ADAM PŁOCKI

Nadzieja matematyczna i proces jej kształtowania w nauczaniu probabilistyki

1. KSZTAŁTOWANIE POJĘCIA MATEMATYCZNEGO W NAUCZANIU

Pojęcia probabilistyczne należą do trudniejszych pojęć matematycznych. Wynika to między innymi ze specyfiki ich charakteru, a zwłaszcza ze specyfiki ich podłoża empirycznego, które jest bardziej abstrakcyjne niż podłoże pojęć geometrycznych, czy arytmetycznych. Modele pojęć geometrycznych w konkretnej rzeczywistości, na których opieramy i od których zaczynamy kształtowanie tych pojęć w nauczaniu szkolnym są dotykalne, można je oglądać, można nimi manipulować. Modele pojęć probabilistycznych nie mają tej natury.

Wprowadzenie nowego pojęcia w danej teorii matematycznej jest równoznaczne z podaniem jego poprawnej definicji (wyjątek stanowią jedynie pojęcia pierwotne danej teorii, dla których rolę "uwikłanych definicji" pełnią aksjomaty). Wprowadzenie nowego pojęcia w teorii matematycznej jest aktem jednorazowym.

Inaczej jednak należy rozumieć wprowadzenie pojęcia w nauczaniu matematyki. W tym przypadku musi to być proces długotrwały. Formalna definicja może być owego procesu dopiero finałem. Mówimy tu o procesie kształtowania pojęcia na drodze nieformalnej. Mówi się w tym kontekście o tworzeniu szerokiej bazy intuicyjnej dla danego pojęcia. Ważnym elementem tego procesu staje się język. Chodzi o przystępne dla ucznia opisywania i nazywanie pojęć. W tym procesie kształtowania pojęcia przechodzimy stopniowo od prawie potocznego języka do języka matematyki.

Proces kształtowania pojęcia w tradycyjnym nauczaniu matematyki rozpoczynał się w istocie od formalnej definicji, ilustrowanej następnie serią odpowiednio dobranych zadań. Taki sposób wprowadzania nowego pojęcia przyjęto również w pierwszych koncepcjach nauczania rachunku prawdopodobieństwa w szkole. Proces kształtowania pojęcia odbywa się w takim przypadku z dala od typowych dla matematyki aktywności intelektualnych. Nie uwzględnia się przy tym pewnych motywacji. Problem kto i dlaczego dane pojęcie matematyczne wprowadził (odkrył), komu i do czego może ono służyć jako pewne narzędzie opisu, analizy i badania rzeczywistości schodzi na margines (jeśli się go dotyka to jedynie w kontekście nie zawsze sensownych zadań ukazujących pewne zastosowania praktyczne).

W [7] wymienia się dwie zasadnicze drogi wprowadzania nowego pojęcia i włączania go w zespół innych, już uczniowi znanych pojęć matematycznych, a mianowicie:

"...1) wprowadzenie nowego pojęcia przez definicję podaną przez nauczyciela lub podręcznik, zilustrowaną odpowiednimi przykładami, 2) wprowadzenie nowego pojęcia przez taką organizację aktywności ucznia, że on sam to pojęcie przy dyskretnej pomocy nauczyciela konstruuje i następnie definiuje...".

Obu tym drogom przyznaje się ważną rolę w rozwoju matematycznej kultury. Wybór jednej z tych dróg w nauczaniu zależy od charakteru danego pojęcia i od etapu nauczania. Ale wybierając jedną z tych dróg należałoby przede wszystkim uwzględnić interesy kształcenia matematycznego. Chcemy nie tyle uczyć matematyki,ile kształcić poprzez matematykę. Chodzi więc o wybór tej drogi, której przebycie umożliwia szeroko pojętą twórczość matematyczną. Każda z powyższych dróg charakteryzuje się innymi formami matematycznej twórczości i inne matematyczne aktywności mogą być jej udziałem. W procesie kształtowania pojęcia powinno chodzić zarówno o ukształtowanie matematycznego pojęcia, jak i (być może przede wszystkim) o intelektualny wysiłek i o matematyczną twórczość, które towarzysząc temu procesowi, mogą mieć swój szczególny udział w kształceniu matematycznym.

Istotnymi elementami procesu kształtowania pojęcia są:

a) motywacje;

b) schematyzacja i matematyzacja, zanurzanie konkretnej sytuacji, na tle której zrodziła się potrzeba wprowadzenia nowego pojęcia (jako pewnego narzędzia badania rzeczywistości), w świecie matematycznej abstrakcji, porządkowanie środkami matematycznymi fragmentów otaczającej nas rzeczywistości;

c) odkrywanie i formułowanie definicji;

d) weryfikacja jej poprawności, formułowanie warunków koniecznych i wystarczających do poprawności definicji;

e) uogólnianie definicji;

f) interpretowanie definicji i pojęcia w różnych modelach; rozpoznawanie i podawanie konkretnych modeli pojęcia;

g) stosowanie definicji w zadaniach i w dowodzeniu twierdzeń (stosowanie definicji we wnioskowaniach).

Jednym z trudniejszych w rachunku prawdopodobieństwa jest pojęcie wartości oczekiwanej zmiennej losowej, zwanej dawniej nadzieją matematyczną. Pozostańmy przy tej (pięknej) nazwie.

Jeżeli zmienna losowa ziarnista X jest określona w modelu probabilistycznym (Ω, p), to jej rozkładem nazywamy funkcję p_X ze zbioru $X(\Omega)$ w R określoną wzorem:

$$p_X(x_j) = \sum_{X(\omega)=x_j} p(\omega) \qquad \text{dla } x_j \in X(\Omega).$$

Wartością oczekiwaną albo nadzieją matematyczną zmiennej losowej X nazywamy liczbę:

$$E(X) = \begin{cases} c, \text{ gdy } X(\Omega) = \{c\}, \\ x_1 p_X(x_1) + x_2 p_X(x_2) + \ldots + x_t p_X(x_t), \text{ gdy } X(\Omega) = \{x_1 x_2, \ldots, x_t\}, \\ \sum_{j=1} x_j p_X(x_j), \text{ gdy } X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}, \text{ pod warunkiem,} \\ \qquad \text{że ów szereg jest zbieżny i to bezwzględnie.} \end{cases}$$

W definicjach wielu matematycznych pojęć uwidacznia się operatywny charakter matematyki. Definicje te uwypuklają ciąg operacji, które trzeba wykonać, aby dojść do danego pojęcia (aby je otrzymać). Taki ma charakter definicja funkcji określająca funkcję jako przyporządkowanie. Taki jest charakter definicji całki oznaczonej Riemanna na przedziale właściwym z funkcji ograniczonej na tym przedziale.

Definicje wielu pojęć są jednak statyczne. Taka statyczność cechuje właśnie definicję nadziei matematycznej zmiennej losowej. Nie ukazuje ona rodowodu pojęcia ani nie sugeruje jego rozmaitych interpretacji, czy zastosowań. Ukazywanie rodowodu pojęcia, ukazywanie kto i w jakim celu oraz w jakich okolicznościach odkrył to pojęcie, dlaczego postać jego definicji jest taka, a nie inna, komu i do czego pojęcie to było potrzebne i potrzebne będzie - wszystko to nie jest zadaniem matematycznej definicji.

Teoria matematyczna usuwa na margines zarówno empiryczne źródła pojęć matematycznych, jak i drogę, którą odkrywca przebył, a która doprowadziła do ich definicji poprawnych w sensie matematycznym. Jeśli mówi się w teorii matematycznej o zastosowaniach pojęcia, to ma się na uwadze jedynie jego udział w następnych ogniwach dedukcji (chodzi o oparte na danej definicji dowodzenie twierdzeń oraz o definiowanie kolejnych pojęć za pomocą pojęć wcześniej zdefiniowanych). Poza kręgiem zainteresowania teorii matematycznej pozostaje zatem cała baza intuicyjna (także ewentualne zastosowania w praktyce). Nie bez znaczenia są tu słuszne obawy przed pewną wulgaryzacją matematyki, ilekroć czysta dedukcja zostaje mącona odwoływaniem się do empirii.

Mówiąc o pojęciu matematycznym w kontekście nauczania matematyki w szkole mamy na uwadze przede wszystkim tę intuicyjną bazę. Samą definicję chcemy raczej traktować jako efekt szeroko rozumianej twórczości matematycznej. Definicja może być przedmiotem matematycznego odkrycia na lekcji. Takie odkrywanie może równocześnie ukazywać dane pojęcie jako nowe matematyczne narzędzie rozwiązywania konkretnych problemów.

Ale takie spojrzenie na charakter i rolę procesu kształtowania pojęcia matematycznego wymaga doboru odpowiedniej problematyki, która dostarczyłaby surowca do wspomnianej twórczości matematycznej i do matematycznego odkrycia. Chodzi o poszukiwanie takich problemów w otaczającej nas rzeczywistości, które inspirowałyby potrzebę wprowadzenia nowego pojęcia, jako narzędzia rozwiązania tego problemu środkami matematycznymi, a ponadto rozwiązywanie których (dostępnymi dla ucznia środkami) prowadziłoby do odkrycia postaci definicji. Ta droga kształtowania pojęcia kładzie szczególny nacisk na jego modele, sugerując tym samym pewne zastosowania praktyczne.

