ADAM PŁOCKI

Łańcuchy Markowa w aspekcie dwuwymiarowego grafu stochastycznego i stochastycznego grafu przepływu

1. WPROWADZENIE

Radykalne reformy matematyki szkolnej opierające jej nauczanie na bazie ogólnych struktur i ogólnych pojęć scalających różne dziedziny matematyki nie wpłynęły zasadniczo na trwające od wieków tendencje do klasyfikacji matematyki nauczanej w szkole. Klasyfikacja ta przejawia się w układzie podręczników, zwłaszcza w problematyce matematycznych zadań, a nawet w układzie zbiorów zadań, w których grupuje się zadania nie tylko pod kątem poszczególnych działów matematyki, ale także pojęć i twierdzeń każdego z działów. Poszukiwanie pomostów scalających w naturalny sposób rozmaite działy matematyki, a więc pomostów umożliwiających realizowanie w nauczaniu matematyki idei integracji wewnętrznej, zwanej ideą fuzjonizmu, stało się jednym z problemów dydaktyki matematyki.

Wejście do nauczania matematyki elementów probabilistyki wniosło nowe okazje do realizacji tej idei, choć ten walor problematyki probabilistycznej nie doczekał się jeszcze właściwego uznania w nauczaniu matematyki.

Matematyczna obróbka zjawisk zwanych losowymi, proces matematyzacji odkrywanych na ich tle relacji, a więc analiza, opis i porządkowanie tych zjawisk i towarzyszących im stosunków jakościowych i ilościowych środkami matematycznymi, opierają się na pojęciach, strukturach i narzędziach rozmaitych dziedzin matematyki, od geometrii, poprzez teorię mnogości, logikę, arytmetykę, aż po analizę i algebrę. Narzędziem rozwiązywania wielu problemów probabilistycznych stają się pojęcia i twierdzenia rozmaitych - zdawałoby się odległych w swoim charakterze od probabilistyki - działów matematyki.

Źródłem problematyki probabilistycznej a zarazem surowcem do matematycznej twórczości mogą być na lekcjach matematyki gry losowe. Przeprowadzane w nich schematy doświadczalne są najczęściej znanymi w probabilistyce łańcuchami Markowa. Matematyczna obróbka tych schematów, prowadząca do konstrukcji modelu probabilistycznego, może wnosić do nauczania probabilistyki nowe elementy inspirujące rozmaite formy matematycznych aktywności, a równocześnie może wprowadzać potrzebę wykorzystania pojęć i metod typowych dla innych działów matematyki.

Źródłem wielu form twórczości matematycznej staje się problem konstrukcji modelu probabilistycznego dla spotkanego na lekcji schematu doświadczalnego. Dalsze rozważania dotyczyć będą tzw. ziarnistych doświadczeń losowych.

Modelem probabilistycznym ziarnistego doświadczenia losowego nazywamy parę (W, p), gdzie W jest co najmniej dwuelementowym i co najwyżej przeliczalnym zbiorem, a p funkcją określoną na W i spełniającą układ warunków:

(r1) $\quad p(w) \geqslant 0$ dla każdego $w \in W$,

(r2) $$\sum_{w \in W} p(w) = 1.$$

Zbiór W nazywa się przestrzenią zdarzeń elementarnych, albo przestrzenią wyników, a jego elementy - zdarzeniami elementarnymi, albo wynikami. Elementy zbioru W interpretowane są jako wyniki doświadczenia losowego.

Funkcję p nazywa się rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze W, a jej wartość dla elementu w z tego zbioru nazywa się prawdopodobieństwem wyniku w.

Niech X będzie funkcją ze zbioru W w zbiór liczb rzeczywistych. W przypadku modelu probabilistycznego doświadczenia losowego ziarnistego każdą taką funkcją nazywamy zmienną losową. Rozkładem zmiennej losowej X nazywajmy funkcję p_X określoną na zbiorze X(W) wzorem:

(z1) $$p_X(x_j) = \sum_{X(w)=x_j} p(w) \qquad \text{dla } x_j \in X(W).$$

Jednym z typowych problemów teorii probabilistycznej jest budowanie reguł określania modeli probabilistycznych dla wieloetapowych doświadczeń losowych na podstawie znajomości takich modeli dla poszczególnych etapów. Przedmiotem niniejszej pracy jest propozycja pewnej metody konstrukcji modelu probabilistycznego dla schematu doświadczalnego zwanego łańcuchem Markowa,opartej na interpretacji przebiegu schematu doświadczalnego błądzeniem losowym po dwuwymiarowym grafie stochastycznym. Obok idei współrzędnych narzędziem wykorzystywanym do określania rozkładów pewnych zmiennych losowych staje się w tej interpretacji rachunek algebraiczny. Dzięki wspomnianej interpretacji, uznana za fragment wyższej matematyki, teoria łańcuchów Markowa staje się dostępna dla ucznia szkoły średniej, a związane z łańcuchami Markowa problemy matematyczne dają okazję do integrowania szkolnej matematyki w naturalnych sytuacjach.

2. JEDNORODNY ŁAŃCUCH MARKOWA O s STANACH

Schemat doświadczalny, zwany łańcuchem Markowa, jest wieloetapowym doświadczeniem losowym. Każdy etap jest doświadczeniem o tym samym zbiorze wyników. Przyjmijmy, że jest to s-elementowy zbiór $(s \geqslant 2)$. Dla uproszczenia ponumerujmy te wyniki i odtąd numer wyniku uznajmy za ostateczny tego wyniku kod. Przestrzeń wyników każdego etapu staje się więc zbiorem $W = \{1,2,\ldots,s\}$. Czasami, z pewnych powodów, wyniki będziemy numerować liczbami $0,1,2,\ldots s-1$ (zob. punkt 9 niniejszej pracy).

Załóżmy, że kolejne etapy są przeprowadzane w kolejnych jednostkach czasu. Koniec n-tej jednostki czasu nazywajmy chwilą n.

Najpierw, w zerowej jednostce czasu, przeprowadzany jest etap wstępny. Jest nim doświadczenie losowe o modelu probabilistycznym (W,p^0). Niech $p^0(j) = p_j^0$ dla $j \in W$. Jest więc: $p_j^0 \geqslant 0$ dla $j \in W$ oraz $\sum_{j=1}^{s} p_j^0 = 1$.

Kolejnymi etapami są doświadczenia losowe przeprowadzane według następującej zasady:

Jeśli etap (n-1)-szy zakończył się wynikiem j, (n=1,2, 3,...), to etapem następnym jest doświadczenie losowe o modelu probabilistycznym (W,p^j), gdzie $p^j(k) \geqslant 0$ dla $k,j \in W$ oraz $\sum_{k=1}^{s} p^j(k) = 1$ dla każdego $j \in W$. Oznaczajmy dalej $p^j(k)$ przez p_{jk}. Liczba p_{jk} jest więc prawdopodobieństwem, z jakim dany etap zakończy się wynikiem k, skoro etap poprzedni zakończył się wynikiem j (j,k=1,2,...,s).

Istotą opisanego wyżej schematu doświadczalnego, zwanego jednorodnym łańcuchem Markowa, albo krócej łańcuchem Markowa o s stanach, jest to, że model probabilistyczny dla etapu przeprowadzanego w danej jednostce czasu zależy tylko od wyników doświadczenia losowego przeprowadzonego w poprzedniej jednostce czasu.

Liczby p_{jk} tworzą macierz stopnia s. Niech $[p_{jk}] = Q$. Wyrazy macierzy Q są nieujemne, a suma wyrazów każdego jej wiersza wynosi 1. Taką macierz nazywa się macierzą stochastyczną, albo macierzą przejścia.

3. SYMULACJA PRZEBIEGU ŁAŃCUCHA MARKOWA BŁĄDZENIEM LOSOWYM PO DWUWYMIAROWYM GRAFIE STOCHASTYCZNYM

Interpretujmy (protokołujmy) przebieg łańcucha Markowa błądzeniem losowym cząstki po specjalnym grafie. Na osi odciętych zaznaczmy elementy zbioru W, zwane dalej stanami. Oś odciętych jest osią stanów. Na osi rzędnych, którą z pewnych powodów skierujmy w dół, będziemy odmierzać kolejne jednostki czasu. Oś rzędnych jest osią czasu.

Punkt o współrzędnych $(\frac{s}{2},-1)$ niech będzie węzłem startowym grafu, który zaczynamy teraz opisywać. Oprócz węzła startowego węzłami grafu będą wszystkie punkty o współrzędnych (j,n), gdzie $j=1,2,\ldots,s$ oraz $n=0,1,2,3,\ldots$.

