Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis

Folia 5 Studia Ad Calculum Probabilitatis Eiusque Didacticam Pertinentia I (2002)

Pavel Tlustý

Sprawiedliwe i niesprawiedliwe gry stochastyczne

Abstract. The article deals with analysis of two examples of simple stochastic games. There is mainly examined probability of win of individual players G_A and G_B. Regarding these probabilities the stochastic games are consequently devided into fair and unfair.

Wydaje się rzeczą naturalną, że wszyscy ludzie od urodzenia lubią grać (w różne gry) i oczywistym jest także to, że mało kto cieszy się, gdy przegrywa. Istnieje ogromna liczba gier, które wymyślił człowiek w celach rozrywkowych. Niektóre z tych gier są sprawiedliwe (tzn. gracze mają równe szanse na zwycięstwo), w innych szanse graczy na zwycięstwo nie są równe. Analizą kilku przykładów takich gier będziemy zajmować się w tej pracy.

Przykład 1. W urnie są dwie kule, czarna i biała. Dwaj gracze G_A i G_B losują na przemian zawsze jedną kulę, która po wylosowaniu wraca do urny. W ten sposób uzyskują oni wspólną serię wyników c — czarna, b — biała. Gracz G_A losuje pierwszy. Zwycięża ten z graczy, który pierwszy wylosuje $k-$tą kulę czarną w serii, gdzie k jest liczbą naturalną ustaloną na początku gry. Ta gra losowa inspiruje następujące pytania:

1. Czy jest to gra sprawiedliwa?
2. Jakie są szanse na zwycięstwo gracza G_A, a jakie gracza G_B?
3. Jaki jest wpływ parametru k na szanse każdego z graczy?
4. W jaki sposób można przedstawioną grę zmienić tak, aby była ona sprawiedliwa?

Z doświadczeniem losowym przeprowadzanym w grze zwiążmy następujące zdarzenia
$A_k = \{k\text{-}ty\ raz\ czarna\ kula\ zostanie\ wylosowana\ przez\ gracza\ G_A\}$,
$B_k = \{k\text{-}ty\ raz\ czarna\ kula\ zostanie\ wylosowana\ przez\ gracza\ G_B\}$,

Artykuł został przygotowany w ramach grantu CEZ J06/98 č. 12100006 MŠMT ČR.
Z języka czeskiego tłumaczył Maciej Major.

Rozpatrzmy najpierw sytuację gdy $k = 1$. W tym przypadku zwycięża ten gracz, który pierwszy wylosuje czarną kulę. Ponieważ gracz G_A losuje jako pierwszy a prawdopodobieństwo wylosowania czarnej kuli jest równe $\frac{1}{2}$, zatem:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot P(A_1) = P(B_1) \quad \text{i} \quad P(A_1) + P(B_1) = 1,$$

skąd wynika, że

$$P(A_1) = \frac{2}{3}, \quad P(B_1) = \frac{1}{3} \quad \text{oraz} \quad |\, P(A_1) - P(B_1)\,| = \frac{1}{3}.$$

Prawdopodobieństwo zwycięstwa gracza G_A, który rozpoczyna, jest dwukrotnie większe niż prawdopodobieństwo zwycięstwa jego przeciwnika w grze, tj. gracza G_B.

W przypadku $k = 2$ sytuacja jest bardziej złożona. Z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym wynika, że:

$$P(A_2) = P(A_2|A_1) \cdot P(A_1) + P(A_2|B_1) \cdot P(B_1).$$

Wiemy, że $P(A_1) = \frac{2}{3}$ i $P(B_1) = \frac{1}{3}$. Z niezależności kolejnych losowań wynika, że $P(A_2|A_1) = \frac{1}{3}$, ponieważ z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ gracz G_A wylosuje czarną kulę jako pierwszy. W tej sytuacji do losowania kuli z urny przystępuje gracz G_B (w „drugiej serii" gracze jakby zamienili się miejscami). W analogiczny sposób uzyskamy, że $P(A_2|B_1) = \frac{2}{3}$. Po podstawieniu do powyższego wzoru na $P(A_2)$ dostajemy, że

$$P(A_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9},$$

skąd już w oczywisty sposób wynika, że $P(B_2) = \frac{5}{9}$.