Genetyczny sposób kształtowania pojęcia matematycznego w nauczaniu stawia nas zatem przed:

a) doborem odpowiednich sytuacji problemowych, na tle których rodzą się pytania i na tle których formułuje się zadania (sformułowane następnie jako zadania matematyczne) inspirujące potrzebę wprowadzenia pojęcia;

b) doborem matematycznych środków, którymi zadania te zostaną rozwiązywane, a efektem rozwiązywania będzie odkrycie postaci definicji;

c) wykorzystaniem tych sytuacji problemowych jako surowca do matematycznej twórczości (w szczególności do oswajania ucznia z metodologią matematyki).

Bogactwa matematycznych aktywności na drodze od realnego świata (którego dotyczy dana sytuacja problemowa) do świata matematycznej abstrakcji nie docenia się we właściwy sposób w tradycyjnym nauczaniu, które dedukcję traktuje jako jedyną formę matematycznych aktywności, pomijając inne, jak: schematyzacja i matematyzacja (porządkowanie fragmentów rzeczywistości środkami matematycznymi), uzasadnianie na gruncie matematyki pewnych empirycznych faktów (dane empiryczne jako stadium myślenia matematycznego), stawianie hipotez i ich weryfikacja, odkrywanie analogii i izomorfizmów oraz wykorzystywanie ich we wnioskowaniach itp.

W kontekście procesu kształtowania pojęć w nauczaniu matematyki podkreśla się zasady prefiguracji, wariacji (metoda kilku modeli), zmienności upoglądowień itp ([16]). Pojęcia matematyczne w nauczaniu szkolnym powinny być ukazywane w rozmaitych aspektach. Ma to szczególne znaczenie, gdy chodzi o właściwe rozumienie istoty pojęć probabilistycznych, które stać się powinny w nauczaniu rachunku prawdopodobieństwa syntezą wielu rozmaitych aspektów. Ta wieloaspektowość pojęć umożliwia realizację kolejnej zasady zwanej zasadą integracji (idea fuzjonizmu).

Niniejsza praca prezentuje pewną, opartą na idei nauczania genetycznego, koncepcję kształtowania pojęcia nadziei matematycznej w nauczaniu szkolnym, wykorzystującą proces odkrywania tego pojęcia jako nowego narzędzia analizy i badania rzeczywistości do inspirowania wielu form twórczości matematycznej.

2. PROBLEM GRY SPRAWIEDLIWEJ A POJĘCIE NADZIEI MATEMATYCZNEJ. MOTYWACJE. STATYSTYCZNY ASPEKT NADZIEI MATEMATYCZNEJ

Problem, czym inspirować, jak rozpoczynać i jak organizować proces kształtowania trudnych pojęć probabilistycznych należy do podstawowych w dydaktyce rachunku prawdopodobieństwa. Brak w tym względzie dobrych wzorców jest szczególnie odczuwalny. W pytaniu, jak organizować ów proces zawiera się także problem udziału tego procesu w kształceniu poprzez matematykę.

Inspiracją do wprowadzenia pojęcia nadziei matematycznej na lekcji może być problem sprawiedliwości następującej gry losowej. Rekwizytem w grze jest moneta. Gracz rzuca monetą tak długo, aż wypadnie reszka, ale nie więcej niż 5 razy* i wy-

---

* Przeprowadzany w tej grze schemat doświadczalny jest tzw. nie trwającym dłużej niż 5 prób oczekiwaniem na pierwszy sukces (sukces i porażka są tu jednakowo prawdopodobne)

grywa tyle złotówek, ile musiał wykonać rzutów. Udział w tej grze trzeba jednak opłacić wykupując bilet wstępu. Kiedy taką grę nazwałbyś sprawiedliwą?

Tak postawiony problem staje się na lekcji punktem wyjścia, a zarazem dostarcza surowca do konstrukcji, odkrycia, a więc do kształtowania pojęcia nadziei matematycznej jako nowego narzędzia umożliwiającego rozstrzyganie pewnych realnych problemów. Pytanie celowo nie jest sformułowane precyzyjnie. Chodzi o to, aby stopniowo ów problem opisać środkami matematycznymi i aby przełożyć powyższe pytanie na język matematyki. Takie zanurzanie konkretnych problemów w świecie matematycznej abstrakcji jest pierwszym etapem stosowania matematyki w praktyce. Ale taki był również w historii matematyki, a zwłaszcza w dziejach rachunku prawdopodobieństwa, pierwszy etap procesu odkrywania wielu pojęć matematycznych, jako pewnych narzędzi badania rzeczywistości.

W pytaniu "kiedy gra jest sprawiedliwa?" chodzi o to, przy jakiej wysokości wstępu. Taki sens owego pytania ma uczeń odkryć sam.

Sytuacja, jaka powstała na tle problemu sprawiedliwości gry losowej, inspiruje różne pytania:

- Co to wszystko ma wspólnego z matematyką? Dlaczego to pytanie zostało postawione na lekcji matematyki?
- Do jakiego działu matematyki należałoby ów problem zaliczyć? Który dział matematyki mógłby dostarczyć swoich narzędzi do sformułowania właściwej odpowiedzi?

- Jak środkami matematycznymi określić sprawiedliwość gry?

Dalsza część pracy jest pewnym protokołem z lekcji w klasie III liceum poświęconej pojęciu nadziei matematycznej.

- Jeśli zapłacę za udział w grze 3 złote i grając wygram 3 złote, to taką grę nazwałbym sprawiedliwą - mówi jeden z uczniów.

- No tak, ale ja także wpłaciwszy 3 złote wstępu (wszyscy jednakowo ów wstęp opłacamy) mogę wygrać tylko złotówkę, a więc ja powinienem wówczas tę grę nazywać niesprawiedliwą - protestuje drugi.

Kryterium sprawiedliwości gry oparte na rezultacie jednego udziału w grze okazuje się więc subiektywne. I odkrycie tego faktu stanowi ważny krok w kierunku sformułowania obiektywnego kryterium. Los gracza, tj. kwota jego wygranej lub przegranej, w jednej, ale także w dwu, trzech, a nawet dziesięciu powtórzeniach udziału w grze, nie może przesądzać o tym, czy gra jest sprawiedliwa, czy nie. Ale stosunkowo duża liczba powtórzeń udziału w grze może dostarczyć podstaw do podjęcia decyzji o uznawaniu gry za sprawiedliwą, albo nie.

Mamy tu do czynienia z podejmowaniem decyzji w sytuacji, gdy niepewności co do stanów świata zewnętrznego są scharakteryzowane prawdopodobieństwami tych stanów (stany świata zewnętrznego są tu wynikami doświadczenia losowego o dającym się określić a priori modelu probabilistycznym). Podejmowaniu decyzji w tego typu sytuacjach towarzyszą pewne błędy (zob. [13]).

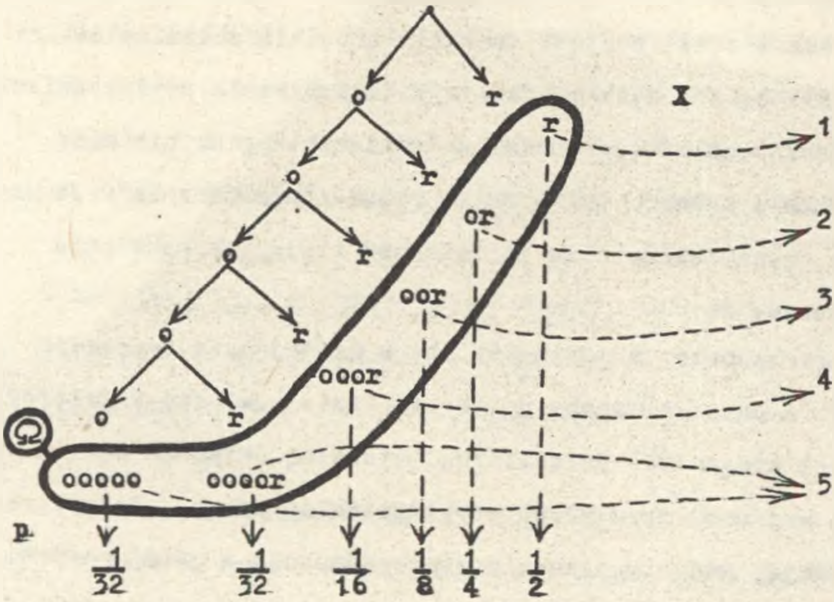
Będziemy skłonni uznać grę za sprawiedliwą (a ściślej: nie będziemy mieli podstaw do kwestionowania sprawiedliwości gry), jeśli łączny zysk z udziału w bardzo wielu powtórzeniach gry i łączna opłata za udział w tej liczbie gier nie będą się znacznie różnić. Tylko co to znaczy "nieznacznie"? Jakie różnice należy uznawać tu za istotne? Kryterium nadal nie jest precyzyjne*.

