powstały graf jest również grafem doświadczenia  $d_{a-b}$ . Z symetrii, o których mowa, wynika, że  $P(a \prec b) = P(b \prec a)$ , a więc że  $a \approx b$ .

Z symetrii grafu doświadczenia  $d_{oor-rrr}$  (rys. 22) wynika, że  $oor \approx rrr$ .

Każde dwie serie dualne  $a$  i  $\bar{a}$  reszek i orłów są jednakowo dobre, ponieważ graf stochastyczny doświadczenia  $d_{a-\bar{a}}$  jest symetryczny.

Zamiana orła na reszkę i reszki na orła prowadzi do tego samego grafu podobnie jak operacja „przebarwiania” prowadziła od zestawu urn do tego samego zestawu. Mamy tu zatem do czynienia z pewnymi analogiami.



Rysunek 22.

Dla każdych dwu serii  $a$  i  $b$  reszek i orłów (niekoniecznie równych długości) rozpatrywanych w kontekście doświadczenia  $d_{a-b}$  jest

$$P(a \prec b) = P(\bar{a} \prec \bar{b}).$$

Z powyższej równości (jej podstawą są symetrie) wynika, że:

- jeśli każdy z graczy zamieni swoją serię na serię dualną, to ich szanse w grze Penney'a (por. [25], s. 312) nie ulegną zmianie,
- jeśli  $a \approx b$ , to  $\bar{a} \approx \bar{b}$ ,
- jeśli  $a \gg b$ , to  $\bar{a} \gg \bar{b}$ .

Symetrie grafu jako planszy do gry Penney'a, są często błędnie pojmowane jako symetrie geometryczne.

## 9. Symetryczność pewnych relacji jako stochastyczny paradoks

Niech  $\mathcal{Z}^*$  będzie rodziną wszystkich zdarzeń w przestrzeni probabilistycznej  $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ , których prawdopodobieństwo  $P$  jest dodatnie. Określmy w zbiorze  $\mathcal{Z}^*$  trzy relacje:

$$\nearrow: B \nearrow A \iff P(A|B) > P(A) \text{ dla } A, B \in \mathcal{Z},$$

$$\searrow: B \searrow A \iff P(A|B) < P(A) \text{ dla } A, B \in \mathcal{Z},$$

$$\simeq: B \simeq A \iff P(A|B) = P(A) \text{ dla } A, B \in \mathcal{Z}.$$

Nierówność  $P(A|B) > P(A)$  (analogicznie  $P(A|B) < P(A)$ ) orzeka, że informacja iż zaszło zdarzenie  $B$  zwiększa (zmniejsza) prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ . Wydaje się oczywiste, że relacje  $\nearrow$  i  $\searrow$  są antysymetryczne.

Równość  $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$  jest symetryczna ze względu na zdarzenia  $A$  i  $B$ . Symetryczna jest nierówność  $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} > P(A)$ . Wynika stąd, że

- jeśli  $P(A|B) > P(A)$ , to  $P(B|A) > P(B)$  (relacja  $\nearrow$  jest symetryczna);
- jeśli  $P(A|B) < P(A)$ , to  $P(B|A) < P(B)$  (relacja  $\searrow$  jest symetryczna);
- jeśli  $P(A|B) = P(A)$ , to  $P(B|A) = P(B)$  (relacja  $\simeq$  jest symetryczna).

### 10. Błędne kojarzenie równości prawdopodobieństwa z symetriami i nierówności – z asymetriami

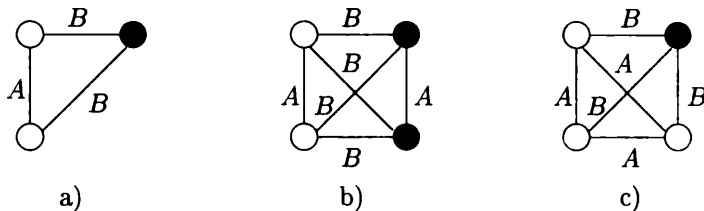
Symetrie mogą sugerować błędne wnioski na temat prawdopodobieństwa.

W przypadku gdy  $u = \frac{1}{2}$  każde dwie serie sukcesów i porażek o długości  $k$  wydają się być jednakowo dobre, są bowiem jednakowo prawdopodobnymi wynikami  $k$ -krotnego rzutu monetą. Jest to błędny wniosek. Wystarczy rozważyć serie 01 i 11. W przypadku  $u = \frac{1}{2}$  jest  $P(01 < 11) = \frac{3}{4}$  i  $P(11 < 01) = \frac{1}{4}$ .

W przypadku serii  $roo$  i  $oor$  można mówić o jeszcze innych symetriach. Jedna seria jest niejako "lustrzanym odbiciem" drugiej. Z tych symetrii zdaje się wynikać, że  $oor \approx roo$ . Mowa tu niejako o wniosku „serie te są jednakowo dobre, bo są symetryczne”. Ta argumentacja jest jednak błędna, bo  $P(roo < oor) = \frac{3}{4}$  (zob. [24], str. 222) O własnościach serii reszek i orłów, pozornie wynikających z symetrii, wspomina się w pracy [19].

W grze losuje się dwie kule z urny  $U_{2*1}$  i jeśli obie wylosowane kule są tego samego koloru (zdarzenie  $A$ ), to zwycięża gracz  $G_A$ , jeśli każda z wylosowanych kul ma inny kolor (zdarzenie  $B$ ), to zwycięża gracz  $G_B$ . Jest  $P(B) = 2 \cdot P(A)$  (zob. rys. 23a), a więc gra nie jest sprawiedliwa.

