Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis

Folia 23 Studia Mathematica IV (2004)

Zbigniew Powązka, Eugeniusz Wachnicki

# Sur la monotonie en moyenne des suites

*A Monsieur le Professeur Andrzej Zajtz*
*à l'oecasion de son 70 $^{\text{ème}}$ anniversaire*

**Résumé**. On donne la généralisation de la notion de suites monotones en moyenne considerée par F. Leja dans [3]. On démontre que les suites monotones en moyenne généralisées sont convergentes.

## 1. Introduction

F. Leja dans sa note [3] a étudié la convergence des suites monotones en moyenne au sens arithmétique, géométrique et harmonique. Dans la présente note, on généralise les résultats de [3] en considérant les moyennes quasi-arithmétiques et quasi-arithmétiques pondérées. F. Leja dans [3] a posé la définition suivante :

Définition 1
On dit qu'une suite $\{a_n\}$ est décroissante en moyenne

1° au sens arithmétique si

$$a_{n+2} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1}), \qquad n \in \mathbb{N}_1 = \{1, 2, \ldots\},$$

2° au sens géométrique si $a_n \geq 0$ et

$$a_{n+2} \leq \sqrt{a_n a_{n+1}}, \qquad n \in \mathbb{N}_1,$$

3° au sens harmonique si $a_n > 0$ et

$$a_{n+2} \leq \frac{2a_n a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}}, \qquad n \in \mathbb{N}_1.$$

La définition de la croissance en moyenne est analogue.

Puisque $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \geq \frac{2xy}{x+y}$ quels que soient $x, y > 0$ donc toute suite décroissante en moyenne au sens harmonique est décroissante en moyenne au sens géométrique et toute suite décroissante au sens géometrique est décroissan-

AMS (2000) Subject Classification: 40A05, 26A03.

te au sens arithmétique. Les réciproques sont fausses. Par exemple, la suite donnée par

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$$

décroît en moyenne au sens arithmétique et elle ne décroît pas en moyenne au sens géométrique car $a_{n+1} \geq \sqrt{a_n a_{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_1$ et $a_3 = 1,5 > \sqrt{a_1 a_2} = \sqrt{2}$.

Dans [3] on trouve le théorème.

Théorème 1
*Toute suite monotone en moyenne tend vers une limite finie ou infinie.*

## 2. Suites monotones en moyenne quasi-arithmétique

Soit $I$ un intervalle non dégénéré de $\mathbb{R}$ (borné ou non borné, fermé, ouvert ou semi-ouvert, mais non réduit à un point). Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et continue. J. Aczél et J. Dhombres dans [1] ont donné la définition :

Définition 2
On appelle moyenne quasi-arithmétique (associée à $f$) de deux nombres $x$ et $y$ de $I$ l'expression

$$M(x,y) = f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right).$$

Si

$f(x) = x,\ I \subset \mathbb{R}$ alors $M(x,y) = \frac{x+y}{2}$;
$f(x) = \ln x,\ I \subset (0,+\infty)$ donc $M(x,y) = \sqrt{xy}$;
$f(x) = \frac{1}{x},\ 0 \notin I \subset \mathbb{R}$ donc $M(x,y) = \frac{2xy}{x+y}$;
$f(x) = e^{ax},\ a \neq 0,\ I \subset \mathbb{R}$ donc $M(x,y) = \ln \frac{e^{ax}+e^{ay}}{2}$.

La dérnière moyenne est nommée moyenne exponentielle.

En appliquant la moyenne quasi-arithmétique on propose la définition suivante :

Définition 3
On dit qu'une suite $\{a_n\}$ est décroissante en moyenne au sens quasi-arthmétique (associée à $f$) si $a_n \in I$ et

$$a_{n+2} \leq M(a_n, a_{n+1})$$

quel que soit $n \in \mathbb{N}_1$.

La définition de la croissance en moyenne au sens quasi-arithmétique est analogue.

On va démontrer le théorème.

Théorème 2
*Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et continue et telle que $f^{-1}$ est convexe (concave) dans $I$. Toute suite décroissante (croissante) en moyenne au sens quasi-arithmétique est décroissante (croissante) en moyenne au sens arithmétique.*

*Démonstration.* Supposons $f^{-1}$ convexe dans $I$. On a

$$M(x,y) = f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right) \leq \frac{f^{-1}(f(x)) + f^{-1}(f(y))}{2} = \frac{x+y}{2}$$

quels que soient $x, y \in I$. D'où et de l'inégalité

$$a_{n+2} \leq M(a_n, a_{n+1}), \qquad n \in \mathbb{N}_1,$$

on obtient

$$a_{n+2} \leq \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}_1.$$

Si $f^{-1}$ est concave dans $I$ le raisonnement est analogue.