Oznaczmy przez m koszt udziału w jednej grze (wysokość wstępu), a przez n liczbę powtórzeń udziału w grze i załóżmy, że n jest stosunkowo dużą liczbą naturalną. Niech X będzie wygraną w jednej grze przed przystąpieniem do gry. X jest zatem funkcją, która wynikowi przeprowadzanego w grze schematu doświadczalnego przypisuje liczbę wygranych złotówek (tj. liczbę wykonanych rzutów monetą). X jest zmienną losową. Model probabilistyczny dla wspomnianego schematu doświadczalnego oraz graf strzałkowy funkcji X i rozkładu prawdopodobieństwa p prezentuje rysunek 1.

Niech $l_n(X=j)$ oznacza liczbę tych spośród n powtórzeń gry, w których wygrana wynosiła j złotych (j=1,2,3,4,5). Łączna wygrana jest zatem sumą:

$$\sum_{j=1}^{5} j\, l_n(X=j).$$

* W teorii weryfikacji hipotez konstruuje się test istotności, umożliwiający weryfikację hipotezy orzekającej, że gra jest sprawiedliwa, na podstawie próbki.



rys.1

Łączny koszt udziału w tych n grach wynosi nm złotych.

Nie będzie podstaw do kwestionowania sprawiedliwości gry, jeśli

$$nm = \sum_{j=1}^{5} jl_n(X=j),$$

czyli, gdy:

$$(1) \qquad m = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{5} jl_n(X=j).$$

Spójrzmy na prawą stronę w (1) z punktu widzenia statystyki matematycznej. Przed grą jest ona zmienną losową. Jest to tzw. statystyka średnia z próbki n-wyrazowej z populacji Ω, w której cechą jest zmienna losowa X. Statystyka ta jest estymatorem zgodnym (co wynika z prawa wielkich liczb Chinczyna) i nieobciążonym wartości oczekiwanej cechy X. Powyższa uwaga ma ukazywać idee, na których zostaje tu oparty proces odkrywania i kształtowania pojęcia nadziei matematycznej jako pewnego narzędzia rozwiązywania konkretnych problemów.

Prawa strona w (1) jest średnią arytmetyczną wygranych w n powtórzeniach gry. Interpretujemy tę prawą stronę jako średnią wygraną przepadającą na jedną grę. Średnia ta jest wielkością losową, wielkością zależną od przypadku w tym sensie, że przy ponownym powtórzeniu n razy udziału w grze wartość tej średniej arytmetycznej będzie najprawdopodobniej inna, choć przy dużym n najprawdopodobniej będzie się nieznacznie różnić od poprzednio uzyskanej. Te wnioski formułują sami uczniowie, potwierdzając nimi właściwe rozumienie istoty prawa wielkich liczb Bernoulliego. Zauważmy, że:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{5} j l_n(X=j) = \sum_{j=1}^{5} j\,\frac{l_n(X=j)}{n} = \sum_{j=1}^{5} j f_n(X=j),$$

gdzie $f_n(X=j)$ jest częstością względną (krótko: częstością) zdarzenia $\{X=j\}$ $(j=1,2,3,4,5)$ w n powtórzeniach nie trwającego dłużej niż pięć rzutów oczekiwania na wypadnięcie reszki. Wartość statystyki średnia z próbki została tym samym przedstawiona w postaci kombinacji liniowej wartości zmiennej losowej X o współczynnikach będących częstościami, z jakimi X przyjmuje te wartości w n doświadczeniach.

Związek (1) przyjmuje zatem postać

(2) $$m \approx \sum_{j=1}^{5} j f_n(X=j).$$

Przed powtórzeniem udziału w grze prawa strona w (2) jest statystyką średnia z próbki. Po n-krotnym powtórzeniu udziału w grze prawa strona jest liczbą, będącą wartością powyższej statystyki dla n-wyrazowej próbki.

Od średniej arytmetycznej, która jest wielkością losową, należy teraz przejść do charakterystyki zdeterminowanej, niezależnej od przypadku (tj. od wyników n-krotnego powtórzenia doświadczenia losowego przeprowadzanego w grze). "Sprawcą" losowości owej średniej arytmetycznej są częstości zdarzeń $\{X=j\}$, $j=1,2,3,4,5$.

- Gdyby ów gracz, który przed chwilą n raz powtarzał swój udział w grze, znowu n razy zechciał zagrać i sporządzić podobny do powyższego rachunek to jego łączna wygrana byłaby inną liczbą niż poprzednio - zauważa jeden z uczniów.

Inny uczeń dodaje:

- Ale jeśli n jest bardzo duże, to te wygrane najprawdopodobniej nie będą się znacznie różnić.

Swój wniosek ostatni uczeń uzasadnia tym, że przy dostatecznie dużym n i przy ustalonym j ($j=1,2,3,4,5$) częstości $f_n(X=j)$ otrzymywane przy wielokrotnym powtarzaniu n-krotnego udziału w grze najprawdopodobniej nie będą się znacznie różnić. To spostrzeżenie stanowi kolejny krok w procesie matematyzacji, jaki prowadzić będzie do sformułowania definicji nowego pojęcia, za pomocą którego będzie można rozstrzygać sprawiedliwość gry losowej szczególnego typu (wygrana wymierna w liczbach i zależna jedynie od wyniku doświadczenia losowego, a nie od takiej czy innej strategii gracza).

Jednym z ważnych aspektów pojęcia prawdopodobieństwa zdarzenia jest aspekt statystyczny, czyli częstościowy. Uwypuklany on zostaje głównie w początkowym okresie procesu kształtowania pojęcia prawdopodobieństwa. Pierwsze oceny jakościowe prawdopodobieństwa zdarzenia oparte były na lekcjach prowadzonych we wspomnianej klasie na częstości zdarzenia w wielu eksperymentach. Częstość zdarzenia przed n-krotnym powtarzaniem doświadczenia jest zmienną losową. Ze statystycznego stanowiska rzecz biorąc jest ona statystyką średnią z próbki z populacji będącej przestrzenią wyników wspomnianego doświadczenia i w której cechę o rozkładzie zerojedynkowym generuje to zdarzenie (cecha jest w tym przypadku funkcją charakterystyczną tego zdarzenia, jako podzbioru przestrzeni wyników). Prawdopodobieństwo zdarzenia jest w tym przypadku wartością oczekiwaną owej cechy. Szacowanie prawdopodobieństwa zdarzenia jego częstością w dużej liczbie doświadczeń, jest więc estymacją wartości oczekiwanej cechy zerojedynkowej za pomocą statystyki średnia z próbki.

Z prawa wielkich liczb Bernoulliego wynika, że statystyka ta jest zgodnym estymatorem owego parametru. Częstość zdarzenia w n-krotnym powtórzeniu doświadczenia jest więc (po tym n-krotnym powtórzeniu) liczbą szacującą prawdopodobieństwo tego zdarzenia w odpowiednim modelu probabilistycznym. Prawdopodobieństwo zdarzenia można zatem interpretować jako teoretyczny odpowiednik takiej wielkości empirycznej, jak częstość zdarzenia w bardzo wielu eksperymentach.

Zastąpmy zatem po prawej stronie w (2) liczbę $f_n(X=j)$ przez jej, wspomniany wyżej, teoretyczny odpowiednik, to znaczy przez $P(X=j)$.

Średnia arytmetyczna (jako wielkość zależna od doświadczenia) zastąpiona zostaje wielkością zdeterminowaną, tj. sumą postaci

$$\sum_{j=1}^{5} jP(X=j). \tag{3}$$

Droga dojścia do sumy (3), a zwłaszcza początek tej drogi, nadaje tej sumie konkretny sens. Owa suma określa wysokość wstępu do gry sprawiedliwej. Gra losowa, o której była mowa, będzie sprawiedliwa, gdy

$$m = \sum_{j=1}^{5} jP(X=j). \tag{4}$$

Prawa strona w (4) jest równocześnie pewną charakterystyką rozkładu zmiennej losowej X. Empiryczny rodowód tej sumy (średnia arytmetyczna) sugeruje, aby nazwać ją wartością średnią zmiennej losowej X. Jest to zarazem wartość oczekiwana, czyli niejako nadzieja matematyczna tej zmiennej losowej.

Przytoczone wyżej przejście od konkretnego zadania do nowego pojęcia, które to zadanie pozwoliło rozwiązać środkami matematycznymi, sugeruje ogólną postać definicji zmiennej losowej X o skończonym zbiorze wartości.

Jeśli p_X jest rozkładem zmiennej losowej X, przy czym $X(\Omega)$ jest zbiorem skończonym, to wartością oczekiwaną tej zmiennej losowej nazwać należy liczbę

$$E(X) = \sum_{x_j \in X(\Omega)} x_j p_X(x_j), \quad \text{gdzie } p_X(x_j) = P(X=x_j).$$

Udziałem rozstrzygania problemu sprawiedliwości szczególnego typu gry losowej stał się proces odkrywania nowego probabilistycznego pojęcia. Sam problem dostarczył motywacji temu procesowi. Powstały na tle gry losowej problem zainspirował wprowadzenie pojęcia nadziei matematycznej. Jego rozwiązywanie podsunęło koncepcję formalnej definicji tego pojęcia, które równocześnie stało się nowym matematycznym narzędziem rozwiązywania praktycznego problemu.