W przypadku $k = 2$ w lepszej sytuacji jest gracz G_B, ale — całkowicie zgodnie z naszą intuicją — gra jest „sprawiedliwsza" (ściślej: jest „mniej niesprawiedliwa"), ponieważ

$$|\, P(A_2) - P(B_2)\,| = \frac{1}{9}.$$

Analogiczne wnioski można uzyskać w przypadku $k = 3$. Mamy

$$P(A_3) = \frac{14}{27}, \quad P(B_3) = \frac{13}{27} \quad \text{oraz} \quad |\, P(A_3) - P(B_3)\,| = \frac{1}{27}.$$

Na podstawie rozważań dla $k = 1, 2, 3$ możemy sformułować hipotezę co do postaci rozwiązania dla dowolnego naturalnego k. Dla każdego k nieparzystego gra jest korzystniejsza dla gracza G_A, natomiast dla k parzystego gra jest korzystniejsza dla jego partnera. Wraz ze wzrostem k zmniejszają się szanse tego gracza, który losuje pierwszy, a to oznacza, że gra staje się „sprawiedliwsza" (bo „mniej niesprawiedliwa").

Niech k będzie dowolną liczbą naturalną. Rozważmy najpierw k nieparzyste, tj. $k = 2n + 1$. Obliczając $P(A_{2n+1})$ dostajemy rekurencyjnie pomocniczą tabelę, która zawiera wszystkie możliwości wylosowania $(2n + 1)$-szej czarnej kuli:

$(2n-1)$-szą czarną kulę wylosuje gracz	$(2n)$-tą czarną kulę wylosuje gracz	$(2n+1)$-szą czarną kulę wylosuje gracz	prawdopodobieństwo zdarzenia
G_A	G_A	G_A	$P(A_{2n-1}) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$
G_A	G_B	G_A	$P(A_{2n-1}) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$
G_B	G_A	G_A	$P(B_{2n-1}) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$
G_B	G_B	G_A	$P(B_{2n-1}) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$

Tabela 1.

Z tabeli 1. wynika, że:

$$\begin{aligned}
P(A_{2n+1}) &= \\
&= P(A_{2n-1}) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + P(A_{2n-1}) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \\
&\quad + P(B_{2n-1}) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + P(B_{2n-1}) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{9} \cdot P(A_{2n-1}) + \frac{4}{9} \cdot P(A_{2n-1}) \\
&\quad + \frac{2}{9} \cdot (1 - P(A_{2n-1})) + \frac{2}{9} \cdot (1 - P(A_{2n-1})) \\
&= \frac{1}{9} \cdot P(A_{2n-1}) + \frac{4}{9}.
\end{aligned}$$

Z faktu, że $P(A_1) = \frac{2}{3}$, wynika, że

$$\begin{aligned}
(A_{2n+1}) &= \frac{1}{9}\left[\ldots\left(\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\right)+\frac{4}{9}\right)+\frac{4}{9}\right)\ldots\right]+\frac{4}{9} \\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3^{2n+1}}\right),
\end{aligned}$$

a zatem

$$P(B_{2n+1}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{2n+1}}\right) \quad \text{oraz} \quad P(A_{2n+1}) - P(B_{2n+1}) = \frac{1}{3^{2n+1}}.$$

W przypadku, gdy $k = 2n+1$, gra jest korzystniejsza dla gracza G_A i prawdopodobieństwo jego zwycięstwa jest o $\frac{1}{3^{2n+1}}$ większe niż prawdopodobieństwo zwyciąstwa gracza G_B.

Rozważmy teraz przypadek, gdy k jest liczbą parzystą, tj. gdy $k = 2n$. Analogicznie jak w poprzednim przypadku znajdziemy $P(A_{2n})$ rekurencyjnie wykorzystując tabelę:

$(2n-2)$-gą czarną kulę wylosuje gracz	$(2n-1)$-szą czarną kulę wylosuje gracz	$(2n)$-tą czarną kulę wylosuje gracz	prawdopodobieństwo zdarzenia
G_A	G_A	G_A	$P(A_{2n-2}) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$
G_A	G_B	G_A	$P(A_{2n-2}) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$
G_B	G_A	G_A	$P(B_{2n-2}) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$
G_B	G_B	G_A	$P(B_{2n-2}) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$

Tabela 2.

