Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis

Folia 5 Studia Ad Calculum Probabilitatis Eiusque Didacticam Pertinentia I (2002)

Stanisław Wołodźko

# Kalkulatory graficzne i komputery a testy istotności

**Abstract.** In the first part of this paper we show how to determine, using a CASIO graphic calculator, the power of a significance test. The suitable programmes, prepared by the author, are attached in the annex. In the second part we discuss some abilities of the computer programme MATHEMAICA to make graphs of the power functions of significance test.

## 1. Wstęp

W pierwszej części pracy podajemy przykłady zastosowania kalkulatorów graficznych do badania mocy testu istotności. Dołączone w Aneksie programy (opracowane przez autora w języku wewnętrznym kalkulatora graficznego CASIO) stosuje się do ilustracji problemów dydaktycznych dotyczących wyboru:
a) obszaru krytycznego,
b) liczebności próby losowej,
c) testu istotności jednostronnego lub obustronnego oraz
d) oceny mocy testu przez wyznaczenie prawdopodobieństw błędów pierwszego rodzaju i drugiego rodzaju.
W drugiej części omawiamy pewne możliwości programu komputerowego MATHEMATICA do sporządzania wykresów funkcji operacyjno-charakterystycznych testów istotności.

## 2. Zastosowania kalkulatora graficznego CASIO

Rozważamy doświadczenie losowe $d$ o dwu możliwych wynikach: sukces lub porażka. Niech prawdopodobieństwo sukcesu wynosi $p \in (0,1)$, wówczas prawdopodobieństwo porażki jest równe $1-p$. Rozważamy dwie hipotezy: hipotezę zerową $H_0 : p = p_0$ oraz hipotezę alternatywną $H_1 : p = p_1$, gdzie $p_0 \neq p_1$ są danymi liczbami z przedziału $(0,1)$. Posłużymy się statystyką $X$ o rozkładzie Bernoulliego z parametrami $N$ oraz $p$. Obszarem krytycznym statystyki $X$ nazywamy każdy podzbiór $U$ zbioru $(N+1)$-elementowego $\{0,1,\ldots,N\}$ wszystkich możliwych wartości statystyki $X$. Wybór zbioru $U$ określa test istotności.

Prawdopodobieństwem błędu pierwszego rodzaju (poziomem istotności) jest liczba $\alpha = P(X \in U|p = p_0)$, prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju wynosi $\beta = P(X \notin U|p = p_1)$. W programie BERN przyjęto przykładowo $p_0 = \frac{1}{2}$ oraz $p_1 = \frac{1}{3}$ (oczywiście można te dane zastąpić innymi), natomiast liczba prób $N$ $(2 \leqslant N \leqslant 250)$ jest opcjonalna. Program ten należy wykonać przed programami typu Test. Jeżeli np. przyjmiemy w programie BERN $N = 30$, a następnie w programie TEST wybierzemy obszar krytyczny $U = \{1, 5, 12, 17, 20\}$ liczący $K = 5$ elementów, to otrzymamy wynik przedstawiony na rysunku 1.

```
N = 30        K = 5
ALFA = 0.000029738
BETA = 0.987770276
```

**Rysunek 1.**

Ponieważ $\beta \approx 0.99$, więc wybór obszaru krytycznego $U$ nie jest udany.

Przyjmijmy obecnie w programie BERN $N = 100$. Zobaczymy, jak ocenić stosowane zwykle testy na poziomie istotności $\alpha = 0.05$. Programy TESTLW (test lewostronny), TESTPW (test prawostronny) oraz TESTOB (test obustronny) dają wyniki zilustrowane na rysunku 2 (liczba $I$ oznacza liczbę elementów ze zbioru $\{0, 1, \ldots, 100\}$ należących do zbioru krytycznego $U$).

| | | |
|---|---|---|
| I= 42<br>ALFA= 0.05<br>BETA= 0.04337149037<br>END | I= 42<br>ALFA= 0.05<br>BETA= 0.9999998709<br>END | I= 40<br>ALFA= 0.05<br>BETA= 0.09662305633<br>END |
| a) test lewostronny | a) test prawostronny | a) test obustronny |

**Rysunek 2.**

Jak należało oczekiwać, najlepszy jest test lewostronny, test obustronny można też stosować, natomiast należy odrzucić test prawostronny.