Grę losową, w której wygrana zależy od wyniku doświadczenia losowego i wejście do której trzeba opłacić, uznamy za sprawiedliwą, jeśli wstęp do niej jest równy wartości oczekiwanej wygranej. Na wspomnianej lekcji uczeń stał się odkrywcą tego faktu.

Rozwiązując problem gry sprawiedliwej - nie graliśmy. Poddawaliśmy natomiast matematycznej obróbce fikcyjne wyniki wielokrotnego powtarzania udziału w grze (a więc wyniku pewnego eksperymentu). W heurezie, będącej udziałem przedstawionego wyżej procesu matematyzacji, uwypuklony został statystyczny aspekt nadziei matematycznej (wartość oczekiwana zmiennej losowej ukazana została jako teoretyczny, a więc wyidealizowany odpowiednik średniej arytmetycznej, która jest wartością statystyki średnia z próbki). Proces odkrywania a zarazem kształtowania pojęcia nadziei matematycznej został tu oparty na statystycznej idei estymacji.

3. ŚREDNI CZAS OCZEKIWANIA NA PRAWO WEJŚCIA DO GRY W CHIŃCZYKA. UOGÓLNIENIE DEFINICJI NADZIEI MATEMATYCZNEJ

W omawianej grze celowo został ograniczony czas trwania doświadczenia losowego (mierzony liczbą etapów). Program rachunku prawdopodobieństwa obejmuje bowiem jedynie skończone modele probabilistyczne. Nasuwa się jednak pytanie, przy jakiej opłacie wstępu sprawiedliwą byłaby gra, w której rzuca się monetą dopóty, dopóki nie wypadnie reszka i wygrywa tyle złotówek, ile zostało wykonanych rzutów. Z każdym wynikiem oczekiwania na wypadnięcie reszki gracz kojarzy liczbę wygranych złotówek (czyli liczbę, zwaną w probabilistyce czasem oczekiwania na pierwszy sukces). Zmienną losową, z jaką mamy tu do czynienia, oznaczmy przez T. Jej rozkład jest funkcją p_T określoną wzorem:

$$p_T(j) = (\tfrac{1}{2})^j \quad \text{dla } j=1,2,3,\ldots.$$

Pytanie o wysokość wstępu do takiej gry gwarantującą jej sprawiedliwość inspiruje uogólnienie poprzednio odkrytej definicji nadziei matematycznej na przypadek, gdy zbiór wartości zmiennej losowej jest przeliczalny.

Innym problemem, z otaczającej ucznia rzeczywistości, inspirującym również wspomniane uogólnienie definicji nadziei matematycznej jest sprawa średniego czasu oczekiwania na prawo wejścia do gry w chińczyka.

Zanim gracz uzyska prawo wejścia do gry w chińczyka musi wyrzucić kostką szóstkę. Rzut kostką powtarza on dopóty, dopóki nie wypadnie szóstka. Niech T będzie liczbą rzutów potrzebnych do uzyskania tego prawa. T jest w tym przypadku zmienną losową o rozkładzie p_T określonym wzorem:

$$p_T(j) = (\tfrac{5}{6})^{j-1}\,\tfrac{1}{6} \quad \text{dla } j=1,2,3,,\ldots$$

Postawmy problem: jaki jest średni czas oczekiwania na prawo wejścia do takiej gry? Ten problem mógł powstać w kontekście pytania o sprawiedliwość gry losowej, w której gracz rzuca kostką tak długo aż wyrzuci szóstkę, uzyskując tyle złotówek, ile wykonał rzutów, ale opłacając wcześniej udział w grze.

Poprzednie odkrycie postaci definicji nadziei matematycznej sugeruje, że w tym przypadku wartość oczekiwana powinna być sumą iloczynów postaci $jp_T(j)$ rozciągającą się na wszystkie wartości zmiennej losowej T. Suma ta staje się więc szeregiem postaci:

$$\sum_{j=1} jp_T(j) = \sum_{j=1} jP(T=j).$$

W ogólności, gdy zmienna losowa X przyjmuje nieskończenie wiele wartości dających się ustawić w ciąg $(x_1,x_2,x_3,\ldots)$, to jej nadzieją matematyczną powinno się nazwać sumę szeregu postaci:

$$\sum_{j=1} x_j p_X(x_j) = \sum_{j=1} x_j P(X=x_j). \tag{5}$$

Ale to uogólnienie inspiruje natychmiast pytanie, czy taka definicja byłaby poprawna w sensie matematycznym. Transfer metody, z jakim mamy tu do czynienia, inspiruje więc nową formę matematycznej twórczości, a mianowicie poszukiwanie i formułowanie takich własności szeregu (5), które gwarantowałyby poprawność definicji.

Wartość oczekiwana powinna być liczbą. Należy więc żądać, aby szereg (5) był zbieżny. Gdyby tak nie było, powiemy, że zmienna losowa X nie posiada nadziei matematycznej.

Wartości zmiennej losowej X mogą być różnych znaków. W (5) zostały te wartości ponumerowane. Ktoś w zbiorze tych wartości wprowadził porządek. Zbieżność szeregu (5) i jego suma może zależeć od tego, subiektywnie wprowadzonego, porządku. Będzie tak, gdy szereg (5) jest zbieżny, ale warunkowo. Aby definicja nadziei matematycznej była poprawna, szereg (5) musi być bezwzględnie zbieżny.

Transfer metody, o którym wyżej mowa, wiąże się z tzw. zasadą integracji. Poszczególne działy szkolnej matematyki tworzą jakby równoległe "linie pionowe". Jedną z nich jest rachunek prawdopodobieństwa, inną rachunek różniczkowy. Treści każdego z tych pionów powinny być w nauczaniu integrowane poprzez ciągłe odwoływanie się do pojęć i twierdzeń danego pionu poznanych wcześniej oraz poprzez stopniowe uogólnianie definicji i twierdzeń wcześniej wprowadzonych. Mówimy tu o integracji pionowej.

Uogólnianie definicji, poszukiwanie warunków poprawności tego uogólnienia stworzyło równocześnie potrzebę odwoływania się do pojęć i twierdzeń (a więc do treści) innych działów matematyki. Mówimy tu o integracji wewnętrznej (znanej pod nazwą idei fuzjonizmu).

Język matematyki, matematyczne modele, matematyczne struktury i ogólnie matematyczne metody wykorzystuje się w innych przedmiotach nauczania. Ta ekspansja matematycznych środków i metod na inne dziedziny wiedzy stanowi istotę tzw. integracji zewnętrznej. O tych powiązaniach omawianych tu treści z innymi działami wiedzy będzie mowa w dalszej części pracy.

4. SPRAWIEDLIWOŚĆ W KONTEKŚCIE GRY LOSOWEJ

W omawianych wyżej grach przeprowadzane było doświadczenie losowe. W zależności od jego wyniku gracz zdobywał taką lub inną kwotę. Tę kwotę nazwaliśmy wygraną. W sensie probabilistycznym ta wygrana jest zmienną losową. Jeśli udział w grze trzeba opłacić,to gra jest sprawiedliwa wtedy,gdy koszt wstępu jest równy wartości oczekiwanej wygranej. Jest to jeden typ gier losowych.

Czasami przez wygraną w tego typu grach rozumie się różnicę pomiędzy kwotą uzyskaną za wynik doświadczenia i kwotą wpłaconą na wstępie. Przy takim podejściu do wygranej gra jest sprawiedliwa, jeśli wartość oczekiwana wygranej jest równa zero.

Innego typu jest gra losowa, w której uczestniczy co najmniej dwu graczy i w której wygrana nie jest wymierzana liczbowo. W tych grach ustala się tylko który z graczy wygrał, a który nie. W tym przypadku prawdopodobieństwo zdarzenia staje się (możliwym do odkrycia przez ucznia) nowym matematycznym narzędziem pozwalającym rozstrzygać czy gra jest sprawiedliwa, czy nie. Grę taką nazwiemy sprawiedliwą jeśli szanse każdego z graczy są równe, co w języku probabilistyki oznacza, że prawdopodobieństwo wygranej (czyli prawdopodobieństwo zdarzenia, że dany gracz wygra) dla każdego z graczy jest jednakowe. O tego typu grach losowych w kontekście odkrywania pojęcia prawdopodobieństwa zdarzenia mowa jest szerzej w [12].

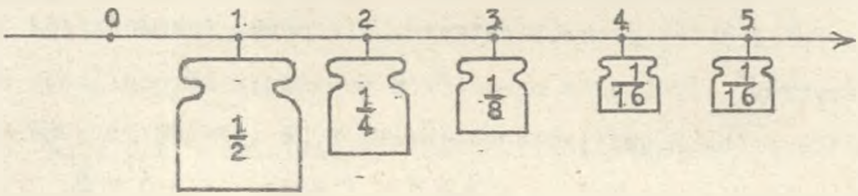
Kolejny typ gier losowych stanowią te, w których również uczestniczy wielu graczy, przy czym w zależności od wyniku przeprowadzanego w grze doświadczenia losowego każdy uzyskuje pewną (niekoniecznie jednakową) liczbę punktów. Wejście do gry nie jest opłacane. Wygrana wymierzana jest w punktach. Wygrywa ten, kto uzyskał maksymalną liczbę punktów. Taką grę uznamy za sprawiedliwą jeśli nadzieja matematyczna wygranej każdego z graczy jest jednakowa. Tego typu gra losowa opisana jest w zadaniu 7.14 na str.118-120 w [11].