Krawędzi grafu, która łączy węzeł startowy z węzłem $(j,0)$ przypiszmy liczbę p_j^0 $(j=1,2,\ldots,s)$. Połączmy następnie każdy z węzłów o współrzędnych $(1,n-1),(2,n-1),\ldots,(s,n-1)$ z każdym z węzłów o współrzędnych $(1,n),(2,n),\ldots,(s,n)$ $n=1,2,3,\ldots$ Krawędzi, której początkiem jest węzeł $(j,n-1)$ a końcem węzeł (k,n) przypiszmy liczbę p_{jk}.

W ten sposób każdej krawędzi, traktowanej jako odcinek zorientowany, przypisana została liczba nieujemna; suma liczb przypisanych wszystkim krawędziom o wspólnym początku jest równa 1.

Graf, który powstał w opisany wyżej sposób, nazywa się dwuwymiarowym grafem stochastycznym.

Liczby $p_1^0, p_2^0, \ldots, p_s^0$ nazywajmy prawdopodobieństwami wyjścia z węzła startowego. Liczby $p_{j1}, p_{j2}, \ldots, p_{js}$ nazywajmy prawdopodobieństwami wyjścia ze stanu j, albo prawdopodobieństwami wyjścia z węzła o odciętej j.

Odnieśmy do powyższej interpretacji przyjętą w teorii łańcuchów Markowa terminologię. Jeśli n-ty etap łańcucha Markowa zakończył się wynikiem j, to mówi się, że pewien układ fizyczny Σ znalazł się w chwili n w stanie j. Liczbę p_{jk} nazwiemy zatem prawdopodobieństwem przejścia układu Σ ze stanu j w danej chwili do stanu k w chwili następnej.

W konkretnych przykładach będziemy usuwać z grafu wszystkie te krawędzie, którym odpowiada liczba (prawdopodobieństwa) 0 oraz te, które wychodzą z węzła będącego końcem tylko krawędzi z zerowym prawdopodobieństwem. Na razie uwzględniajmy wszystkie krawędzie grafu.

Postawmy pionek (błądzącą cząstkę) w węźle startowym przed rozpoczęciem przeprowadzania łańcucha Markowa. Jeśli etap wstępny zakończy się wynikiem j, to pionek przesuńmy wzdłuż krawędzi prowadzącej z węzła startowego do węzła (j,0). Teraz przeprowadźmy I etap. Jeśli zakończy się on wynikiem k, to pionek przesuńmy wzdłuż krawędzi łączącej węzeł (j,0) z węzłem (k,1), a więc wzdłuż krawędzi, której odpowiada liczba p_{jk}. W przyjętej interpretacji przebiegu łańcucha Markowa p_{jk} jest prawdopodobieństwem, z jakim błądząca po grafie stochastycznym cząstka przemieszcza się z węzła (j,n-1) do węzła (k,n), gdzie $j,k=1,2,\ldots,s$ oraz $n=1,2,3,\ldots$ Po kolejnych etapach przesuwajmy pionek wzdłuż kolejnych (licząc je względem osi czasu) krawędzi według powyższych reguł. Przebieg łańcucha Markowa zostaje w taki sposób protokołowany (symulowany) błądzeniem losowym po dwuwymiarowym grafie stochastycznym. Trasa, jaką pionek przebywa w trakcie przebiegu łańcucha Markowa, jest tego błądzenia protokołem. Trasą jest tu każdy ciąg krawędzi, z których początkiem pierwszej jest węzeł startowy, a koniec każdej krawędzi pokrywa się z początkiem następnej.

4. KONSTRUKCJA MODELU PROBABILISTYCZNEGO DLA ŁAŃCUCHA MARKOWA O s STANACH I OGRANICZONYM CZASIE JEGO TRWANIA, OPARTA NA SYMULACJI JEGO PRZEBIEGU BŁĄDZENIEM LOSOWYM PO DWUWYMIAROWYM GRAFIE STOCHASTYCZNYM

Ograniczmy liczbę etapów, a więc czas trwania łańcucha Markowa do liczby naturalnej t ($t \geqslant 1$), nie licząc etapu wstępnego. Punkty $(1,t),(2,t),\ldots,(s,t)$ są wówczas węzłami. Dotarcie do nich oznacza koniec błądzenia cząstki. Te szczególne węzły nazywajmy metami albo węzłami pochłaniającymi.

Konstrukcja modelu probabilistycznego dla danego schematu doświadczalnego może stać się źródłem rozmaitych form twórczości matematycznej. Konstrukcja ta rozpoczyna się od ustalenia sposobu patrzenia na przebieg i wynik schematu oraz konwencji kodowania tego wyniku. Ten etap drogi od doświadczenia losowego do odpowiadającego mu modelu probabilistycznego dotyczy konstrukcji zbioru W, zwanego przestrzenią zdarzeń elementarnych albo przestrzenią wyników.

Wynikiem wieloetapowego doświadczenia losowego jest na ogół ciąg wyników poszczególnych etapów. Przestrzeń wyników wieloetapowego doświadczenia losowego staje się wówczas produktem (iloczynem) kartezjańskim przestrzeni wyników poszczególnych etapów. Ta konwencja kodowania wyników wieloetapowego doświadczenia losowego prowadzi do rejestrowania przebiegu i wyniku łańcucha Markowa ciągiem stanów, w jakich znajduje się układ $\mathfrak{X}$ w kolejnych chwilach, licząc od chwili zerowej. Oznaczmy przez W_t przestrzeń wyników łańcucha Markowa o ograniczonym do liczby naturalnej t czasie jego trwania. Zbiór W_t jest wówczas rodziną wszystkich (t+1)-wyrazowych wariacji zbioru W (zbioru stanów).

$$W_t = W^{\{0,1,2,\dots,t\}} = \{1,2,\dots,s\}^{\{0,1,2,\dots,t\}}.$$

Weźmy pod uwagę interpretację przebiegu łańcucha Markowa błądzeniem losowym po dwuwymiarowym grafie. Wynik (zdarzenie elementarne) jest (t+1)-wyrazowym ciągiem stanów. Ciąg stanów jest z kolei kodem trasy na dwuwymiarowym grafie stochastycznym. Zatem trasa na grafie może być interpretowana jako wynik, a więc jako zdarzenie elementarne. Zbiór W_t traktujmy jako zbiór wszystkich tras na dwuwymiarowym grafie stochastycznym.

Przyporządkujmy każdej trasie iloczyn prawdopodobieństw (liczb) przypisanych kolejnym krawędziom tej trasy. Jak nietrudno zauważyć każdej trasie, a więc każdemu elementowi zbioru W_t, przyporządkowana zostaje liczba nieujemna. Ponieważ suma liczb przypisanych wszystkim krawędziom o wspólnym początku wynosi 1, zatem suma liczb przypisanych wszystkim trasom wynosi 1. Przypisany w powyższy sposób danej trasie iloczyn nazywajmy prawdopodobieństwem, z jakim cząskta błądzi tą trasą. Powyższą prostą regułą określiliśmy na zbiorze W_t funkcję, która jest z definicji rozkładem prawdopodobieństwa. Oznaczajmy ten rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze tras przez p.

Niech P będzie funkcją określoną na zbiorze S wszystkich podzbiorów zbioru W_t wzorem:

$$\text{(pr)} \qquad P(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A = \emptyset, \\ p(w) & \text{gdy } A = \{w\}, \\ \mathop{}_{w \in A} p(w) & \text{gdy } A \text{ jest co najmniej dwuelementowym podzbiorem zbioru } W_t. \end{cases}$$

Funkcja P jest prawdopodobieństwem na S.

5. ROZKŁAD STANÓW W CHWILI n

Niech X_n będzie wynikiem n-tego etapu łańcucha Markowa o s stanach. X_n jest zatem stanem, w jakim znajduje się układ Σ w chwili n (n=0,1,2,...,t). Symulując przebieg łańcucha Markowa błądzeniem losowym po dwuwymiarowym grafie stochastycznym układ Σ w chwili n znajdzie się w stanie k wtedy i tylko wtedy, gdy błądząca cząstka dotrze do węzła (k,n).

Przez $\{X_n=k\}$ oznaczajmy zdarzenie: n-ty etap łańcucha Markowa zakończy się wynikiem k (w chwili n układ Σ znajdzie się w stanie k). Prawdopodobieństwo tego zdarzenia oznaczajmy przez p_k^n. Liczba p_k^n jest więc prawdopodobieństwem, z jakim błądząca po dwuwymiarowym grafie stochastycznym cząstka dotrze do węzła (k,n).

Z przyjętych ostatnio oznaczeń wynika, że $p_k^n = P(X_n=k)$ dla n=1,2,...,t. Z oznaczeń przyjętych w definicji łańcucha Markowa wynika, że $p_k^0 = P(X_0=k)$.

Rozważmy wektor

(wr) $\bar{w}_n = [p_1^n, p_2^n, \ldots, p_s^n]$ dla n=0,1,2,...,t.

Wektor $\bar{w}_n$ jest pewnym przedstawieniem funkcji p_{X_n}, zwanej rozkładem zmiennej losowej X_n. Wektor $\bar{w}_n$ nazywajmy rozkładem stanów w chwili n.