De même on obtient :

Théorème 3
*Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et continue et telle que $f^{-1}$ est convexe (concave) dans $I$. Toute suite croissante (décroissante) en moyenne au sens arithmétique est croissante (décroissante) en moyenne au sens quasi-arithmétique.*

L'exemple donné avant montre qu'en général les réciproques sont fausses. Notons que si la fonction $f$ vérifie l'égalité de Jensen :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}; \qquad x, y \in I$$

on a l'équivalence. Mais ce cas est trivial car l'égalité de Jensen et la monotonie stricte de $f$ implique que $f(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et la moyenne quasi-arithmétique associée à $f$ nous donne la moyenne arithmétique.

Passons maintenant à la convergence des suites monotones en moyenne au sens quasi-arithmétique.

Théorème 4
*Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et continue. Toute suite monotone en moyenne au sens quasi-arithmétique tend vers une limite (finie ou infinie).*

*Démonstration.* Supposons $f$ croissante dans $I$ et soit $\{a_n\}$ une suite décroissante en moyenne au sens quasi-arithmétique et considérons la suite $\{b_n\}$ définie par $b_n = f(a_n)$, $n \in \mathbb{N}_1$. On voit que $a_n = f^{-1}(b_n)$ et

$$a_{n+2} = f^{-1}(b_{n+2}) \le f^{-1}\left(\frac{f(a_n) + f(a_{n+1})}{2}\right) = f^{-1}\left(\frac{b_n + b_{n+1}}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

La croissance de $f$ implique que $b_{n+2} \le \frac{b_n+b_{n+1}}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}_1$. D'où et du théorème 1 de Leja on obtient la convergence de la suite $\{b_n\}$. Puisque $f$ est continue dans $I$ donc la suite $\{a_n\}$ est convergente. La démonstration dans les autres cas est analogue.

Remarque 1

Puisque les notions de croissance de la suite en moyenne considérées dans cette note sont analogues à celles de décroissance nous ne donnons dans la suite que des définitions de la décroissance.

## 3. Suites monotones en moyenne par rapport à la somme des indices.

Dans [3] on trouve :

Définition 4

Soit $p$ un nombre entier, $p \ge 2$. On dit qu'une suite $\{a_n\}$ est décroissante en moyenne (au sens artithmétique) par rapport à la somme de $p$ indices si

$$a_{|\mu|} \le \frac{1}{p}(a_{\mu_1} + a_{\mu_2} + \cdots + a_{\mu_p}), \ \mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p) \text{ et } |\mu| = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_p$$

quels que soient des nombres entiers positifs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$.

Théorème 5

*Toute suite monotone au sens de la définition 4 est convergente (vers une limite finie ou infinie).*

On peut généraliser la notion de suites monotones donnée par la définition 4 comme le suit.

Définition 5

Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone est continue. Soit $p$ un nombre entier $x$, $p \ge 2$. On dit qu'une suite $\{a_n\}$ est décroissante (au sens quasi-arithmétique) par rapport à la somme de $p$ indices si $a_n \in I$ et

$$a_{|\mu|} \le f^{-1}\left(\frac{f(a_{\mu_1}) + f(a_{\mu_2}) + \cdots + f(a_{\mu_p})}{p}\right)$$

quels que soient des nombres positifs entiers $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$.

En appliquant le raisonnement fait dans la démonstration du théorème 4 on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME 6
*Toute suite monotone en moyenne au sens de la définition 5 est convergente.*

## 4. Suites monotones en moyenne pondérée.

F. Leja en [3] a consideré la monotonie en moyenne pondérée des suites à savoir :

DÉFINITION 6
On dit qu'une suite $\{a_n\}$ est décroissante en moyenne avec le poids $\theta$, $0 < \theta < 1$, si

$$a_{n+2} \leq \theta a_n + (1-\theta)a_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}_1. \tag{1}$$

On y trouve le théorème :

THÉORÈME 7
*Toute suite monotone en moyenne au sens de la définition 6 tend vers une limite.*

On va généraliser la monotonie en moyenne avec le poids en deux directions. D'abord nous donnerons la définition de la moyenne quasi-arithmétique pondérée ([2]).