5. FIZYCZNY ASPEKT NADZIEI MATEMATYCZNEJ

W kontekście procesu kształtowania pojęć matematycznych podkreśla się zasadę wariacji i zmienności upoglądowień. Matematyczne pojęcia powinny być w nauczaniu szkolnym ukazywane w rozmaitych aspektach.

Funkcję p_X, zwaną rozkładem zmiennej losowej dyskretnej, daje się interpretować na prostej, jako ziarnisty rozkład jednostkowej masy na osi liczbowej. Liczbę $p_X(x_j)$, zwaną prawdopodobieństwem, z jakim zmienna losowa X przyjmuje wartość x_j, interpretujmy jako masę skupioną w punkcie x_j na osi.

Ta fizyczna interpretacja rozkładu ziarnistej (dyskretnej) zmiennej losowej X umożliwia prezentację jej rozkładu w formie ikonicznej. Jeśli liczba x_j jest wartością zmiennej losowej X, to w punkcie o odciętej x_j na osi liczbowej uwieśmy pojemnik z masą równą $p_X(x_j)$. Na rysunku 2 przedstawiono w tej formie rozkład wygranej w pierwszej z rozważanych tu gier.



rys.2

Suma (4) określająca nadzieję matematyczną zmiennej losowej X staje się w tej interpretacji fizycznej środkiem ciężkości układu mas na prostej. Gdyby ów układ mas podeprzeć w punkcie o odciętej E(X), to układ ten będzie w równowadze.

6. WŁASNOŚCI NADZIEI MATEMATYCZNEJ WYNIKAJĄCE Z NIEFORMALNYCH JESZCZE ROZWAŻAŃ W PROCESIE ODKRYWANIA DEFINICJI

Interpretacja fizyczna rozkładu zmiennej losowej ziarnistej umożliwia odkrycie i sformułowanie w formie matematycznego twierdzenia wielu własności nadziei matematycznej. Funkcja

p_X jest w tej interpretacji matematyczną formą prezentacji rozkładu masy na prostej, zaś E(X) jest środkiem ciężkości tego układu mas.

1. Jeśli dla rozkładu masy na prostej istnieje środek symetrii, to ów środek jest równocześnie środkiem ciężkości, a zatem, jeśli wykres funkcji p_X jest symetryczny względem punktu m, to m jest nadzieją matematyczną zmiennej losowej X.

Tak więc wartością oczekiwaną łącznej liczby oczek uzyskanych w rzucie dwiema kostkami do gry jest środek przedziału [2,12], czyli liczba 7.

Jeśli model probabilistyczny dla próby Bernoulliego jest klasyczny*, to liczba sukcesów w schemacie Bernoulliego o m takich próbach jest zmienną losową S_m o rozkładzie symetrycznym względem prostej $x = \frac{0 + m}{2}$, a zatem $E(S_m) = \frac{m}{2}$.

2. Z fizycznej interpretacji rozkładu zmiennej losowej i jej wartości oczekiwanej, a także z faktu, że nadzieja matematyczna jest pewnym uogólnieniem średniej arytmetycznej wynika, że jeśli X ma rozkład różny od jednopunktowego,to

$$\min X(\Omega) < E(X) < \max X(\Omega),$$

gdzie $X(\Omega)$ oznacza zbiór wartości zmiennej losowej X.

3. Przesunięcie równoległe układu mas na prostej o dany wektor powoduje przesunięcie się o ten sam wektor środka ciężkości, a zatem jeśli X jest ziarnistą zmienną losową o wartości oczekiwanej E(X), a c jest dowolną ustaloną

---

* Jeśli Ω jest zbiorem skończonym, a p funkcją stałą na Ω, to parę (Ω, p) nazywamy klasycznym modelem probabilistycznym.

liczbą rzeczywistą, to zmienna losowa $Y=X+c$ także musi posiadać wartość oczekiwaną i

$$E(X+c) = E(X) + c.$$

4. Z fizycznej interpretacji rozkładu zmiennej losowej X i jej wartości oczekiwanej wynika również, że

$$\sum_{x_j \in X(\Omega)} (x_j - E(X)) p_X(x_j) = 0$$

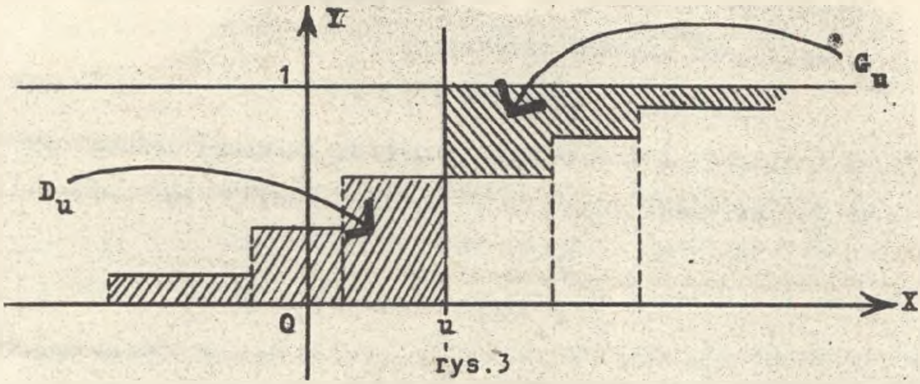
Fizyczny model rozkładu umożliwia także odkrywanie i formułowanie pewnych własności wariancji ziarnistej zmiennej losowej. Wariancja jest w tej interpretacji momentem bezwładności.

7. NADZIEJA MATEMATYCZNA W ASPEKCIE MIAROWYM

Załóżmy, że ziarnista zmienna losowa X posiada wartość oczekiwaną E(X). Niech F_X będzie dystrybuantą zmiennej losowej X. Jeśli p_X jest rozkładem zmiennej losowej X, to:

$$F_X(x) = \sum_{x_j < x} p_X(x_j).$$

Niech u będzie liczbą rzeczywistą. Przez D_u oznaczmy obszar ograniczony od góry wykresem funkcji F_X, od dołu osią odciętych i od strony prawej prostą $x=u$. Przez G_u oznaczmy obszar ograniczony od góry prostą $y=1$, od dołu wykresem dystrybuanty F_X i od lewej prostą $x=u$ (zob. rys.3).



rys.3

Niech $|D_u|$ i $|G_u|$ oznaczają odpowiednio pole obszaru D_u i pole obszaru G_u.

Udowodnimy, że:

1° jeżeli zmienna losowa X posiada nadzieję matematyczną i $E(X)=m$, to $|D_m|=|G_m|$ oraz

2° jeżeli dla pewnego m jest $|D_m|=|G_m|$, to zmienna losowa X posiada nadzieję matematyczną i $E(X) = m$.

Niech $\{x_k : k \in I\}$ będzie zbiorem wartości zmiennej losowej X*. Niech $\sum_{k \in I} x_k p_X(x_k)$ będzie szeregiem zbieżnym bezwzględnie. Suma tego szeregu jest zatem nadzieją matematyczną zmiennej losowej X. Niech $E(X) = m$. Oznaczajmy dalej $p_X(x_k)$ przez p_k.

(6)

$$|D_m| = \sum_{x_k \leq m} (m-x_k)p_k = \sum_{x_k \leq m} (mp_k - x_k p_k) =$$

$$= \sum_{x_k \leq m} mp_k - \sum_{x_k \leq m} x_k p_k.$$

---

* Z faktu, że X jest zmienną ziarnistą wynika, iż $I=\{1,2,\dots,r\}$ lub $I=\{1,2,\dots\}$.

(7)
$$|G_m| = \sum_{x_k > m} (x_k - m)p_k = \sum_{x_k > m} (x_k p_k - m p_k) =$$
$$= \sum_{x_k > m} x_k p_k - \sum_{x_k > m} m p_k .$$

Szeregi (6) i (7) są bezwzględnie zbieżne, bo:

$$\sum_{x_k \leqslant m} m p_k = m \sum_{x_k \leqslant m} p_k \leqslant m \sum_{k \in I} p_k = m$$

oraz

$$\sum_{x_k > m} m p_k = m \sum_{x_k > m} p_k \leqslant m \sum_{k \in I} p_k = m$$

orąz

$$\sum_{x_k \leqslant m} |x_k| p_k \leqslant \sum_{k \in I} |x_k| p_k \quad \text{i} \quad \sum_{x_k > m} |x_k| p_k \leqslant \sum_{k \in I} |x_k| p_k ,$$

a szereg po prawych stronach ostatnich dwu nierówności jest zbieżny, bo istnieje E(X).