6. ŁAŃCUCH MARKOWA I ROZKŁAD STANÓW W CHWILI n W ASPEKCIE STOCHASTYCZNEGO GRAFU PRZEPŁYWU

W [4] zaproponowano prosty algorytm do wyznaczania prawdopodobieństw dotarcia do pewnych węzłów grafu stochastycznego w przypadku, gdy wszystkie jego krawędzie mają przypisane prawdopodobieństwa będące liczbami wymiernymi. Przedstawioną tam ideę stochastycznego grafu przepływu, zwaną ideą abaku, albo liczydła probabilistycznego, odnieśmy teraz do dwuwymiarowego grafu stochastycznego, a więc do innego typu grafu stochastycznego (w [4] rozpatruje się grafy bez uwzględniania czasu, jako parametru).

Rozważmy dalej dwuwymiarowy graf stochastyczny odpowiadający łańcuchowi Markowa o s stanach, o parametrach $p_1^0, p_2^0, \ldots p_s^0$ i macierzy stochastycznej $[p_{jk}]$ oraz o ograniczonym do liczby naturalnej t czasie jego trwania.

Niech $p_j^0 = \frac{n_j}{r_0}$ oraz $p_{jk} = \frac{n_{jk}}{r}$. Jest więc: $\sum_{j=1}^{s} n_j = r_0$ oraz $\sum_{k=1}^{s} n_{jk} = r$ dla każdego $j=1,2,\ldots,s$.

W myśl reguł abaku węzeł startowy "ładujemy", stawiając w nim łącznie $r_0 r^t$ pionków, które następnie rozprowadzone zostają wzdłuż krawędzi grafu w ilościach proporcjonalnych do liczników ułamków będących prawdopodobieństwami wyjścia z kolejnych węzłów grafu. Jeśli do węzła (j,n) trafiło wówczas l_j^n pionków, to prawdopodobieństwo dotarcia do tego węzła jest ilorazem liczb l_j^n i $r_0 r^t$ $(n=1,2,\ldots,t)$*.

Przeanalizujmy ideę abaku w odniesieniu do rozważanego tu dwuwymiarowego grafu stochastycznego od strony teoretycznej.

Ustalmy w zbiorze W_t dowolną trasę. Oznaczmy ją przez w. Spójrzmy na przebieg łańcucha Markowa pod kątem tego, czy błędząca w trakcie jego przebiegu cząstka przebywa trasę w

---

* Wprowadzony w tej pracy dwuwymiarowy graf stochastyczny nie posiada ani pętli, ani cykli i tym różni się od grafów omawianych w [4].

(sukces), czy nie (porażka). W ten sposób na przebieg łańcucha Markowa patrzymy jak na próbę Bernoulliego. Prawdopodobieństwem sukcesu jest iloczyn liczb przypisanych kolejnym krawędziom trasy w. Oznaczmy ten iloczyn przez p(w).

Na rozprowadzanie r_0r^t pionków spójrzmy jak na r_0r^t-krotne powtórzenie przebiegu łańcucha Markowa. Zgodnie z ostatnią umową co do interpretacji rezultatu łańcucha Markowa (sukces-porażka) r_0r^t-krotnie jego powtórzenie jest schematem Bernoulliego o r_0r^t próbach i o prawdopodobieństwie sukcesu w pojedynczej próbie równym p(w).

Niech $S_{(r_0r^t)}$ będzie liczbą tych spośród r_0r^t powtórzeń, w trakcie których błądząca cząstka przemierzała wspomnianą trasę w. $S_{(r_0r^t)}$ jest zmienną losową o rozkładzie binomialnym (dwumianowym) o parametrach r_0r^t i p(w). Wartość oczekiwana tej zmiennej losowej jest zatem równa $r_0r^tp(w)$.

Jak nietrudno zauważyć liczba pionków, które zgodnie z regułą abaku przemieszczają się wzdłuż trasy w wynosi $r_0r^tp(w)$. Idea abaku sprowadza się więc do wyznaczania (prostym sposobem) oczekiwanych liczb sukcesów w pewnych schematach Bernoulliego.

Liczba $r_0r^tp(w)$ jest oczekiwaną liczbą doświadczeń kończących się wyników w. Jest to więc liczba tych spośród r_0r^t doświadczeń, które w sytuacji teoretycznej (wyidealizowanej) kończyć się powinny wynikiem w. Stosunek liczb $r_0r^tp(w)$ i r_0r^t, czyli p(w) jest teoretyczną częstością wyniku w. Jedno z podejść do prawdopodobieństwa zdarzenia traktuje to prawdopodobieństwo jako częstość teoretyczną tego zdarzenia w wielu powtórzeniach doświadczenia, z którym zdarzenie to jest związane. W podejściu tym uwypukla się częstościowy, czyli statystyczny aspekt prawdopodobieństwa, przypisując temu aspektowi ważny udział w kształtowaniu pojęcia prawdopodobieństwa. Abak probabilistyczny jest zatem algorytmem pozwalającym prostymi środkami wyznaczać teoretyczne częstości, a więc prawdopodobieństwa pewnych zdarzeń (wyników).

Oznaczmy przez l_j^n liczbę pionków, które zgodnie z regułami abaku dotrą do węzła (j,n) w trakcie rozprowadzania ich po dwuwymiarowym grafie stochastycznym odpowiadającym łańcuchowi Markowa o s stanach i o ograniczonym do liczby naturalnej t czasie jego trwania (n=0,1,2,...,t j=1,2,...,s). Rozważmy wektor

$$\bar{v}_n = \left[l_1^n, l_2^n, \ldots, l_s^n\right].$$

Niech p_j^n będzie prawdopodobieństwem dotarcia z węzła startowego do węzła (j,n). Jest $p_j^n = P(X_n=j)$. Niech

$$\bar{w}_n = \left[p_1^n, p_2^n, \ldots, p_s^n\right].$$

Nietrudno zauważyć, że wektor $\bar{w}_n$ powstaje przez unormowanie wektora $\bar{v}_n$.

Zauważmy, że

$$\bar{v}_0 = \left[l_1^0, l_2^0, \ldots l_s^0\right] = \left[n_1 r^t, n_2 r^t, \ldots, n_s r^t\right].$$

Weźmy dowolne n ze zbioru $\{1,2,\ldots,t\}$. Zgodnie z umową l_k^n

jest dla $k=1,2,\ldots,s$ liczbą pionków, które docierają do węzła (k,n). Oznaczmy przez K_j zbiór tych pionków, które w trakcie "działania" abaku, czyli w trakcie przemieszczania ich zgodnie z regułą abaku, docierają do węzła (k,n) poprzez węzeł $(j,n-1)$. K_j jest zatem zbiorem tych pionków, które docierają do węzła (k,n) bezpośrednio z węzła $(j,n-1)$. Liczba tych pionków wynosi $p_{jk}l_j^{n-1}$.

Mamy więc równość:

(1) $$l_k^n = \sum_{j=1}^{s} p_{jk}l_j^{n-1},$$

z której wynika, że

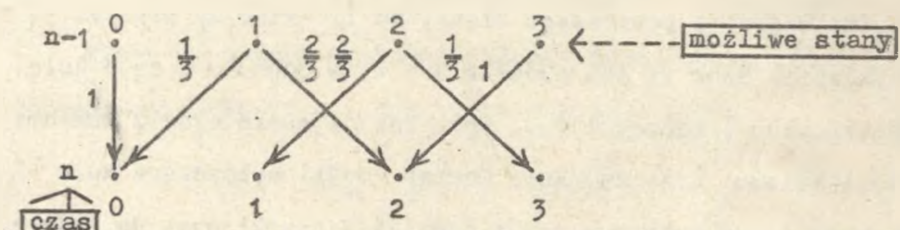
(2) $$\bar{v}_n = \bar{v}_{n-1}Q \quad \text{dla} \quad n=1,2,\ldots,$$

Z łączności mnożenia macierzy i z równości (2) wynika, że

(3) $$\bar{v}_n = \bar{v}_0\, Q^n \quad \text{dla} \quad n=1,2,\ldots$$

Zastosowanie powyższego algorytmu zilustrujmy prostym przykładem. Dane są dwa pudełka U i V. W pudełku V są 3 kule ponumerowane liczbami 1,2,3. Obok znajduje się urna z takimiż trzema kulami. Losujemy kulę z urny. Jeśli wylosowana kula ma numer j, to kulę numer j z pudełka V przekładamy do pudełka U ($j=1,2,3$). Wylosowaną z urny kulę zwracamy do urny i znów losujemy z niej kulę. Jeśli ma ona numer k, to kulę numer k przekładamy z pudełka, w którym się do tej pory znajdowała, do drugiego z pudełek. Tak postępujemy aż pudełko V zostanie opróżnione. Kolejne etapy są tu w istocie losowaniami kuli z tej samej urny.