DÉFINITION 7
Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et continue. Soit $\theta \in (0,1)$. Posons

$$M_\theta(x,y) = f^{-1}(\theta f(x) + (1-\theta)f(y))$$

pour $x$ et $y$ de $I$. L'expression $M_\theta(x,y)$ est dite moyenne quasi-arithmétique pondérée.

Dans la suite admettons la définition suivante :

DÉFINITION 8
Soit $\theta \in (0,1)$. On dit qu'une suite $\{a_n\}$ est décroissante en moyenne au sens quasi-arithmétique pondérée si $a_n \in I$ et

$$a_{n+2} \leq M_\theta(a_n, a_{n+1})$$

pour $n \in \mathbb{N}_1$.

Dans la même façon qu'avant on a

Théorème 8
*Toute suite monotone en moyenne au sens de la définition 8 est convergente.*

Il est possible de généraliser la définition 6 et le théorème 7 en considérant la moyenne quasi-arithmétique pondérée par rapport à $p$ indices. Posons la définition suivante :

Définition 9
Soit $p$ un nombre entier, $p \geq 2$ et soient $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ des nombres de l'intervalle $(0,1)$ tels que $\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_p = 1$. On dit qu'une suite $\{a_n\}$ est décroissante en moyenne (au sens arithmétique pondérée) par rapport à $p$ indices si

$$a_{|\mu|} \leq \theta_1 a_{\mu_1} + \theta_2 a_{\mu_2} + \cdots + \theta_p a_{\mu_p} \tag{2}$$

quels que soient des nombres entiers positifs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$,

On va démontrer le théorème.

Théorème 9
*Toute suite monotone en moyenne au sens de la définition 9 est convergente.*

*Démonstration.* Supposons $\{a_n\}$ décroissante en moyenne au sens de la définition 9. On remarque que $\{a_n\}$ est bornée supérieurement. En effet, par récurrence on démontre que

$$a_n \leq A = \sup\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}, \qquad n \in \mathbb{N}_1.$$

Posons

$$\alpha = \liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n = \beta$$

et supposons que $\alpha$ soit fini. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $m \in \mathbb{N}_1$ tel que $a_m < \alpha + \varepsilon$, Par (2) on a

$$\begin{aligned} a_{mp} &= a_{\underbrace{m+m+\cdots+m}_{p \text{ fois}}} \\ &\leq \theta_1 a_m + \theta_2 a_m + \cdots + \theta_p a_m \\ &= a_m. \end{aligned}$$

Et donc $a_{mp} < a + \varepsilon$.

Pour $n \in \mathbb{N}_1$ et $n > mp$ on a $n = km(p-1) + r$ avec $k, r \in \mathbb{N}_1$ et $1 \leq r \leq m(p-1)$. On voit que

$$\begin{aligned} a_{m(p-1)+r} &= a_{\underbrace{m+\cdots+m}_{(p-1) \text{ fois}}+r} \\ &\leq (1-\theta_p)a_m + \theta_p a_r, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{2m(p-1)+r} &= a_{\underbrace{m+\cdots+m}_{(p-1)\text{ fois}}+m(p-1)+r}\\ &\leq (1-\theta_p)a_m + \theta_p a_{m(p-1)+r}\\ &\leq (1-\theta_p)a_m + \theta_p(1-\theta_p)a_m + \theta_p^2 a_r\\ &= (1-\theta_p^2)a_m + \theta_p^2 a_r,\end{aligned}$$

et en général

$$a_{km(p-1)+r} \leq (1-\theta_p^k)a_m + \theta_p^k a_r, \qquad k \in \mathbb{N}_1.$$

Il en résulte que

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \beta \leq a_m < \alpha + \varepsilon.$$

Puisque $\varepsilon$ a été choisi arbitrairement donc $\alpha = \beta$, ce qui prouve que $\{a_n\}$ converge vers une limite finie. Dans le cas $\alpha = -\infty$ le raisonnement analogue prouve que $\beta = -\infty$.