Z tabeli 2. wynika, że:

$$\begin{aligned}
P(A_{2n}) &= P(A_{2n-2}) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + P(A_{2n-2}) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \\
&\quad + P(B_{2n-2}) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + P(B_{2n-2}) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{9} \cdot P(A_{2n-2}) + \frac{4}{9} \cdot P(A_{2n-2}) \\
&\quad + \frac{2}{9} \cdot (1 - P(A_{2n-2})) + \frac{2}{9} \cdot (1 - P(A_{2n-2})) \\
&= \frac{1}{9} \cdot P(A_{2n-2}) + \frac{4}{9}.
\end{aligned}$$

Z faktu, że $P(A_2) = \frac{4}{9}$, wynika, iż

$$\begin{aligned}
P(A_{2n+2}) &= \frac{1}{9}\left[\ldots\left(\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\right)+\frac{4}{9}\right)+\frac{4}{9}\right)\ldots\right]+\frac{4}{9} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{2n}}\right),
\end{aligned}$$

a stąd już łatwo wyliczamy, że

$$P(B_{2n}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3^{2n}}\right) \quad \text{oraz} \quad |\, P(A_{2n}) - P(B_{2n}) \,| = \frac{1}{3^{2n}}.$$

W przypadku, gdy $k = 2n$, gra jest – przeciwnie niż to było poprzednio – korzystna dla gracza G_B i prawdopodobieństwo, że gracz G_B zwycięży, jest o $\frac{1}{3^{2n}}$ większe niż prawdopodobieństwo, że zwycięży gracz G_A.

Pozostało jeszcze znaleźć odpowiedź na pytanie, jak zmienić regulamin gry, aby była ona sprawiedliwa (pytanie 4.). Możemy to uczynić na kilka sposobów:

1. Można najpierw losować gracza, który będzie losował kulę jako pierwszy. Mamy na myśli losowanie, w którym obaj gracze mają równe szanse. Tym samym wprowadzamy do gry rundę wstępną. Jest to naturalna metoda uczynienia gry sprawiedliwą. Łatwo wykazać, że jeśli każdy z graczy G_A i G_B może z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ zostać graczem, który rozpoczyna, to gra jest sprawiedliwa dla dowolnego naturalnego k.

2. Można zmienić prawdopodobieństwo wylosowania czarnej kuli, zmieniając liczby kul białych i czarnych w urnie.

   Załóżmy, że prawdopodobieństwo wylosowania czarnej kuli z urny wynosi u, gdzie $u \in (0, 1)$. Zbadajmy, czy istnieje takie u w przedziale (0,1), aby gra była sprawiedliwa? W tym przypadku

   $$P(A_1) = u + (1-u)^2 \cdot u + (1-u)^4 \cdot u + (1-u)^6 \cdot u + \ldots = \frac{u}{1-(1-u)^2}.$$

   Rozwiązaniem równania $\frac{u}{1-(1-u)^2} = \frac{1}{2}$ jest $u = 0$, a to oznacza, że w urnie nie ma czarnych kul, co pozostaje w sprzeczności z regulaminem opisanej gry. Nietrudno zauważyć, że jeśli u maleje (w urnie wzrasta liczba kul białych), to gra staje się coraz bardziej „sprawiedliwsza". Nie można jednak dobrać składu urny, aby obaj gracze mieli równe szanse na zwycięstwo.

3. Można dokładać kule do urny i równocześnie zmienić zasady losowania następująco: jeśli zostanie wylosowana biała kula, to nie wraca ona do urny (przez to nie będzie zachowany postulat niezależności kolejnych losowań). Sytuację tę szczegółowo omówimy w kolejnym przykładzie.

Przykład 2. W urnie są dwie kule białe i dwie czarne. Dwaj gracze G_A i G_B losują na przemian zawsze jedną kulę. Jeśli wylosowana kula jest biała, to wkłada się ją z powrotem do urny, jeśli wylosowana kula jest czarna, to nie zwraca się jej do urny. Gracz G_A losuje pierwszy. Zwycięża ten z graczy, który pierwszy wylosuje drugą czarną kulę z urny. Dla każdego z graczy znajdźmy prawdopodobieństwo jego zwycięstwa w takiej grze losowej. Zapytajmy także, czy dokładając do urny kule można można sprawić, że gra będzie sprawiedliwa.

Prawdopopdobieństwo wylosowania z urny pierwszej kuli czarnej jest równe $\frac{1}{2}$. Z przykładu 1. wiadomo, że gracz G_A wylosuje pierwszą czarną kulę z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$, gracz G_B zaś z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$.