Mamy tu do czynienia z doświadczeniem losowym o losowej liczbie etapów. Załóżmy jednak, że na przebieg tego schematu patrzymy pod kątem liczby kul w pudełku V po kolejnych losowaniach kuli z urny. Przyjmijmy, że kolejne losowania przeprowadzane są w kolejnych jednostkach czasu. Liczbę kul w pudełku V po n-tej jednostce czasu (po n-tym etapie) interpretujmy jako stan, w jakim znajduje się to pudełko (a więc pewien układ fizyczny). Jeśli w danej chwili pudełko V zostało opróżnione, to pozostaje ono puste w każdej chwili następnej. Możliwe stany tworzą w tym przypadku zbiór $\{0,1,2,3\}$. Niech p_{jk} oznacza prawdopodobieństwo, z jakim w chwili n w pudełku V będzie k kul, skoro w chwili n-1 było ich tam j (j,k=0,1,2,3). Macierz $[p_{jk}]$ można określić bez trudu za pomocą fragmentu dwuwymiarowego grafu stochastycznego odpowiadającego przedziałowi czasowemu $[n-1,n]$ (zob. rys.1, na którym brak krawędzi, którym odpowiada zerowe prawdopodobieństwo).



rys.1

Mamy więc:

$$[p_{jk}] =: Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rysunek 2 przedstawia fragment dwuwymiarowego grafu stochastycznego pozwalającego protokołować przebieg zmian liczby kul w pudełku V po kolejnych jednostkach czasu.

Weźmy n=4. Jest wówczas:

$$\bar{v}_0 = [0,0,0,3^4] = [0,0,0,81],$$

a więc

$$\bar{w}_0 = [0,0,0,1].$$

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_0 Q = [0,0,81,0],$$

a zatem

$$\bar{w}_1 = [0,0,1,0].$$

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_1 Q = \left[0,\tfrac{2}{3}\cdot 81,\ 0,\tfrac{1}{3}\cdot 81\right] = [0,54,0,27],$$

a więc

$$\bar{w}_2 = \left[0,\tfrac{2}{3},0,\tfrac{1}{3}\right].$$

$$\bar{v}_3 = \bar{v}_2 Q = \left[\tfrac{1}{3}\cdot 54,0,\tfrac{2}{3}\cdot 54 + 1\cdot 27,0\right] = [18,0,63,0],$$

a zatem

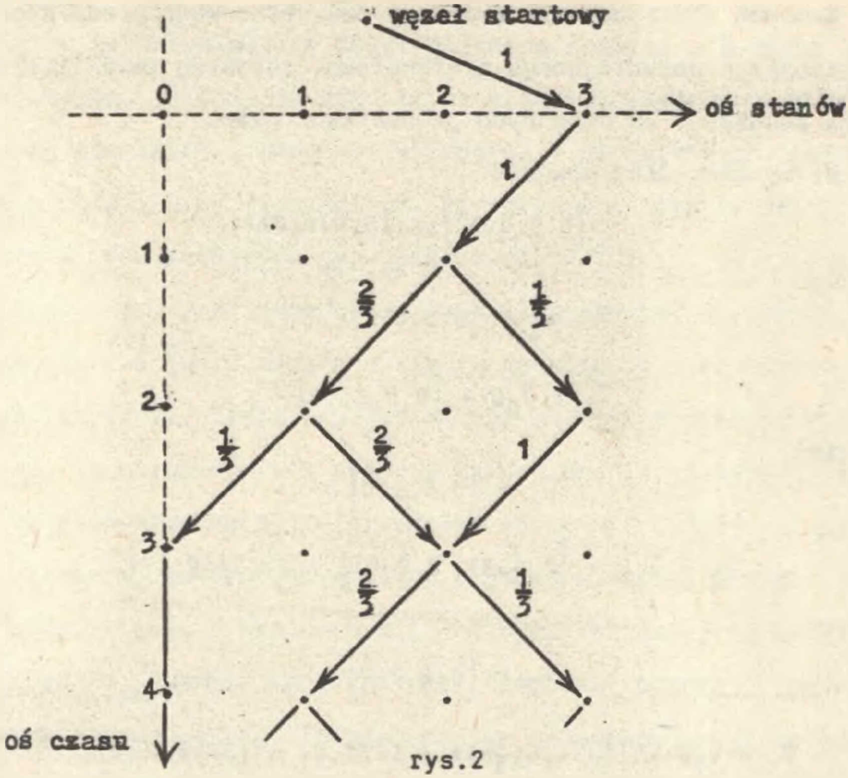
$$\bar{w}_3 = \left[\tfrac{2}{9},0,\tfrac{7}{9},0\right].$$

$$\bar{v}_4 = \bar{v}_3 Q = \left[18,\tfrac{2}{3}\cdot 63,0,\tfrac{1}{3}\cdot 63\right] = [18,42,0,21],$$

a więc

$$\bar{w}_4 = \left[\tfrac{6}{27},\tfrac{14}{27},0,\tfrac{7}{27}\right].$$

Jeśli X_n oznacza liczbę kul w pudełku V w chwili n, to wektor $\bar{w}_n$ określa rozkład zmiennej losowej X_n. Wzór (2) pozwala wyznaczać w prosty sposób prawdopodobieństwa, z jakimi w danej chwili liczba kul w pudełku V będzie równa 0,1,2,3.



rys.2

Liczba kul w pudełku V na początku była tu ustalona. Etap wstępny był w istocie zdeterminowany. Dwuwymiarowy graf stochastyczny, po usunięciu zeń pewnych krawędzi (tych, którymi w trakcie symulacji przebiegu zmian liczby kul w pudełku V błądzeniem losowym, błądząca cząstka nie będzie się przemieszczać) umożliwiał wyznaczanie wektorów $\bar{\bar{w}}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, \ldots$ równie prostymi rachunkami, opartymi na regule mnożenia i dodawania (pierwsza dotyczy prawdopodobieństwa błądzenia konkretną trasą, druga - prawdopodobieństwa dotarcia do konkretnego węzła na grafie stochastycznym).

Rozważmy nieco ogólniejszy schemat i podobne, związane z nim problemy, rozwiązywanie których za pomocą samego tylko grafu stochastycznego (bez udowodnionego wyżej algorytmu (2)) okazuje się zbyt kłopotliwe.

Załóżmy, że losowanie kuli z urny i przemieszczanie kuli z pudełka do pudełka poprzedzone zostaje etapem wstępnym. Polega on na losowaniu liczby tych spośród 3 wszystkich kul (leżących poza wspomnianymi pustymi pudełkami U i V), które trafią na początek do pudełka V, a które do pudełka U. Można tu dobierać rozmaite generatory rozkładu prawdopodobieństwa na zbiorze $\{0,1,2,3\}$ ustalające dla każdej z liczb tego zbioru prawdopodobieństwo, z jakim po etapie wstępnym taka będzie liczba kul w pudełku V.

Załóżmy, że dla każdej z kul o numerach 1,2 i 3 losuje się za pomocą monety, do którego pudełka trafia ta kula na początku. Zmienna losowa X_0, będąca liczbą kul w pudełku V na początku, ma wówczas rozkład Bernoulliego o parametrach 3 i $\frac{1}{2}$, a zatem

$$p_j^0 = P(X_0=j)\ \binom{3}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \qquad \text{dla} \quad j=0,1,2,3:$$

Wówczas:

$$\bar{w}_0 = \left[\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{8}\right].$$

W tej sytuacji z węzła startowego wypuszczanych zostaje $8\cdot 3^n$ pionków, gdy interesuje nas wektor $\bar{w}_n$. Jest więc wówczas:

$$\bar{v}_0 = \left[3^n, 3\cdot 3^n, 3\cdot 3^n, 3^n\right].$$

Macierz Q pozostaje bez zmian, wszak bez zmian pozostał regulamin przemieszczania kul z pudełka do pudełka od etapu pierwszego poczynając. Wektory $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3$ itd. można wyznaczać stosunkowo prosto za pomocą rachunku algebraicznego (mowa tu o wzorze (2)).

7. DWUWYMIAROWY GRAF STOCHASTYCZNY JAKO NARZĘDZIE WERYFIKACJI CZY SCHEMAT DOŚWIADCZALNY JEST ŁAŃCUCHEM MARKOWA

Fakt, że na fragmencie dwuwymiarowego grafu stochastycznego odpowiadającym przedziałowi czasowemu $[n-1,n]$ każdej krawędzi przypisane jest dokładnie jedno prawdopodobieństwo oznacza, że model probabilistyczny dla n-tego etapu zależy tylko od wyniku etapu (n-1)-szego. Jeśli wynikiem etapu (n-1)-szego jest j, to model probabilistyczny dla n-tego etapu określony jest zespołem krawędzi grafu wychodzących z węzła o współrzędnych (j,n-1). Liczba przypisana krawędzi łączącej ten węzeł z węzłem o współrzędnych (k,n) jest prawdopodobieństwem, z jakim etap n-ty zakończy się wynikiem k (j,k=1,2,..s).