Maintenant posons la définition suivante :

Définition 10
On dit qu'une suite $\{a_n\}$ est décroissante en moyenne pondérée (au sens quasi-arithmétique) par rapport à $p$ indices si $a_n \in I$ et

$$a_{|\mu|} \leq f^{-1}(\theta_1 f(a_{\mu_1}) + \theta_2 f(a_{\mu_2}) + \cdots + \theta_p f(a_{\mu_p})) \tag{3}$$

quels que soient des nombres entiers positifs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$.

En posant $b_n = f(a_n)$ et en appliquant le théorème 9 par le même raisonnement comme dans la démonstration du théorème 4 on a le théorème suivant :

Théorème 10
*Toute suite monotone en moyenne au sens de la définition 10 tend vers une limite.*

## 5. Certaine modification de la monotonie en moyenne pondérée des suites

F. Leja a considéré dans [3] encore une autre sorte de la monotonie en moyenne des suites en remplaçant la condition (1) par la suivante :

$$a_{\mu+\nu} \leq \theta^{\mu}_{\mu+\nu} a_\mu + \theta^{\nu}_{\mu+\nu} a_\nu, \qquad \mu,\nu \in \mathbb{N}_1 \tag{4}$$

où $\theta^{\mu}_{\mu+\nu}$ et $\theta^{\nu}_{\mu+\nu}$ sont des nombres positifs quelconques satisfaisant à l'égalité $\theta^{\mu}_{\mu+\nu} + \theta^{\nu}_{\mu+\nu} = 1$.

On y trouve le théorème suivant.

Théorème 11
*Toute suite monotone au sens de la condition* (4) *tend vers une limite pourvu que le produit*

$$\theta^{\nu}_{\mu+\nu} \cdot \theta^{\mu+\nu}_{2\mu+\nu} \cdot \ldots \cdot \theta^{(k-1)\mu+\nu}_{k\mu+\nu}$$

*tende vers zéro quels que soient $\mu$ et $\nu$ lorsque $k \to +\infty$.*

Soit $p$ un nombre entier, $p \geq 2$. Remplaçons maintenant la condition (2) par la suivante :

$$a_{|\mu|} \leq \theta^{\mu_1}_{|\mu|} a_{\mu_1} + \cdots + \theta^{\mu_p}_{|\mu|} a_{\mu_p}, \qquad \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p \in \mathbb{N}_1, \tag{5}$$

où $\theta^{\mu_1}_{|\mu|}, \ldots, \theta^{\mu_p}_{|\mu|}$ sont des nombres positifs quelconques satisfaisant à l'égalité

$$\theta^{\mu_1}_{|\mu|} + \theta^{\mu_2}_{|\mu|} + \cdots + \theta^{\mu_p}_{|\mu|} = 1. \tag{6}$$

Posons

$$\lambda_k = \theta^{\mu_p}_{|\nu|+\mu_p} \cdot \theta^{|\nu|+\mu_p}_{2|\nu|+\mu_p} \cdot \ldots \cdot \theta^{(k-1)|\nu|+\mu_p}_{k|\nu|+\mu_p}, \tag{7}$$

où $|\nu| = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{p-1}$.

On va démontrer le théorème suivant :

Théorème 12
*Toute suite monotone en moyenne au sens de la condition* (5) *(avec* (6)*) est convergente pourvu que* $\lim_{k\to+\infty} \lambda_k = 0$.

*Démonstration.* Supposons que la suite $\{a_n\}$ vérifie la condition (5). Par récurrence on a

$$a_n \leq A \leq \sup\{a_1, a_2, \ldots, a_p\} \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N}_1.$$

Alors $\{a_n\}$ est bornée supérieurement. Posons

$$\alpha = \liminf_{n\to+\infty} a_n \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n = \beta$$

et supposons $\alpha$ fini. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $m \in \mathbb{N}_1$ tel que $a_m < \alpha + \varepsilon$. Pour $n \in \mathbb{N}_1$ et $n > mp$ on a $n = km(p-1) + r$ avec $k, r \in \mathbb{N}_1$ et $1 \leq r \leq m(p-1)$. D'après (5), (6) et (7) on obtient

$$\begin{aligned}
a_{m(p-1)+r} &= a_{\underbrace{m + \cdots + m}_{(p-1) \text{ fois}} + r} \\
&\leq (1 - \theta^{r}_{m(p-1)+r}) a_m + \theta^{r}_{m(p-1)+r} a_r \\
&= (1 - \lambda_1) a_m + \lambda_1 a_r, \\
a_{2m(p-1)+r} &= a_{\underbrace{m + \cdots + m}_{(p-1) \text{ fois}} + m(p-1) + r} \\
&\leq \left(1 - \theta^{m(p-1)+r}_{2m(p-1)+r}\right) a_m + \theta^{m(p-1)+r}_{2m(p-1)+r} a_{m(p-1)+r} \\
&\leq (1 - \lambda_2) a_m + \lambda_2 a_r.
\end{aligned}$$

et en général

$$a_{km(p-1)+r} \leq (1-\lambda_k)a_m + \lambda_k a_r, \qquad k \in \mathbb{N}_1.$$