## 3. Przykadowe wykresy funkcji OC testu istotności

Przyjmijmy obecnie, iż nieznana jest wartość przeciętna $m$ cechy $X$ o rozkładzie normalnym $N: (N, \sigma)$, przy czym odchylenie standardowe $\sigma$ jest znane. Weryfikujemy hipotezę zerową $H_0(m = m_0)$, przy czym alternatywną jest hipoteza $H_1(m = m_1)$, gdzie $m_1 \neq m_0$ Funkcją OC tego testu jest funkcja $f$ zmiennej $x = \frac{|m - m_0|}{\sigma}$ dana wzorem

$$f(x) = \Phi(x\sqrt{n} + u_\alpha) - \Phi(x\sqrt{n} - u_\alpha)$$

dla $x \geqslant 0$, gdzie $\Phi$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego standaryzowanego $N(0,1)$, $u_\alpha$ oznacza wartość krytyczną na poziomie istotności $\alpha$ statystyki o rozkładzie $N(0,1)$ oraz $n$ jest liczebnością próby losowej.

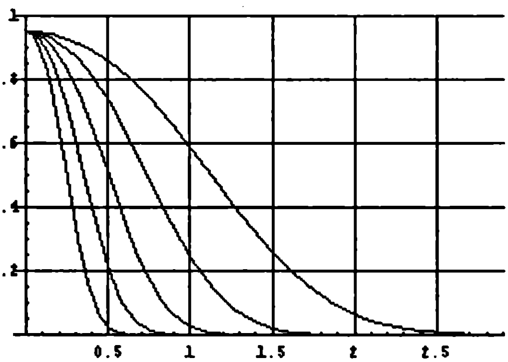
W programie MATHEMATICA 3.0 dystrybuanta $\Phi$ jest zaprogramowana w pakiecie **Statistics'NormalDistribution'** jako funkcja **CDF[NormalDistribution[0,1],x]**. Można też funkcję $\Phi$ określić przy pomocy funkcji błędu **Erf** danej wzorem **Erf[x]** $= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, a mianowicie

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\mathrm{Erf}\left[\frac{x}{\sqrt{2}}\right] + \frac{1}{2}.$$

W poniższym przykładzie (rys. 3) podajemy wykresy funkcji OC rozważanego testu na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ dla $n = 3, 7, 15, 30$ oraz 60. Funkcja ta jest oznaczona symbolem `f[x_, n_, u_]`, gdzie `u` jest wartością krytyczną.

$$\mathtt{f[x\_,\ n\_,\ u\_]} := 0.5 * \mathtt{Erf}[\frac{\mathtt{x} * \sqrt{\mathtt{n}} + \mathtt{u}}{\sqrt{2}}] - 0.5 * \mathtt{Erf}[\frac{\mathtt{x} * \sqrt{\mathtt{n}} - \mathtt{u}}{\sqrt{2}}]$$

```
u := 1.96
Plot[{f[x, 3, u], f[x, 7, u], f[x, 15, u], f[x, 30, u], f[x, 60, u]},
 {x, 0, 3},GridLines ->Automatic, PlotRange ->{0,1}]
```




- Graphics -

**Rysunek 3.**

Jeżeli w rozważanym przykładzie testu istotności nie jest znane odchylenie standardowe, to funkcja OC wyraża się poprzez dystrybuantę zmiennej losowej mającej rozkład niecentralnego $t$ Studenta. Dystrybuanta tej statystyki jest w MATHEMATICA 3.0 zaprogramowana w pakiecie **Statistics'ContinuousDistributions'** jako funkcja