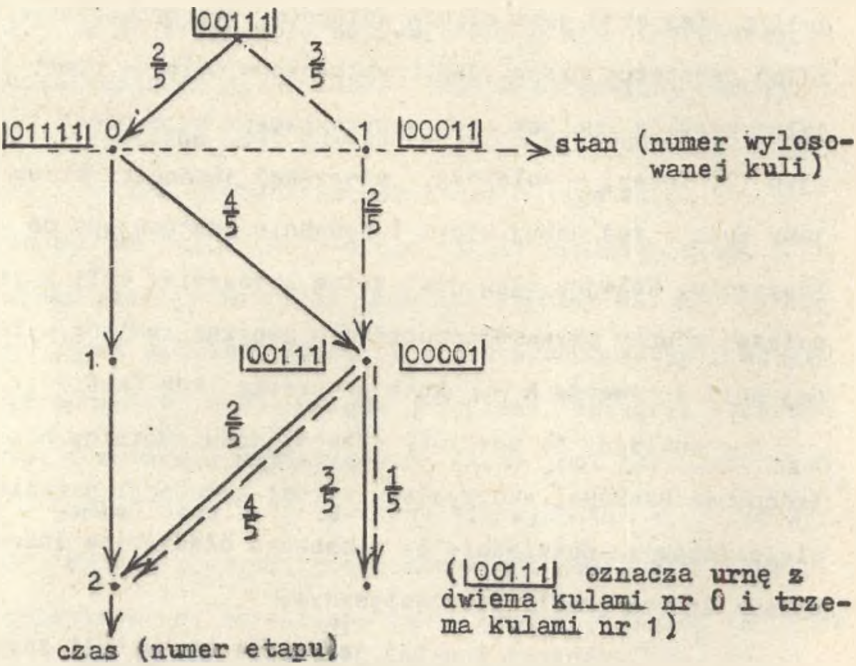
Jeśli każdej krawędzi grafu odpowiada dokładnie jedno prawdopodobieństwo, to opisano takim grafem przebieg łańcucha Markowa. Dwuwymiarowy graf stochastyczny jest więc pewnym środkiem weryfikacji, czy dany schemat doświadczalny (wieloetapowe doświadczenie losowe) jest łańcuchem Markowa, czy też nie.

Gdyby próba opisu przebiegu wieloetapowego doświadczenia losowego dwuwymiarowym grafem stochastycznym doprowadziła do sytuacji, że pewnej krawędzi odpowiadają dwa różne prawdopodobieństwa w zależności od "rodowodu" tej krawędzi, to jest w zależności od tego, który węzeł jest początkiem poprzednich krawędzi trasy zawierającej ową krawędź, to zgodnie z definicją taki schemat doświadczalny nie jest łańcuchem Markowa.

Rozważmy następujący schemat doświadczalny: W urnie znajdują się 2 kule o numerze 0 i 3 kule o numerze 1. Losowanie kuli z tej urny jest etapem wstępnym, przeprowadzanym w zerowej jednostce czasu. Jeśli wylosowana kula ma numer j, to - odłożywszy ją na bok - do urny wkładamy kulę numer 1-j (j=0,1). Teraz, w kolejnej, pierwszej jednostce czasu losujemy kulę z tej nowej urny. I podobnie postępujemy po każdym losowaniu. Kolejny etap jest zatem losowaniem kuli z urny powstałej z urny używanej poprzednio poprzez zamianę wylosowanej kuli o numerze k na kulę o numerze 1-k (k=0,1).

Aby pokazać, że powyższy schemat doświadczalny nie jest łańcuchem Markowa, skorzystamy z idei symulacji przebiegu wieloetapowego doświadczenia losowego błądzeniem losowym po dwuwymiarowym grafie stochastycznym.

Numer wylosowanej w n-tej jednostce czasu kuli interpretujmy jako stan, w którym znalazł się pewien układ fizyczny (np. ręka, w której ta kula się znajduje) w chwili n (n=0,1, 2,...). Próba opisu przebiegu zmian stanów w kolejnych chwilach prowadzi do grafu, na którym istnieje krawędź o dwu różnych prawdopodobieństwach (zob. rys.3). Jest taka krawędź łącząca węzeł o współrzędnych (1,1) z węzłem o współrzędnych (1,2). Krawędzi tej odpowiada prawdopodobieństwo $\frac{1}{5}$ - jeśli początkiem poprzedniej krawędzi był węzeł o współrzędnych (1,0), zaś prawdopodobieństwo $\frac{3}{5}$ - jeśli początkiem krawędzi poprzedniej był węzeł o współrzędnych (0,0). Ten "rodowód" wspomnianej wyżej krawędzi zaznaczono na rysunku 3 przedstawiając tę krawędź jako część wspólną dwu różnych tras na grafie.



Fragment grafu opisującego przebieg schematu doświadczalnego. Obok węzłów grafu znajduje się rysunek urny, z której losuje się kulę na następnym etapie. Linie ciągła i przerywana, odpowiadające dwu różnym trasom prowadzącym do węzła (1,2), ukazują dwa różne "rodowody" krawędzi łączącej węzeł (1,1) z węzłem (1,2), tj. różne początki poprzednich krawędzi.

rys.3

Opisąny wyżej fakt oznacza, że prawdopodobieństwo wyniku 1 drugiego etapu, skoro pierwszy etap zakończył się wynikiem 1, wynosi $\frac{1}{5}$ jeśli również etap wstępny zakończył się wynikiem 1. Jeśli natomiast etap wstępny zakończył się wynikiem 0 a etap pierwszy wynikiem 1, to prawdopodobieństwo wyniku 1 drugiego etapu wynosi $\frac{3}{5}$ (wynik etapu kodujemy tu numerem wylosowanej na tym etapie kuli). Model probabilistyczny dla drugiego etapu zależy więc nie tylko od wyniku etapu pierwszego, ale także od wyniku etapu wstępnego. Schemat doświadczalny, o jakim tu mowa, nie jest zatem łańcuchem Markowa.

Wśród walorów dydaktycznych powyższej graficznej reprezentacji przebiegu łańcucha Markowa podkreślić należy przystępność opartej na grafie i idei współrzędnych metodzie sprawdzania, czy wieloetapowe doświadczenie losowe jest, czy też nie jest łańcuchem Markowa.

8. URNOWY MODEL ŁAŃCUCHA MARKOWA O s STANACH

Dane jest s+1 urn $U, U_1, U_2, \ldots, U_s$, w których znajdują się kule o numerach 1,2,...,s. Liczby poszczególnych kul w każdej z urn są znane. Niech p_j^0 będzie prawdopodobieństwem wylosowania kuli o numerze j, z urny U, a p_{jk} niech będzie prawdopodobieństwem wylosowania kuli numer k z urny U_j (j,k=1,2,...,s). Liczby p_{jk} tworzą macierz stopnia s. Jej j-ty wiersz określony jest poprzez skład urny U_j.

Etapem wstępnym jest losowanie kuli z urny U. Jeśli wylosowana na tym etapie kula ma numer j, to etapem następnym jest losowanie kuli z urny U_j. I ogólnie: jeśli etap (n-1)-szy zakończy się wylosowaniem kuli numer j, to następnym, n-tym etapem jest losowanie kuli z urny U_j. Po każdym losowaniu kula wraca do urny.

Numer wylosowanej (i trzymanej w dłoni) kuli po etapie n-tym interpretujmy jako stan, w którym znajduje się w chwili n pewien układ fizyczny Σ (np. ta właśnie dłoń).

Oznaczmy przez X_n numer kuli wylosowanej na etapie n-tym zgodnie z opisanym tu schematem losowania. Niech $P(X_n=k) = p_k^n$ dla $k=1,2,\ldots,s$, $n=0,1,2,\ldots$ Rozkład zmiennej losowej X_n daje się określić wektorem $\overline{w}_n = \left[p_1^n, p_2^n, \ldots, p_s^n\right]$.

Opisany wyżej schemat doświadczalny jest prostym modelem łańcucha Markowa o s stanach.

Jak pokażemy dalej, wektory $\overline{w}_n$ można znajdować rachunkiem algebraicznym za pomocą wektora $\overline{w}_0$ i macierzy $\left[p_{jk}\right]$.