Faisons tendre $k$ vers l'infinie. Par supposition $\lambda_k \to 0$ et donc

$$\beta = \limsup_{n\to+\infty} a_n = \limsup_{k\to+\infty} a_{km(p-1)+r} \leq a_m < \alpha + \varepsilon.$$

Puisque $\varepsilon$ a été choisi arbitrairement donc $\alpha = \beta$. Si $\alpha = -\infty$, le raisonnement est similaire.

En appliquant la méthode de la démonstration du théorème 4 on généralise le résultat du théorème 12 comme suit :

Théorème 13
*Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et continue. Soit $p$ un nombre entier $\geq 2$. Toute suite $\{a_n\}$ satisfaisant à la condition $a_n \in I$, $n \in N_1$ et*

$$a_{|\mu|} \leq f^{-1}(\theta^{\mu_1}_{|\mu|} f(a_{\mu_1}) + \cdots + \theta^{\mu_p}_{|\mu|} f(a_{\mu_p}))$$

*tend vers une limite où $\theta^{\mu_1}_{|\mu|}, \ldots, \theta^{\mu_p}_{|\mu|}$ sont des nombres positifs quelconques vérifiant la condition* (6) *ainsi que la condition* $\lim_{k\to+\infty} \lambda_k = 0$*, où $\lambda_k$ est donnée par* (7)*.*

## 6. Sur le problème de F. Leja

F. Leja dans [3] a posé le problème suivant :
Soient $p$ et $q$ deux nombres entiers positifs quelconques fixes et $\{a_n\}$ suite remplissant ou bien la condition

$$\frac{1}{p}(a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}) \leq \frac{1}{q}(a_{n+p+1} + \cdots + a_{n+p+q}) \tag{8}$$

pour $n \in \mathbb{N}_1$ ou bien la condition

$$\frac{1}{p}(a_{\mu_1} + \cdots + a_{\mu_p}) \leq \frac{1}{q}(a_{\nu_1} + a_{\nu_2} + \cdots + a_{\nu_q}) \tag{9}$$

où $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ et $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q$ sont des indices quelconques de $\mathbb{N}_1$ mais tels qu'on ait

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_p = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_p.$$

Une telle suite tend vers une limite ?

F. Leja a remarqué ensuite que la réponse est positive dans le cas où l'un des nombres $p$ et $q$ est équal à 1 et l'autre est supérieur à 1. Il est facile de trouver un contrexemple qui montre que cette affirmation est fausse. En effet, en posant $a_n = (-2)^n$ on voit que cette suite remplit la condition (8) pour $p = 1$ et $q = 2$ si bien qu'elle ne converge pas. De plus, elle n'est ni bornée supérieurement ni bornée inférieurement. Quand même, le théorème 5 nous donne la réponse affirmative si $p > 1$ et $q = 1$.

Notons encore que la réponse est aussi négative dans le cas où $p$ et $q$ sont des nombres pairs et la suite remplit la condition (8). Il suffit de considérer la suite définie par $a_n = (-1)^n$.

## Travaux cités

[1] J. Aczél, J. Dhombres, *Functional equation in several variables*, Encyclop. Math. and its Appl. v. 31, Cambridge Univ. Press., Cambridge – New York – New Rochelle – Melbourne – Sydney, 1989.

[2] J. Bass, *Fonctions de corrélation, fonctions pseudo-aléatoires et applications*, Masson, Paris, 1984.

[3] F. Leja, *Sur les suites monotones en moyenne*, Ann. Soc. Pol. Math. **19** (1946), 133-139.

*Institute of Mathematics*
*Pedagogical University*
*ul. Podchorążych 2*
*PL-30-084 Kraków*
*Poland*
*E-mail:* zpowazka@ap.krakow.pl
*E-mail:* euwachni@ap.krakow.pl