Na pytanie, jaką kulę dołożyć, aby gra była sprawiedliwa (aby  $P(A) = P(B)$ ), pada natychmiast odpowiedź, że trzeba dołożyć czarną kulę. Taką odpowiedź zdają się uzasadniać symetrie wprowadzone w zbiorze kul (tyle samo kul białych co i czarnych). Odpowiedź jest błędna. Z rysunku 23b) uzyskujemy natychmiast uzasadnienie faktu, że  $P(A) = \frac{1}{3} \neq \frac{2}{3} = P(B)$ . Symetrie źle są tu kojarzone z równością prawdopodobieństwa. Właściwa odpowiedź brzmi: należy dołożyć trzecią kulę białą. Mimo wyraźnych asymetrii urny  $U_{3*1}$  zdarzenia  $A$  i  $B$  są teraz jednakowo prawdopodobne (zob. rys. 23c).



Rysunek 23.



## 11. Zakończenie

Symetrie, jak pokazano w pracy, pozwalają racjonalizować matematyczną działalność redukując czasami skomplikowane rachunki do prostych wnioskowań. W niektórych przypadkach symetrie mogą stać się podstawą błędnych wnioskowań dotyczących prawdopodobieństwa. Przykłady takich błędnych wnioskowań opartych na symetriach podano w rozdziale 18 pracy [26]. Wykrywanie i uzasadnianie na gruncie rachunku prawdopodobieństwa wniosków sugerowanych przez symetrie i analogie jest specyficzną formą aktywności matematycznej. Praca poświęcona jest tej formie twórczości matematycznej.

### Literatura

- [1] G. Birkhoff, S. Mac Lane, *Przegląd algebry współczesnej*, PWN, Warszawa 1963.
- [2] W. G. Boltjanskij, N. J. Wilenkim, *Simmetrija v algebre*, Izdatel'stvo „Nauka”, Moskwa 1967.
- [3] M. Borovcnik, *Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik*, Wissenschaftsverlag, Mannheim-Leipzig-Wien-Zürich 1992.
- [4] F. E. Browder, S. Mac Lane, *Doniosłość matematyki*, w: *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów* (pod red. L. A. Steena), Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1983.
- [5] G. Caglioti, *The Dynamics of Ambiguity*, Springer Verlag, Berlin 1992
- [6] A. Dąbrowski, *Symetrie w probabilistyce*, *Matematyka - Społeczeństwo - Nauczanie*, 13 (VII 1994), WSR-P w Siedlcach.
- [7] *Encyklopedia Szkolna „Matematyka”*, WSiP, Warszawa 1997.
- [8] A. Engel, *Stochastik*, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1990.
- [9] A. Engel, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*, Band 2, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1976.
- [10] W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa 1987.
- [11] H. Freudenthal, *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1973.
- [12] J. Gajda-Krynicka (red), *Symetrie w sztuce i naukach humanistycznych*, Leopoldinum, Wydawnictwo dla Fundacji Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 1993.
- [13] M. Hejný, *Teoria vyučovania matematiky 2*, Slovenské Pedagogické Nakladateľ'stvo, Bratislava 1990.
- [14] R. Kapadia, M. Borovcnik, *Chance Encounters: Probability in Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London 1991.
- [15] F. Kuřina, *Jak mysl učyniť vidzialnq*, *Dydaktyka Matematyki* 20 (1998) (s. 73-88).
- [16] H. Kütting, *Didaktik der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Herder, Freiburg-Basel-Wien 1981.

- [17] *Leksykon Naukowo-Techniczny*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1989.
- [18] M. Major, *I na egzaminie można wymyślić twierdzenie*, *Matematyka 1* (1996) (s. 11-15).
- [19] M. Major, B. Nawolska, *Matematyzacja, rachunki, dedukcja i interpretacja w zadaniach stochastycznych*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1999.
- [20] J. Mozrzyimas, *Ewolucja idei symetrii*, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 1992.
- [21] J. Mozrzyimas, A. Wolański, *Harmonia sfer niebieskich i muzyka abstrakcyjnych symetrii*, Leopoldinum, Wydawnictwo dla Fundacji Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 1993.
- [22] L.B. Okuń, *Fizyka elementarnich častic*, Nauka, Moskwa 1988.
- [23] W. Penney, *Problem 95: Penney-Ante*, *Jurnal of Recreational Mathematics* 7(1974) (s. 321).
- [24] A. Płocki, *Prawdopodobieństwo wokół nas*, Wydawnictwo „Dla szkoły”, Bielsko-Biała 1997.
- [25] A. Płocki, *Stochastyka 1. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna jako matematyka „in statu nascendi”*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1997.
- [26] A. Płocki, *Stochastyka 2. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Zarys dydaktyki*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1997.
- [27] G. Polya, *Jak to rozwiązać?*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1993.
- [28] I. Stewart, *Liczby natury*, Wydawnictwo CIS, Warszawa 1996.
- [29] W. N. Tutubalin, *Teorie pravděpodobnosti*, SNTL, Praha 1978.
- [30] B. Walat, A. Walat, *Wnioskowania oparte na symetriach i analogiach przy rozwiązywaniu zadań probabilistycznych*, *Rocznik Naukowo-Dydaktyczny, Zeszyt 114, Prace z rachunku prawdopodobieństwa i jego dydaktyki*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1987.
- [31] H. Weyl, *Symetria*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1997.

*Instytut Matematyki  
Akademia Pedagogiczna  
ul. Podchorążych 2  
30-084 Kraków  
Poland  
E-mail: adplocki@wsp.krakow.pl*