9. KLASYCZNE ZADANIE O RUINIE W ASPEKCIE URNOWEGO MODELU ŁAŃCUCHA MARKOWA

Jednym z bardziej znanych w literaturze probabilistycznej problemów jest tzw. klasyczne zadanie o ruinie gracza (zob. [9] s.131, 192 i 353). Dwaj gracze, których dla uproszczenia dalszych opisów nazywajmy Ablem i Kainem, startują do gry z pewnym kapitałem. Załóżmy, że Abel ma na początku k złotówek, a Kain m-k złotówek ($1 \leq k \leq m$). W kolejnych jednostkach czasu przeprowadzana jest próba Bernoulliego. Niech dodatnia i mniejsza od jeden liczba wymierna p będzie prawdopodobieństwem sukcesu w tej próbie. Jeśli próba zakończy się sukcesem, to Abel wygrywa złotówkę od Kaina. Gdy próba zakończy się porażką — Abel przegrywa złotówkę przekazując ją Kainowi. Gra toczy się dopóty, dopóki któryś z graczy nie straci wszystkich złotówek, czyli dopóki któryś z graczy nie zostanie zrujnowany. Klasyczne zadanie o ruinie dotyczy problemu prawdopodobieństwa ruiny każdego z graczy w takiej grze.

Niech X_n będzie stanem kapitału (liczbą złotówek) Abla po n-tej próbie. Przy przyjętym założeniu można mówić o X_n jako o kapitale Abla w chwili n.

Oznaczmy przez p_j^n prawdopodobieństwo, z jakim zmienna losowa X_n przyjmie wartość j. Jest więc $p_j^n = p_{X_n}(j) = P(X_n=j)$.

Załóżmy teraz, że jeśli w danej chwili kapitał któregoś z graczy zmalał do zera, to z prawdopodobieństwem 1 pozostaje on taki w każdej chwili następnej. Przebieg zmian kapitału Abla po kolejnych jednostkach czasu (w kolejnych chwilach) daje się symulować opisanym wyżej schematem urnowym.

W urnie U jest tylko jedna kula o numerze k, w urnie U_j ($j=1,2,\ldots,m-1$) są tylko kule o numerach j-1 oraz j+1, przy czym jest ich tyle, że prawdopodobieństwo wylosowania kuli numer j-1 z urny U_j wynosi 1-p, zaś kuli numer j+1 wynosi p. Oprócz urn $U_1,U_2,\ldots,U_{m-1}$ są jeszcze urny U_0 i U_m. W urnie

U_0 jest tylko kula o numerze 0, zaś w urnie U_m tylko kula o numerze m.

Liczby p_k^n dla k=0,1,2,...,m oraz n=1,2,3,... można znajdować za pomocą wzoru (2) ze str.21. Mamy w tym przypadku:

$$p_{jl} = \begin{cases} 0 \text{ dla } 0 \neq j = l \neq m, \\ p \text{ dla } l = j+1, \\ 1-p \text{ dla } l = j-1, \\ 1 \text{ dla } j = l = 0 \text{ oraz } j = l = m, \\ 0 \text{ dla pozostałych } j,l. \end{cases}$$

Klasyczne zadanie o ruinie, przy ograniczonym do liczby naturalnej t czasie trwania gry, może stać się źródłem wielu form matematycznych aktywności i może dostarczać surowca do pewnej matematycznej twórczości już w klasach starszych szkoły podstawowej, a zwłaszcza w kursie probabilistyki przewidzianym na szkołę średnią. Chodzi tu o organizację i wspieranie myślenia matematycznego zainspirowanego problemami, jakie powstają na tle gry środkami graficznymi (opis przebiegu zmian stanu kapitału jednego z graczy za pomocą dwuwymiarowego grafu stochastycznego), o dekodowanie ukrytych w grafie informacji na temat możliwych stanów kapitału w poszczególnych chwilach, uogólnianie zadania poprzez przyjęcie, że kapitał początkowy obu graczy nie jest ustalony, ale że wszystkie złotówki, jakimi łącznie dysponują gracze na etapie wstępnym rozdziela się pomiędzy nich w sposób losowy (rozmaite sposoby przeprowadzania tego podziału prowadzą do różnych wektorów $\overline{w}_0$).

Wzór (2), a także wzór (3) pozwalają w tej uogólnionej wersji zadania o ruinie rozwiązywać problemy probabilistyczne środkami algebraicznymi. Wykorzystywanie do rozwiązywania rachunku algebraicznego, a także idei współrzędnych, umożliwia realizację idei fuzjonizmu na lekcjach rachunku prawdopodobieństwa.

10. ROZKŁAD STANÓW W CHWILI n

Powróćmy do (jednorodnego) łańcucha Markowa o s stanach. Przez p_k^n oznaczyliśmy prawdopodobieństwo, z jakim zmienna losowa X_n przyjmuje wartość k ($p_k^n = P(X_n=k)$).

Zauważmy, że to prawdopodobieństwo jest sumą prawdopodobieństw przypisanych wszystkim trasom przechodzącym przez węzeł o współrzędnych (k,n). W istocie jest ono sumą iloczynów przypisanych wszystkim trasom, których węzłem końcowym jest punkt o współrzędnych (k,n). Do tego zbioru L_k^n tras na grafie możemy więc sprowadzić rozważania. Wszystkie trasy zbioru L_k^n rozbijmy na klasy.

Niech T_{jk}^n będzie zbiorem tych tras, które do węzła (k,n) prowadzą przez węzeł (j,n-1).

Jest:

$$L_k^n = \bigcup_{j=1}^{s} T_{jk}^n \text{ oraz } T_{jk}^n \cap T_{lk}^n = \emptyset \text{ dla } j=l \ (j,l,k=1,2,\dots,s).$$

$$P(X_n=k) = \sum_{w \in L_k^n} p(w) = \sum_{j=1}^{s} P(T_{jk}^n),$$

gdzie P jest prawdopodobieństwem określonym na zbiorze tras wzorem (pr) ze str.16.

$P(T_{jk}^n)$ jest sumą prawdopodobieństw przypisanych wszystkim trasom prowadzącym do węzła o współrzędnych (k,n) poprzez węzeł o współrzędnych $(j,n-1)$.

Wszystkie te trasy mają wspólną krawędź, której odpowiada prawdopodobieństwo p_{jk}. Suma, o której tu mowa, ma więc wspólny czynnik p_{jk}. Wyłączmy go poza nawias. To co pozostaje w nawiasie jest sumą prawdopodobieństw przypisanych wszystkim trasom prowadzącym do węzła o współrzędnych $(j,n-1)$. Ta ostatnia suma - to $P(X_{n-1}=j)$, a więc liczba p_j^{n-1}.

Mamy więc:

$$P(T_{jk}^n) = P(X_{n-1}=j)p_{jk} = p_j^{n-1}\ p_{jk},$$

a zatem:

$$P(X_n=k) = \sum_{j=1}^{s} P(X_{n-1}=j)p_{jk} \quad \text{dla } k=1,2,\ldots,s,$$

czyli

$$p_k^n = \sum_{j=1}^{s} p_j^{n-1}\ p_j^{n-1} \qquad \text{dla } k=1,2,\ldots,s.$$

$P(X_n=k)$, czyli p_k^n jest iloczynem skalarnym wektora $\overline{w}_{n-1}$ i k-tej kolumny macierzy stochastycznej $Q=[p_{jk}]$, co oznacza, że

(4) $$\overline{w}_n = \overline{w}_{n-1} \cdot Q \quad \text{dla } n=1,2,\ldots,$$

bądź - uwzględniając własności rachunku algebraicznego - że:

(5) $$\overline{w}_n = \overline{w}_0 \cdot Q^n \quad \text{dla } n=1,2,\ldots$$

Macierz prawdopodobieństw przejścia (krótko zwana także macierzą przejścia) nie zależała tu od czasu, a więc od parametru n. Taki łańcuch Markowa nazywa się jednorodnym. Można rozważać taki schemat doświadczalny, dla którego model probabilistyczny danego etapu zależy nie tylko od wyniku etapu poprzedniego, ale także od numeru tego etapu (a więc od czasu, w którym ów etap jest przeprowadzany). Taki łańcuch Markowa nazwiemy niejednorodnym. Jak nietrudno zauważyć, macierz prawdopodobieństw przejścia zależy wówczas od parametru n. Jeśli oznaczyć ją w takim przypadku przez Q(n), to wzór (4) przyjmuje postać

(6) $$\overline{w}_n = \overline{w}_{n-1} Q(n),$$

gdzie $Q(n) = \left[p_{jk}(n)\right]$, a $p_{jk}(n)$ jest prawdopodobieństwem, z jakim etap n-ty zakończy się wynikiem k skoro etap poprzedni zakończył się wynikiem j (j,k=1,2,...,s, n=1,2,3,...). Dowód wzoru (6) jest analogiczny jak dowód wzoru (4).

11. LICZBY TRAS NA GRAFIE STOCHASTYCZNYM A RACHUNEK ALGEBRAICZNY

Rozważmy dwuwymiarowy graf stochastyczny opisujący przebieg jednorodnego łańcucha Markowa o s stanach. Zainteresujmy się teraz liczbą tras prowadzących na grafie z węzła startowego do węzłów leżących na prostej y=n.

Niech, jak poprzednio, p_{jk} będzie prawdopodobieństwem przejścia ze stanu j w danej chwili do stanu k w chwili następnej.