Pokażmy, że sumy szeregów w (6) i (7) są równe.

$$m = \sum_{k \in I} x_k p_k = \sum_{x_k \leqslant m} x_k p_k + \sum_{x_k > m} x_k p_k , \quad m.1 = m \sum_{k \in I} p_k ,$$

a zatem

(8)
$$m \sum_{k \in I} p_k = \sum_{x_k \leqslant m} x_k p_k + \sum_{x_k > m} x_k p_k .$$

$$m.1 = m \Big(\sum_{x_k \leqslant m} p_k + \sum_{x_k > m} p_k \Big) = m \sum_{x_k \leqslant m} p_k + m \sum_{x_k > m} p_k ,$$

a zatem wstawiając powyższe do (8) dostajemy:

$$m\sum_{x_k\leqslant m}p_k + m\sum_{x_k>m}p_k = \sum_{x_k\leqslant m}x_kp_k + \sum_{x_k>m}x_kp_k,$$

skąd wynika, że:

$$m\sum_{x_k\leqslant m}p_k - \sum_{x_k\leqslant m}x_kp_k = \sum_{x_k>m}x_kp_k - m\sum_{x_k>m}p_k,$$

czyli że:

$$\sum_{x_k\leqslant m}(m - x_k)p_k = \sum_{x_k>m}(x_k - m)p_k,$$

co oznacza równość miar obszarów D_m i G_m.

Załóżmy teraz, że istnieje dokładnie jeden taki punkt m, że obszary D_m i G_m mają równe miary. Udowodnimy, że wówczas szereg $\sum_{x_k\in I}x_kp_k$ jest bezwzględnie zbieżny i że suma tego szeregu wynosi m.

(9)
$$|D_m| = \sum_{x_k\leqslant m}(m - x_k)p_k$$

oraz

(10)
$$|G_m| = \sum_{x_k>m}(x_k - m)p_k.$$

Z założenia $|D_m| = |G_m|$, a więc oba szeregi (9) i (10) są zbieżne. Ponieważ są to szeregi o wyrazach nieujemnych, ich zbieżność jest równocześnie zbieżnością bezwzględną.

(11)
$$\sum_{x_k\leqslant m}(m - x_k)p_k = \sum_{x_k\leqslant m}mp_k - \sum_{x_k\leqslant m}x_kp_k,$$

(12)
$$\sum_{x_k > m}(x_k - m)p_k = \sum_{x_k > m} x_k p_k - \sum_{x_k > m} m p_k .$$

Ze wspomnianej równości pól wynika zatem równość:

$$\sum_{x_k \leq m} m p_k - \sum_{x_k \leq m} x_k p_k = \sum_{x_k > m} x_k p_k - \sum_{x_k > m} m p_k ,$$

a więc równość:

(13)
$$\sum_{x_k \leq m} m p_k + \sum_{x_k > m} m p_k = \sum_{x_k \leq m} x_k p_k + \sum_{x_k > m} x_k p_k .$$

Strona prawa w (13) jest szeregiem $\sum_{k \in I} x_k p_k$. Strona lewa w (13) jest szeregiem $\sum_{k \in I} m p_k$, a więc jego suma jest równa m.

Szereg po prawej stronie w (13) jest bezwzględnie zbieżny, a zatem suma tego szeregu, czyli liczba m, jest nadzieją matematyczną zmiennej losowej X.

Z ostatniego twierdzenia wynika zatem druga, równoważna uprzednio sformułowanej, definicja nadziei matematycznej oparta na dystrybuancie.

8. NADZIEJA MATEMATYCZNA W ASPEKCIE STOCHASTYCZNEGO GRAFU PRZEPŁYWU. ŚREDNI CZAS TRWANIA DOŚWIADCZENIA LOSOWEGO O LOSOWEJ LICZBIE ETAPÓW

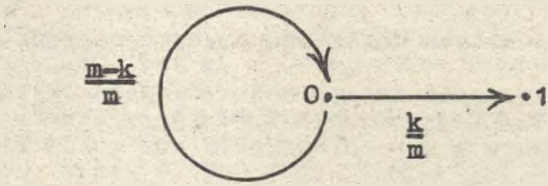
Załóżmy, że kolejne etapy wieloetapowego doświadczenia losowego są przeprowadzane w kolejnych jednostkach czasu.

Przy tej umowie liczba etapów doświadczenia o losowej liczbie etapów staje się interesującą zmienną losową, którą nazywajmy czasem trwania doświadczenia. Doświadczeniem o losowej liczbie etapów jest oczekiwanie na pierwszy sukces. Czas trwania tego doświadczenia, zwany też czasem oczekiwania na pierwszy sukces, jest zmienną losową o rozkładzie geometrycznym.

Oznaczajmy przez T czas trwania doświadczenia losowego o losowej liczbie etapów. Do wyznaczania nadziei matematycznej czasu trwania doświadczenia losowego można wykorzystać prosty algorytm oparty na idei stochastycznego grafu przepływu.

Jeśli przebieg wspomnianego doświadczenia losowego przedstawiono jako błądzenie losowe cząstki po grafie stochastycznym (jedno lub dwuwymiarowym), to T jest wówczas czasem błądzenia. Nadzieja matematyczna czasu błądzenia jest stosunkiem łącznej liczby kroków wykonanych przez wszystkie cząstki błądzące po tym grafie zgodnie z regułami stochastycznego grafu przepływu do liczby pionków, które dotarły na brzeg grafu. Szczegółowo tę ideę wyznaczania nadziei matematycznej zmiennej losowej T omówiono w [10].

Wykorzystajmy tę ideę do wyznaczenia średniego czasu oczekiwania na pierwszy sukces. Załóżmy, że dodatnia i mniejsza od jedności liczba u jest prawdopodobieństwem sukcesu w danej próbie Bernoulliego. Aby móc przebieg oczekiwania na pierwszy sukces omawiać w kontekście stochastycznego grafu przepływu załóżmy, że u jest liczbą wymierną. Niech $u = \frac{k}{m}$. Przebieg oczekiwania na pierwszy sukces daje się symulować błądzeniem losowym po jednowymiarowym grafie stochastycznym przedstawionym na rysunku 4.



Cyfrą 0 oznaczono porażkę, cyfrą 1 - sukces.

rys.4

Węzłem startowym jest tu punkt 0. Z tego węzła wypuszczamy m cząstek, spośród których - zgodnie z regułami grafu przepływu - k przemieszcza się do punktu (węzła) 1, pozostałe m-k do węzła 0 (przebywają tę drogę pętlą zaznaczoną na rysunku 4). Brzeg jest w tym przypadku zbiorem jednopunktowym $\{1\}$. Łącznie wykonano m kroków (przebycie jednej krawędzi grafu przez jedną błądzącą cząstkę jest tu równoznaczne z jednym krokiem), przy czym k błądzących cząstek dotarło na brzeg (do węzła 1). Zgodnie z regułą przytoczoną wyżej średni czas oczekiwania na pierwszy sukces jest stosunkiem $\frac{m}{k}$, czyli jest równy $\frac{1}{u}$.

9. POJĘCIE NADZIEI MATEMATYCZNEJ A MOTYWACJE. STOCHASTYCZNY MODEL PROCESU DECYZYJNEGO

Działalność człowieka jest nieustannym procesem podejmowania decyzji. Matematyka dostarcza pewnych narzędzi pozwalających ustalać kryteria optymalnej decyzji w sytuacjach, gdy mamy do czynienia z tzw. niepewnościami co do stanów świata zewnętrznego, jeśli stany te są wynikami zjawiska losowego, dla którego można określić (bądź oszacować) model probabilistyczny. Prawdopodobieństwa tych wyników w modelu probabilistycznym są charakterystykami owych niepewności co do stanów świata zewnętrznego. Odkrywaniu tego matematycznego modelu dla podejmowania decyzji w takich sytuacjach towarzyszą rozmaite formy matematycznych aktywności.

Oprócz podmiotu podejmującego decyzję (jest nim na ogół człowiek) w każdym procesie decyzyjnym mamy do czynienia z co najmniej dwuelementowym zbiorem dopuszczalnych decyzji. Oznaczajmy ten zbiór przez D i załóżmy, że jest on skończony. Podmiot podejmuje decyzje w momencie, gdy nie są jeszcze znane stany świata zewnętrznego, nie jest więc w stanie określić w tym momencie, która z dopuszczalnych decyzji jest optymalna. Stany świata zewnętrznego są scharakteryzowane ich prawdopodobieństwami. Załóżmy, że s-elementowy zbiór Ω jest zbiorem możliwych stanów świata zewnętrznego. Z probabilistycznego punktu widzenia Ω jest przestrzenią wyników pewnego doświadczenia losowego. Rozkład prawdopodobieństwa na tym zbiorze stanowi charakterystykę niepewności co do tych stanów.

Efektem podjęcia danej decyzji jest liczba wyrażająca korzyści. Liczba ta zależy zarówno od podjętej decyzji, jak i od stanu świata zewnętrznego. Z matematycznego punktu widzenia korzyść jest więc funkcją dwu zmiennych określoną na iloczynie kartezjańskim $D \times \Omega$. Tę funkcję, zwaną korzyścią, oznaczajmy przez W. Można ją określić za pomocą tzw. macierzy korzyści $[W(d_j, \omega_k)]$.