Prawdopodobieństwo wylosowania drugiej czarnej kuli jest równe $\frac{1}{3}$ (w urnie została jedna czarna kula i dwie białe). Gracz, który jako pierwszy stoi przed szansą wylosowania drugiej czarnej kuli, może tę kulę wylosować z prawdopodobieństwem u, które wyznaczymy z następującej równości:

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot u=(1-u).$$

Wynika stąd, że $u=\frac{3}{5}$ a $1-u=\frac{2}{5}$. Z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym wynika, że

$$P(A_2)=P(A_2|A_1)\cdot P(A_1)+P(A_2|B_1)\cdot P(B_1).$$

Wiemy, że $P(A_1)=\frac{2}{3}$, $P(B_1)=\frac{1}{3}$, $P(A_2|A_1)=\frac{2}{5}$ i $P(A_2|B_1)=\frac{3}{5}$, a więc

$$P(A_2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{15}\approx 0.4666.$$

Z powyższych faktów wynika, że $P(B_2)=\frac{8}{15}\approx 0.5333$. Gra losowa nie jest więc sprawiedliwa.

Uogólnimy sytuację z przykładu 2. na przypadek urny, w której są dwie kule czarne i n kul białych. Rozstrzygnijmy, czy można znaleźć takie n, aby omawiana gra była sprawiedliwa?

Obliczmy najpierw $P(A_1)$. Prawdopodobieństwo wylosowania pierwszej kuli czarnej wynosi $\frac{2}{n+2}$. Liczby $P(A_1)$ i $P(B_1)$ spełniają następujący układ warunków:

$$\left(1-\frac{2}{n+2}\right)\cdot P(A_1)=P(B_1) \quad \text{i} \quad P(A_1)+P(B_1)=1,$$

a zatem

$$P(A_1)=\frac{n+2}{2n+2} \quad \text{i} \quad P(B_1)=\frac{n}{2n+2}.$$

Prawdopodobieństwo wylosowania drugiej czarnej kuli jest równe $\frac{1}{n+1}$. Gracz, który jako pierwszy stoi przed szansą wylosowania drugiej czarnej kuli, może ją wylosować z prawdopodobieństwem u, które spełnia warunek:

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot u=(1-u),$$

czyli

$$u=\frac{n+1}{2n+1} \quad \text{i} \quad 1-u=\frac{n}{2n+1},$$

a zatem

$$P(A_2)=P(A_2|A_1)\cdot P(A_1)+P(A_2|B_1)\cdot P(B_1).$$

Wiadomo, że

$$P(A_1)=\frac{n+2}{2n+2},\quad P(B_1)=\frac{n}{2n+2},\quad P(A_2|A_1)=\frac{n}{2n+1},\quad P(A_2|B_1)=\frac{n+1}{2n+1},$$

$$P(A_2) = \frac{n}{2n+1}\cdot\frac{n+2}{2n+2}+\frac{n+1}{2n+1}\cdot\frac{n}{2n+2}=\frac{2n^2+3n}{4n^2+6n+2},$$

a zatem

$$P(B_2) = \frac{2n^2+3n+2}{4n^2+6n+2}.$$

Zauważmy, że $P(A_2) < P(B_2)$ dla każdego n. Gra jest zawsze korzystniejsza dla gracza G_B, i wraz ze wzrostem n staje się „sprawiedliwsza". Możemy, na przykład, poszukiwać takiego najmniejszego n, aby

$$P(B_2) - P(A_2) \leqslant 0.01,$$

czyli najmniejszego naturalnego n spełniającego nierówność

$$\frac{2}{4n^2+6n+2} \leqslant 0.01.$$

Rozwiązaniem jest $n = 7$. Jeśli w wyżej opisanej grze kula jest losowana z urny, w której są dwie kule czarne i 7 białych, to szanse na zwycięstwo graczy G_A i G_B różnią się mniej niż o 1%.

Literatura

[1] A. Płocki, *Pravděpodobnost kolem nás – počet pravděpodobnosti v úlohách a problémech*, Acta Universitatis Purkynianae 68, Studia Matematica IV, Ústí nad Labem 2001.

[2] A. Rényi, *Teorie pravděpodobnosti*, Academia, Praha 1972.

[3] G. Székely, *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1986.

[4] V. N. Tutubalin, *Teorie pravděpodobnosti*, SNTL, Praha 1978.

Jihočeská univerzita
Pedagogická fakulta
katedra matematiky
Jeronýmova 10
371 15 České Budějovice
Czech Republic
E-mail: tlusty@pf.jcu.cz