Wprowadźmy nową macierz R stopnia s. Niech $R = \left[r_{jk} \right]$,

gdzie

$$r_{jk} = \begin{cases} 1, \text{ gdy } & p_{jk} > 0, \\ 0, \text{ gdy } & p_{jk} = 0. \end{cases}$$

Tę macierz R wykorzystamy do wyznaczania liczby tras prowadzących do węzłów o rzędnej równej n (n=1,2,3,...).

Oznaczmy przez $\overline{u}_0$ wektor $\left[r_1^0, r_2^0, \ldots, r_s^0 \right]$, gdzie:

$$r_j^0 = \begin{cases} 0, \text{ gdy } p_j^0 = 0, \\ 1, \text{ gdy } p_j^0 > 0. \end{cases}$$

Niech r_j^n dla n=1,2,.... oraz j=1,2,...,s oznacza liczbę tras na dwuwymiarowym grafie stochastycznym, które prowadzą do węzła o współrzędnych (j,n). Mamy tu na uwadze tylko te trasy, którym zgodnie ze wspomnianą wcześniej regułą mnożenia odpowiadają dodatnie prawdopodobieństwa. Z grafu usunięte zatem zostały wszystkie te krawędzie, którym odpowiada zerowe prawdopodobieństwo oraz te, które wychodzą z węzła będącego końcem tylko takich krawędzi, którym przypisane jest zerowe prawdopodobieństwo. W skonstruowanym dla łańcucha Markowa modelu probabilistycznym trasy na dwuwymiarowym grafie stochastycznym utożsamiliśmy z wynikami łańcucha Markowa (ze zdarzeniami elementarnymi). Eliminujemy zatem teraz z rozważeń te zdarzenia elementarne, którym funkcja zwana rozkładem prawdopodobieństwa przypisuje wartość zero.

Wektor $\left[r_1^n, r_2^n, \ldots, r_s^n\right]$ oznaczajmy dalej przez $\overline{u}_n$ $(n=1,2,\ldots)$. Pokażemy, że dla $n=1,2,3,\ldots$ jest

(7) $$\overline{u}_n = \overline{u}_{n-1} \cdot R.$$

Dla $n=1$ mamy:

$$r_j^0 r_{jk} = \begin{cases} 0, \text{ gdy } r_j^0=0 \text{ lub } r_{jk}=0, \\ 1, \text{ gdy } r_j^0=1 \text{ i } r_{jk}=1, \end{cases}$$

a zatem $r_j^0 r_{jk} = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest możliwe dojście do węzła o współrzędnych $(j,0)$ i możliwe wyjście z niego do węzła o współrzędnych $(k,1)$, czyli gdy jest możliwe przejście z węzła startowego poprzez węzeł o współrzędnych $(j,0)$ do węzła o współrzędnych $(k,1)$. Możliwość wyjścia, czy przejścia jest tu równoznaczna z niezerowaniem się prawdopodobieństwa odpowiadającego przemieszczaniu się błądzącej po grafie cząstki wzdłuż odpowiednich krawędzi.

$\sum_{j=1}^{s} r_j^0 r_{jk}$ jest zatem liczbą możliwych przejść z węzła startowego na grafie do węzła o współrzędnych $(k,1)$. Zgodnie z przyjętym oznaczeniem suma ta jest k-tą współrzędną wektora $\overline{u}_1$. Z drugiej strony suma ta jest iloczynem skalarnym wektora $\overline{u}_0$ i k-tej kolumny macierzy R, a zatem

$$\overline{u}_1 = \overline{u}_0 \; R.$$

Załóżmy teraz, że $n > 1$.

Liczbę r_k^n wyznaczmy za pomocą ilości tras prowadzących do węzłów leżących na prostej y=n-1 oraz macierzy R.

$r_j^{n-1} r_{jk} > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy z węzła startowego prowadzi co najmniej jedna trasa do węzła o współrzędnych (j,n-1) i gdy możliwe jest przejście ze stanu j w danej chwili do stanu k w chwili następnej.

Gdy $r_j^{n-1} = 1$ i $r_{jk} = 1$, to $r_j^{n-1} r_{jk}$ jest liczbą tras, które prowadzą do węzła o współrzędnych (k,n) przez węzeł o współrzędnych (j,n-1). Gdy $r_{jk} = 0$, to iloczyn $r_j^{n-1} r_{jk} = 0$, ale i liczba tras prowadzących do węzła o współrzędnych (k,n) przez węzeł o współrzędnych (j,n-1) jest też równa zero.

$\sum_{j=1}^{s} r_j^{n-1} r_{jk}$ jest więc liczbą wszystkich tras prowadzących do węzła o współrzędnych (k,n). Suma ta jest k-tą współrzędną wektora $\overline{u}_n$. Ale suma ta jest również iloczynem skalarnym wektora $\overline{u}_{n-1}$ i k-tej kolumny macierzy R, a więc

(7) $$\overline{u}_n = \overline{u}_{n-1} R, \quad \text{dla } n=1,2,3,....$$

Z (7) oraz z łączności mnożenia macierzy wynika, że

(8) $$\overline{u}_n = \overline{u}_0 R^n \quad \text{dla } n=1,2,3,....$$

12. STANY POCHŁANIAJĄCE I ZREDUKOWANY DWUWYMIAROWY GRAF STOCHASTYCZNY

Nazywajmy stan j pochłaniającym, jeśli układ Σ z prawdopodobieństwem 1 pozostaje w tym stanie w każdej chwili następnej po chwili, w której znalazł się w nim po raz pierwszy. Jeśli stan j jest pochłaniający, to

$$p_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{dla } k \neq j, \\ 1 & \text{dla } k = j. \end{cases}$$

Na grafie z węzła o współrzędnych (j,n+1) wychodzi tylko jedna krawędź o dodatnim prawdopodobieństwie. Jest nią krawędź prowadząca do węzła o współrzędnych (j,n+1), a przypisane jej prawdopodobieństwo jest równe 1.

Stan j jest pochłaniający wtedy i tylko wtedy, gdy $p_{jj}=1$. Macierz Q pozwala więc wyróżniać stany pochłaniające.

Kontynuowanie błądzenia po pierwszym dotarciu cząstki do stanu pochłaniającego może się wydawać, zwłaszcza dla ucznia, nieco sztuczne. Umowa przesuwania nadal pionka, mimo że został już zrujnowany jeden z graczy w grze znanej z klasycznego zadania o ruinie (gra w istocie została zakończona), umożliwiała użycie wzoru (7) do wyznaczania pewnych prawdopodobieństw.

Przyjmijmy teraz umowę, że jeśli stan j jest pochłaniający, to pierwsze dotarcie błądzącej cząstki do węzła o odciętej j oznacza koniec błądzenia. Jeśli nastąpiło to w chwili n, to węzeł o współrzędnych (j,n) staję się metą. Graf dwuwymiarowy, w którym usunięto krawędzie wychodzące z takich met, nazywajmy **zredukowanym grafem stochastycznym**.

Rozważmy wszystkie węzły grafu leżące na prostej y=n ($n > 1$). Przed redukcją wspomnianych wyżej krawędzi prawdopodobieństwo dotarcia do węzła o współrzędnych (k,n), gdzie $k=1,2,\ldots,s$, jest prawdopodobieństwem, z jakim w chwili n układ Σ znajduje się w stanie k. Znajduje się, to znaczy, że znalazł się tam dokładnie w chwili n, albo znalazł się tam w którejś z chwil wcześniejszych i w tym stanie pozostał (jeśli był to stan pochłaniający).

Po redukcji prawdopodobieństwo dotarcia do węzła o współrzędnych (k,n) jest prawdopodobieństwem, z jakim układ Σ w chwili n znajdzie się w stanie k.

Rachunek algebraiczny może być także narzędziem wyznaczania liczby tras prowadzących na grafie zredukowanym do węzłów na prostej $y=n$.

Niech $\overline{u}_0 = \left[r_1^0, r_2^0, \ldots, r_s^0\right]$.

Odpowiednikiem macierzy R jest w przypadku grafu zredukowanego macierz $R_z = \left[z_{jk}\right]$, gdzie:

$$z_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } p_{jk} > 0 \text{ i gdy dla } j=k\ p_{jk} \neq 1, \\ 0, & \text{gdy } p_{jk} = 0 \text{ lub gdy } p_{jk} = 1 \text{ i } j=k. \end{cases}$$

Niech z_j^n oznacza dla $j=1,2,\ldots,s$, liczbę tras prowadzących na grafie zredukowanym do węzła o współrzędnych (j,n).

Rozważmy wektor $\overline{z}_n = [z_1^n, z_2^n, \ldots, z_s^n]$ dla $n=1,2,3,\ldots$.