Stochastycznym modelem procesu decyzyjnego jest właśnie ta macierz korzyści uzupełniona wierszem określającym rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze Ω (tj. zbiorze stanów świata zewnętrznego). Stochastyczny model procesu decyzyjnego przedstawiajmy zatem za pomocą następującej tabeli:

X	$p(\omega_1)$	$p(\omega_2)$	....	$p(\omega_s)$
X	ω_1	ω_2	...	ω_s
d_1				
d_2				
....	....	....	....	....
d_m				

← prawdopodobieństwa stanów świata zewnętrznego

← stany świata zewnętrznego

← macierz korzyści

← dopuszczalne decyzje

rys.5

Przy ustalonej decyzji d_j funkcja W staje się funkcją stanów świata zewnętrznego, a więc zmienną losową, którą oznaczajmy przez W_j. Wiersz macierzy korzyści odpowiadający decyzji d_j wraz z rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze stanów świata zewnętrznego stanowią pewną prezentację rozkładu zmiennej losowej W_j.

Inspiracją do pewnej twórczości matematycznej staje się teraz problem, którą z decyzji należy uznać za optymalną.

Za optymalną uczniowie proponują najpierw uznawać tę, której odpowiada maksymalna korzyść. W tej ocenie nie uwzględniono stanu świata zewnętrznego, przy którym możliwe jest uzyskanie maksymalnej korzyści. Małe (bardzo małe) prawdopodobieństwo tego stanu może czynić praktycznie niemożliwym osiągnięcie tej maksymalnej korzyści. Kryterium, które zostało zaproponowane, nie jest więc właściwe. Ten etap konstrukcji stochastycznego modelu procesu decyzyjnego na lekcji dostarcza teraz nowego surowca do kształtowania pojęcia nadziei matematycznej, a zwłaszcza do kształtowania związanych z tym pojęciem intuicji. Dostarcza zarazem istotnych motywacji.

Przy ustalonej decyzji, korzyści można scharakteryzować spodziewanymi, oczekiwanymi, średnimi korzyściami. Każdą z możliwych decyzji charakteryzuje średnia korzyść, a więc liczba będąca nadzieją matematyczną zmiennej losowej, jaką staje się korzyść przy ustaleniu decyzji. Dla decyzji d_j tą charakterystyką jest $E(W_j)$. Za optymalną decyzję należy uważać tę, dla której średnie korzyści są maksymalne.

Jeśli decyzji, którym odpowiada maksymalna średnia korzyść jest więcej, do wyboru właściwej stosuje się dodatkowe, już natury pozamatematycznej, kryteria (zob. przykład 11.8.1 s.239 w [10]).

Macierz prezentującą stochastyczny model procesu decyzyjnego należy zatem uzupełnić dodatkową kolumną odpowiednich wartości oczekiwanych korzyści.

Opisany wyżej model (na lekcji może on być przedmiotem matematycznego odkrycia) stosują w praktyce ekonomiści, kupcy, kierownicy produkcji itp. Literatura ilustruje ten typ zastosowań praktycznych pojęć probabilistycznych przykładami, w których rozkład stanów świata zewnętrznego (rozkład popytu, podaży itp.) zadany jest a priori. Kto i jakimi środkami ów rozkład uzyskał, nie zostaje ujawnione. Zresztą jest tak w prawie wszystkich matematycznych zadaniach, których treść dotyczy obiektów realnego świata, a które są adresowane do ucznia. Jest tak zwłaszcza w przypadku zadań z rachunku prawdopodobieństwa, w których mowa jest o strzelcu trafiającym do celu z prawdopodobieństwem q, o urządzeniach, których niezawodność (a więc prawdopodobieństwo nieprzerwanej działalności w danym przedziale czasowym) wynosi p, o nasionach, których siła kiełkowania wynosi r itd. W zadaniach tych, na podstawie zadanych a priori prawdopodobieństw jednych zdarzeń trzeba wyznaczyć prawdopodobieństwa innych zdarzeń. Matematyczna twórczość będąca udziałem atakowania i rozwiązywania tego typu zadań - to oparte na gotowych wzorach rachunki. Informacja, skąd i w jaki sposób te dane o prawdopodobieństwie jednych zdarzeń uzyskano, zawsze zostają przed uczniem ukryte. Zapewne źródeł tych informacji i sposobów ich uzyskiwania nie zna także nauczyciel.

W tego typu zadaniach pominięto (być może celowo) okazje do ważnych, z punktu widzenia dydaktyki, aktywności matematycznych. Ciekawsze i bogatsze w matematyczne aktywności byłyby takie zadania, w których wspomniane prawdopodobieństwa nie są z góry zadane, ale których znajdowanie (także szacowanie) stanowi część (i to ważną) probabilistycznego zadania. To poszukiwanie, a więc konstrukcja modelu probabilistycznego (także jego estymacja), może być zadaniem o wiele ciekawszym, gdy chodzi o nauczanie rachunku prawdopodobieństwa, bo dotyczącym tego, co ważniejsze, tj. konstrukcji modelu, a nie tylko dedukcji w modelu już gotowym, zadanym a priori.

Interesują nas teraz przykłady zastosowań stochastycznego modelu procesu decyzyjnego, w których rozkład stanów świata zewnętrznego trzeba (i w których ten rozkład daje się) wyznaczyć na podstawie matematycznych cech zjawiska, którego efektem są owe stany, bądź na podstawie uprzednio zgromadzonych i odpowiednio opracowanych matematycznymi środkami danych statystycznych.

10. GRA STRATEGICZNO-LOSOWA A PROCES DECYZYJNY

Lekcję poświęconą odkrywaniu prawdopodobieństwa zdarzenia jako nowego matematycznego narzędzia rozwiązywania praktycznych problemów rozpoczynam od prostej gry losowej. W grze przeprowadza się pewne doświadczenie losowe. Zanim to jednak nastąpi, każdy z uczniów stawia na jeden z wyników tego doświadczenia, zdobywając punkt, jeśli doświadczenie zakończy się tym właśnie wynikiem. Na tle takiej gry powstaje pytanie, czy są wśród wyników doświadczenia takie, na które opłacałoby się stawiać. Z dwu możliwych wyników na ten opłaca się postawić, który jest bardziej prawdopodobny. Udział w grze wiąże się więc z podejmowaniem decyzji, na który wynik postawić. Stawianie na wynik najbardziej prawdopodobny jest zarazem wyborem optymalnej decyzji zgodnie z opisanym wyżej stochastycznym modelem procesu decyzyjnego.

Załóżmy, że modelem probabilistycznym dla doświadczenia losowego przeprowadzanego w grze jest para (Ω, p), gdzie $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s\}$. Załóżmy także, że p nie jest rozkładem klasycznym, bo tylko w tym przypadku można mówić o strategii w grze. Korzyść przyjmuje tu dwie wartości: 1(zdobywam punkt) i 0 (nie zdobywam punktu). Jeśli przez d_k oznaczyć decyzję: stawiam na wynik ω_k, to korzyść jest funkcją

$$W_k(\omega_j) = \begin{cases} 0 \text{ dla } j \neq k, \\ 1 \text{ dla } j = k, \text{ gdzie } j=1,2,\ldots,s \text{ oraz } k=1,2,\ldots,s. \end{cases}$$

Macierz korzyści jest tu więc macierzą jednostkową, jeśli pomijać dwie dodatkowe linie, którymi macierz tę uzupełnialiśmy, tj. dodatkowym wierszem określającym rozkład stanów świata zewnętrznego i dodatkową kolumną średnich (oczekiwanych) korzyści.

Jest $E(W_k) = p(\omega_k)$, a zatem stawianie na wynik najbardziej prawdopodobny jest równoznaczne z wyborem optymalnej decyzji.

Ogólniejsza wersja wspomnianej gry polega na tym, że gracz stawia nie na wynik, ale na jedno ze zdarzeń związanych z przeprowadzanym w grze doświadczeniem losowym, zdobywając punkt jeśli po przeprowadzeniu doświadczenia uzyskano wynik sprzyjający temu zdarzeniu.

Jeśli $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ jest zbiorem zdarzeń związanych ze wspomnianym doświadczeniem, d_j oznacza decyzję: stawiam na zdarzenie A_j, a W_j oznacza korzyści wynikające z podjęcia decyzji d_j, to

$$E(W_j)=0\cdot\sum_{\omega\notin A_j} p(\omega) + 1\cdot\sum_{\omega\in A_j} p(\omega)=\sum_{\omega\in A_j} p(\omega)=P(A_j).$$

Wybór optymalnej decyzji jest w tym przypadku wyborem zdarzenia najbardziej prawdopodobnego.

11. PRZYKŁADY PROCESU DECYZYJNEGO, W KTÓRYCH ROZKŁAD STANÓW ŚWIATA ZEWNĘTRZNEGO DAJE SIĘ OKREŚLIĆ A PRIORI

Od lat popularyzowane wśród nauczycieli i uczniów zadania probabilistyczne cechuje rażące ubóstwo matematycznych aktywności. Cała matematyczna twórczość towarzysząca atakowaniu i rozwiązywaniu tego typu zadań sprowadza się do dedukcji i rachunków (nierzadko do mechanicznego stosowania gotowych wzorów).