$$\mathbf{CDF[NoncentralStudentTDistribution[n-1, q \cdot \sqrt{n}\,], x]},$$

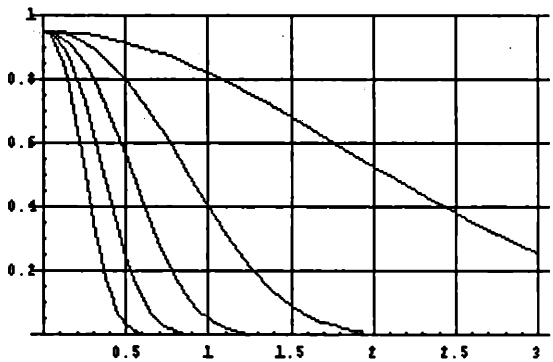
gdzie **n** jest liczebnością próby losowej (a więc liczba stopni swobody wynosi **n** $-$ 1) , natomiast $\mathbf{q} = \frac{m-m_0}{\sigma}$. Funkcja OC wyraża się wzorem

$$f(x) = \mathbf{CDF[NoncentralStudentTDistribution[n-1, x \cdot \sqrt{n}], t_\alpha]}$$
$$-\mathbf{CDF[NoncentralStudentTDistribution[n-1, x \cdot \sqrt{n}], -t_\alpha]},$$

gdzie $t_\alpha$ jest wartością krytyczną statystyki $t$ Studenta z parametrami $\alpha$ oraz $n-1$.

Podajemy obecnie wykresy funkcji OC rozważanego testu na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ dla $n = 3, 7, 15, 30$ oraz 60 (rys. 4.). W miejsce **u** wstawiamy odpowiednio wartości krytyczne statystyki $t$ Studenta: $4.303, 2.447, 2.145, 2.045$ oraz 2.001. Funkcja **Pom** została wprowadzona przez autora dla umożliwienia oraz przyśpieszenia wykonania przez program odpowiednich wykresów.

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`
f[x_, n_, u_] := CDF[NoncentralStudentTDistribution[n - 1, x * √n ], u] -
  CDF[NoncentralStudentTDistribution[n - 1, x * √n ], -u]
Pom[x_, n_, u_, c_] := If[x <= c, f[x, n, u], 0]
Plot[{f[x, 3, 4.303], Pom[x, 7, 2.447, 1.94],
  Pom[x, 15, 2.145, 1.22], Pom[x, 30, 2.045, 0.84], Pom[x, 60, 2.001, 0.569]},
  {x, 0, 3}, GridLines ->Automatic, PlotRange ->{0, 1}]
```




Graphics -

**Rysunek 4.**

Rysunki 3 oraz 4 (z większą ilością wykresów funkcji OC) można znaleźć w książce M. Fisza [1] (s. 461, 463).

## 4. Aneks

### Programy w języku wewnętrznym kalkulatora graficznego CASIO

```
Filename:BERN
 'S.W. KRAKOW 2000↵
 "2≤N≤250"↵
 "N"?→N↵
 1÷2→P↵
 1÷3→Q↵
 {N+1,3}→Dim Mat A↵
 0→Mat A[1,1]↵
 (1-P)^N→Mat A[1,2]↵
 (1-Q)^N→Mat A[1,3]↵
 For 1→I To N↵
 I→Mat A[I+1,1]↵
 (N-I+1)P×Mat A[I,2] ÷ (I(1-P)) →Mat A[I+1,2]↵
 (N-I+1)Q×Mat A[I,3] ÷ (I(1-Q)) →Mat A[I+1,3]↵
 Next↵
 "END"
```

```
Filename:TESTLW
 'S.W. KRAKOW 2000↵
 ClrText↵
 Dim Mat A→List 6↵
 List 6[1]-1→N↵
 "N=":N≈
 "ALFA="?→A↵
 0→I:0→C↵
 Lbl 1↵
 Mat A[I+1,2] →D↵
 If C+D<A↵
 Then C+D→C:I+1→I↵
 Goto 1↵
 IfEnd↵
 0→B↵
 For 1→J To I↵
 Mat A[J,3]+B→B↵
 Next↵
 "I=":I≈
 "ALFA=":A≈
 "BETA=":1-B≈
 "END"
```