Jest:

(9) $$\overline{z}_1 = \overline{u}_0 R_z,$$

(10) $$\overline{z}_n = \overline{z}_{n-1} R_z \quad \text{dla } n > 1,$$

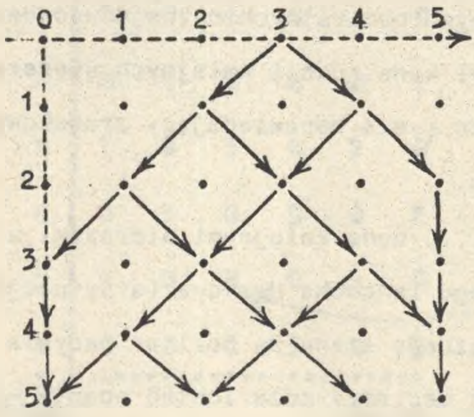
(11) $$\overline{z}_n = \overline{u}_0 (R_z)^n.$$

13. KLASYCZNE ZADANIE O RUINIE W ASPEKCIE ZREDUKOWANEGO DWUWYMIAROWEGO GRAFU STOCHASTYCZNEGO

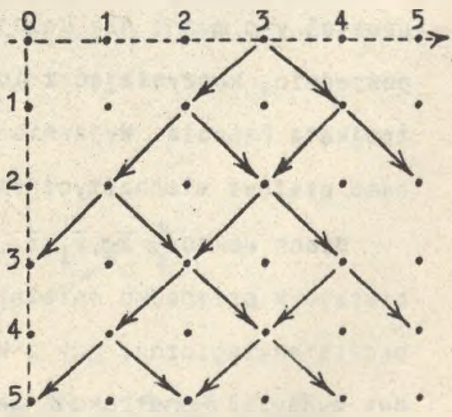
Stany 0 i m w przypadku łańcucha Markowa, z jakim mamy do czynienia w kontekście klasycznego zadania o ruinie opisanego w p.9, są stanami pochłaniającymi. Weźmy k=3 i m=5. Rys.4 przedstawia fragment dwuwymiarowego grafu stochastycznego, a rys. 5 odpowiedni fragment grafu zredukowanego (przyjęto tam $p=\frac{1}{2}$).

Na grafie zredukowanym wszystkie trasy prowadzące do węzła o współrzędnych (j,n) są w tym przypadku jednakowo prawdopodobne. I jest tak tylko w przypadku $p=\frac{1}{2}$ i grafu zredukowanego. Prawdopodobieństwo każdej trasy prowadzącej na grafie zredukowanym do węzła o współrzędnych (j,n) wynosi $(\frac{1}{2})^n$.

Wyznaczanie prawdopodobieństwa dotarcia do węzła o współrzędnych (j,n) w takim błądzeniu losowym sprowadza się do wyznaczenia liczby tras prowadzących do tego węzła. Liczby tych tras można wyznaczać za pomocą związków (9) i (10) i (11).



rys.4



rys.5

Niech A_j^t oznacza zdarzenie: w chwili t stan kapitału Abla wyniesie j. Jest to w terminologii losowego błądzenia po grafie zdarzenie: błądząca cząstka dotrze na grafie zredukowanym do węzła o współrzędnych (j,t).

Jeśli przez X_n oznaczyć stan kapitału Abla w chwili n, to dla $j \neq 0$ i $j \neq m$

$$A_j^n = \{X_n = j\},$$

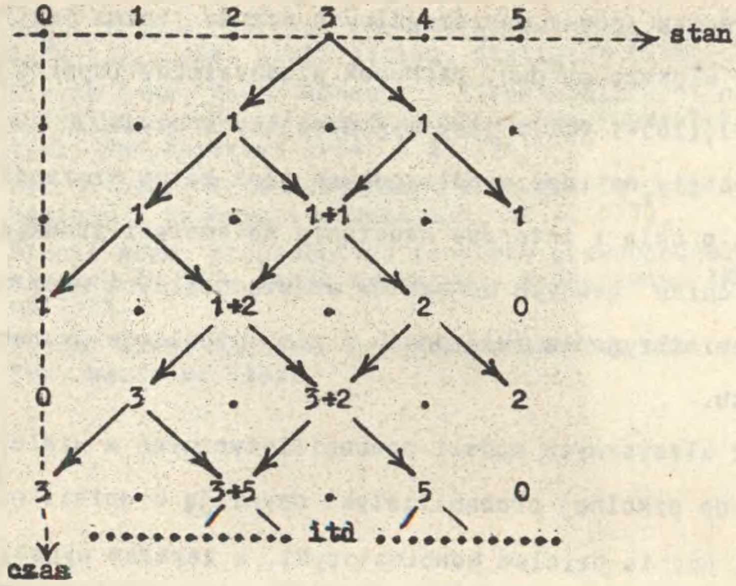
a więc j-ta współrzędna wektora $\overline{w}_n$, czyli p_j^n jest prawdopodobieństwem zdarzenia A_j^n.

Dla $j = 0$ lub $j = m$ $p_j^n = P(\bigcup_{t=0}^{n} A_j^t)$.

Jeśli $z_j^t = 0$, to zdarzenie A_j^t jest niemożliwe. Jeśli $z_j^t > 0$, to $P(A_j^t) = z_j^t(\frac{1}{2})^t$.

Graf stochastyczny odpowiadający łańcuchowi Markowa z klasycznego zadania o ruinie gracza cechuje to, że z każdego stanu mamy co najwyżej dwa wyjścia, bądź-jeśli graf jest zredukowany-z każdego stanu nie będącego pochłaniającym mamy dokładnie dwa wyjścia. Liczby tras prowadzących do węzłów na prostej y=n można dla kolejnych naturalnych n znajdować bezpośrednio, korzystając z idei konstrukcji kolejnych wierszy trójkąta Pascala. Wyjaśnia to rys.6 odpowiadający zredukowanemu grafowi stochastycznemu.

Niech wektory $\overline{z}_0, \overline{z}_1, \overline{z}_2, \ldots$ będą kolejnymi wierszami macierzy. W przypadku ostatniego łańcucha Markowa (a sytuacja będzie analogiczna, gdy z każdego stanu są możliwe jedynie dwa wyjścia) konstrukcja tej macierzy może zostać oparta na



rys.6

idei konstrukcji trójkąta Pascala. Rys.7 przedstawia fragment tej macierzy oraz zawiera interpretacje jej linii oraz jednego jej wyrazu. Ta forma prezentacji kombinatorycznych treści jest szczególnym kodem pewnych informacji.

czas \ stan (kapitał Abla)	0	1	2	3	4	5
1	0	0	1	0	1	0
2	0	1	0	2	0	1
3	1	0	3	0	2	0
4	0	3	0	5	0	2
5	3	0	8	0	5	0
6	0	8	0	13	0	5
...						

to z_2^5

$$P(X_5=2) = P(A_2^5) = z_2^5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 8\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

rys.7

W przypadku, gdy z poszczególnych stanów liczba możliwych wyjść jest większa od dwu, rachunek algebraiczny (oparty na wzorach (9),(10) i (11)) jest wygodniejszy w użyciu.

Graf oparty na idei współrzędnych jest zatem szczególnym-gdy chodzi o cele i interesy nauczania matematyki-środkiem analizy i opisu pewnych schematów doświadczalnych oraz narzędziem rozstrzygania związanych z nimi problemów probabilistycznych.

Fetysz klasycznych modeli probabilistycznych w wielu podejściach do szkolnej probabilistyki czyni ją w opinii nauczyciela i ucznia działem kombinatoryki, a zarazem wypacza istotę pojęć probabilistycznych i zuboża problematykę probabilistyczną o wiele matematycznych treści.

Wprowadzenie dwuwymiarowego grafu stochastycznego do szkolnego rachunku prawdopodobieństwa sugeruje się w [6]. Niniejsze rozważania są także pewnym komentarzem do tamtej propozycji.

LITERATURA

[1] Deo Narshing, Teoria grafów i jej zastosowanie w technice i informatyce, PWN Warszawa 1980,

[2] Engel Arthur, An Introduction to Probability, CSMP, Carbondale 1973,

[3] Engel Arthur, Topics in Probability and Statistics, CSMP, Carbondale 1973,

[4] Engel Arthur, The Probabilistic Abacus, Educational Studies in Mathematics, vol.6 nr 1/1975,s.1-22,

[5] Engel Arthur, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Band 1,2, Ernst Klett Verlag, Stattgart 1973,

[6] Olecka Anna, Pewna koncepcja strukturalizacji nauczania początków rachunku prawdopodobieństwa, Dydaktyka Matematyki, PWN,Warszawa 1984, s.85-154,

[7] Płocki Adam, Idea fuzjonizmu w nauczaniu probabilistyki, Oświata i Wychowanie, wersja B, nr 18(517),

[8] Płocki Adam, Propedeutyka rachunku prawdopodobieństwa w klasach IV-VII. Zarys dydaktyki, Wydawnictwo IKN, Warszawa 1983,

[9] Płocki Adam, Rachunek prawdopodobieństwa dla nauczycieli, PWN, Warszawa 1981.