```
Filename:TESTPW
 'S.W. KRAKOW 2000↵
 ClrText↵
 Dim Mat A→List 6↵
 List 6[1]-1→N↵
 "N=":N≈
 "ALFA="?→A↵
 0→I:0→C↵
 Lbl 1↵
 Mat A[N+1-I,2] →D↵
 If C+D<A↵
 Then C+D→C:I+1→I↵
 Goto 1↵
 IfEnd↵
 0→B↵
 For 1→J To I↵
 Mat A[N+2-J,3]+B→B↵
 Next↵
 "I=":I≈
 "ALFA=":A≈
 "BETA=":1-B≈
 "END"
```

```
Filename:TESTOB
 'S.W. KRAKOW 2000↵
 ClrText↵
 Dim Mat A→List 6↵
 List 6[1]-1→N↵
 "N=":N≈
 "ALFA="?→A↵
 0→I:0→C↵
 Lbl 1↵
 Mat A[I+1,2]+Mat A[N+1-I,2] →D↵
 If C+D<A↵
 Then C+D→C:I+1→I↵
 Goto 1↵
 IfEnd↵
 0→B↵
 For 1→J To I↵
 Mat A[J,3]+Mat A[N+2-J,3]+B→B↵
 Next↵
 "I=":I≈
 "ALFA=":A≈
 "BETA=":1-B≈
 "END"
```

```
Filename:TEST
 'S.W. KRAKOW 2000↵
 ClrText↵
 " ZBIOR SUKCESOW LICZY"↵
 Locate 1,2,"N+1 ELEMENTOW:"↵
 " {0,1,...,N}."↵
 " OBSZAR KRYTYCZNY, TO"↵
 Locate 1,5,"DOWOLNY PODZBIOR TEGO"↵
 Locate 1,6,"ZBIORU."↵
 Locate 18,7,"EXIT"↵
 Lbl 1↵
 Getkey↵
 If Ans=0↵
 Then Goto 1↵
 IfEnd↵
 Dim Mat A→List 6↵
 List 6[1]-1→N↵
 ClrText↵
 "N - LICZBA PROB       BERNOULLIEGO"↵
 "N=":Locate 3,3,N↵
 "K - MOC OBSZARU KRY-     TYCZNEGO
 (0<K⩽N+1)"↵
 Do↵
 "K="?→K↵
 LpWhile (K⩽0) Or (K>N+1) Or (Int K≠K)↵
 {K+1,1}→Dim Mat B↵
 For 1→J To K↵
 Prog "NAPIS"↵
 Do↵
 "X="?→X↵
 LpWhile (X<0) Or (X>N) Or (Int X≠X)↵
 X→Mat B[J,1]↵
 Next
 0→A:0→B↵
 For 1→I To K↵
 A+Mat A[I,2] →A↵
 B+Mat A[I,3] →B↵
 Next↵
 ClrText↵
 Locate 12,1,"K = ":Locate 16,1,K↵
 " ":Fix 9↵
 "ALFA = ":Locate 8,3,A↵
 " "↵
 "BETA = ":Locate 8,5,1-B↵
 Norm↵
 Stop

Filename:NAPIS
 ClrText↵
 "N="↵
 Locate 3,1,N↵
 Locate 10,1,"K="↵
 Locate 12,1,K↵
 " "↵
 "DANA NR"↵
 Locate 9,3,J↵
 Locate 13,3,"(0⩽X⩽N)"↵
 Return↵
```

## Literatura


[1] M. Fisz, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa 1958.

[2] D. Kowalczyk, *Mathematica 2.2 Enhanced ... i statystyka matematyczna dla studentów*, Lynx-SFT.

[3] D. B. Owen, *Handbook of Statistical Tables*, Addison-Wesley publishing company, Palo Alto-London 1962.



*Instytut Matematyki*
*Akademia Pedagogiczna*
*ul. Podchorążych 2*
*30-084 Kraków*
*Poland*
*E-mail:* wolodzko@wsp.krakow.pl