Problematyka związana z podejmowaniem decyzji w sytuacjach, gdy stany świata zewnętrznego są wynikami doświadczenia losowego, dla którego model probabilistyczny daje się określić na podstawie pewnych cech przyrządu losującego użytego do przeprowadzania tego doświadczenia (symetrie, proporcje itp.), może dostarczać dobrego surowca do kształtowania pojęcia nadziei matematycznej i innych pojęć probabilistycznych, wnosząc zarazem nowe matematyczne treści (poszukiwanie ekstremum ciągu średnich korzyści odpowiadających ciągowi decyzji).

Celem zadań probabilistycznych jest rozwijanie intuicji probabilistycznych, w tym również intuicji związanych z pojęciami probabilistycznymi. Zadania dotyczące stochastycznego modelu podejmowania decyzji inspirują dyskusję nad zależnością korzyści od decyzji i nad charakterystyką tej zależności za pomocą nadziei matematycznej korzyści. Poszukiwanie matematycznych środków gromadzenia informacji potrzebnych do analizy tych zależności, konstrukcja rozkładu stanów świata zewnętrznego, dekodowanie wspomnianych informacji (interpretacja korzyści przy ustalonej decyzji), poszukiwanie ekstremów pewnych funkcji, a także ustalanie pozamatematycznych kryteriów (chodzi o kryteria natury społecznej, ekonomicznej itp.) wyboru optymalnej decyzji spośród rodziny decyzji gwarantujących maksymalne korzyści - to formy twórczości inspirowane przez jedno probabilistyczne zadanie. Na uwadze mieć tu także trzeba motywacje, których dostarczają tego typu zadania.

Zilustrujmy bogactwo matematycznych aktywności, o jakim wyżej mowa, przykładem gry strategiczno-losowej. Dwu uczestniczących w niej graczy oznaczmy przez G_1 i G_2. Obaj rzucają monetą. Przedtem każdy opłaca swój rzut. Jeśli w obu rzutach moneta upadnie do góry taką samą stroną, mówmy o remisie. Wtedy każdy zabiera z puli (stanowią ją wpłacone przez graczy złotówki) jej połowę. Gdy reszka wypadnie tylko na jednej monecie, wówczas całą pulę zdobywa ten, kto wyrzucił reszkę.

Przypuśćmy, że gracz G_1 rzuca pierwszy i że po wykonaniu pierwszego rzutu wolno mu rzucić drugi raz monetą, ale za ten dodatkowy rzut musi wpłacić do puli dodatkową złotówkę. Gdy G_1 rzuca dwa razy, to:

a) wygrywa całą pulę, jeśli wyrzucił reszkę co najmniej raz i jeśli reszki nie wyrzucił G_2,

b) jest remis (obaj dzielą się po połowie trzema złotówkami z puli) jeśli G_1 co najmniej raz wyrzucił reszkę i jeśli G_2 wyrzucił reszkę,

c) jest również remis, jeśli żaden z nich nie wyrzucił reszki,

d) G_1 przegrywa całą pulę, jeśli nie wyrzucił ani raz reszki i jeśli reszkę wyrzucił G_2.

Gra inspiruje pytanie o to, na jaką strategię powinien zdecydować się gracz G_1?

Można tu mówić o czterech dopuszczalnych decyzjach (samo ich sformułowanie jest już pewną formą matematycznej twórczości):

d_1: zawsze rzucać dwa razy,

d_2: zawsze rzucać tylko raz,

d_3: rzucać drugi raz, gdy za pierwszym razem wypadnie orzeł,

d_4: rzucać drugi raz, gdy za pierwszym razem wypadnie reszka.

Stany świata zewnętrznego są tu wynikami wielokrotnego rzutu monetą. Liczba rzutów zależy od decyzji. Nasuwa się więc kolejne pytanie, jak postąpić, aby zbiór stanów świata zewnętrznego nie zależał od decyzji.

Mówmy zawsze o trzykrotnym rzucie monetą. Abel może zawsze drugi raz rzucać monetą, tylko że wyniki tego rzutu w przypadku decyzji d_2 nie będą brane pod uwagę.

Niech W_j będzie liczbą wygranych przez gracza G_1 (zabieranych z puli) złotówek przy podjęciu decyzji d_j $(j=1,2,3,4)$.

Macierz prezentującą stochastyczny model procesu decyzyjnego, z jakim mamy tu do czynienia, określa następująca tabela:

prawdopodobieństwa stanów świata zewnętrznego		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	średnie korzyści
stany świata zewnętrznego		ooo	oor	oro	orr	roo	ror	rro	rrr	
decyzje	d_1	$-\frac{1}{2}$	-2	1	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$E(W_1)=-\frac{1}{8}$
	d_2	0	-1	0	-1	1	0	1	0	$E(W_2)=0$
	d_3	$-\frac{1}{2}$	-2	1	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0	$E(W_3)=0$
	d_4	0	-1	0	-1	1	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$E(W_4)=-\frac{1}{8}$

Tabela, w której zakodowano wszystkie informacje pozwalające na wybór optymalnej decyzji, staje się teraz surowcem do pewnej matematycznej twórczości.

Z tabeli widać, że uzależnienie taktyki gracza G_1 od rezultatu pierwszego rzutu nie gwarantuje wzrostu średnich korzyści (średniej wygranej). Gracz G_1 powinien podjąć decyzję d_2 lub d_3. Obie zapewniają mu tę samą średnią wygraną. Z innych powodów decyzję d_2 należy uznać za optymalniejszą z uwagi na mniejszy trud wkładany przez gracza G_1 do tej gry (G_1 rzuca tylko raz). Jest to wspomniane wcześniej pozamatematycznej natury kryterium ostatecznego wyboru optymalnej decyzji.

Skonstruowana tabela może inspirować pewną refleksję a posteriori. Chodzi o wyjaśnienie uwidocznionego przez nią faktu. Chodzi tu o pytania, czy można było to wcześniej przewidzieć? Jak to inaczej uzasadnić?

12. NADZIEJA MATEMATYCZNA W KONTEKŚCIE METOD MONTE CARLO. IDEA ESTYMACJI A METODY MONTE CARLO

Stawianie ucznia w sytuacji, w której konstrukcja a priori modelu probabilistycznego, rozkładu zmiennej losowej, bądź znajdowanie charakterystyk tego rozkładu przerasta jego możliwości (z uwagi na brak odpowiedniego aparatu matematycznego) może zmuszać go do poszukiwania środków, którymi można zdobywać, gromadzić i porządkować informacje na temat owego modelu, rozkładu, czy wartości charakterystyk tego rozkładu. Sytuacje takie stają się źródłem wielu matematycznych aktywności, a także źródłem odkrycia naukowego. Mogę również sugerować odwoływanie się do danych statystycznych jako do pewnego źródła tych informacji.

Gromadzenie i porządkowanie środkami matematycznymi tych danych wiąże się z takimi matematycznymi aktywnościami, jak: kodowanie i dekodowanie, stawianie hipotez, próby ich weryfikacji, uzasadnianie na gruncie matematyki odkrytych i zaskakujących cech próbki, schematyzacja i matematyzacja, odkrywanie pojęć i postaci ich definicji, odkrywanie analogii probabilistycznych poprzez konstrukcję modelu symulacyjnego, odkrywanie i uzasadnianie analogii, które sugerują wspólne cechy dwu próbek wylosowanych z dwu różnych populacji, dobór rozmaitych środków organizacji i wspierania myślenia matematycznego zainspirowanego danymi empirycznymi (statystycznymi), odkrywanie własności pojęć probabilistycznych i formułowanie treści pewnych twierdzeń. Mówimy tu o matematycznych aktywnościach będących udziałem gromadzenia i porządkowania danych empirycznych, a więc udziałem organizacji konkretnej czynności ucznia.

Metody rozwiązywania pewnych matematycznych problemów środkami empirycznymi (statystycznymi), znane pod nazwą metod Monte Carlo, zaczynają odgrywać coraz większą rolę w praktycznej działalności współczesnego człowieka. Jest to jeden z argumentów motywujących potrzebę zapoznania z nimi ucznia szkoły ogólnokształcącej. Silniejsze motywacje tkwią jednak w bogactwie form matematycznej twórczości, jakie towarzyszy stosowaniu wspomnianych metod.

Ideę metody Monte Carlo w kontekście jej udziału w kształtowaniu pojęć oraz idei statystycznych i probabilistycznych oraz w inspirowaniu różnych form matematycznych aktywności zilustrujemy na prostym przykładzie.

Firma produkująca gumę do żucia, w celach reklamowych postanowiła wkładać do każdej paczki gumy fotografię jednej z sześciu popularnych aktualnie gwiazd muzyki rockowej. Zakładamy, że liczba tych fotografii jest dostatecznie duża (jak i liczba wypuszczanych na rynek paczek gum) i że każda z gwiazd jest reprezentowana przez jednakową liczbę fotografii. Kupujący nie wie,jaka gwiazda muzyki rockowej reprezentowana jest na fotografii w paczce gumy, którą nabywa. Za zgromadzony tą drogą komplet fotografii sześciu gwiazd klient dostaje od firmy specjalną premię.

Na tle opisanej sytuacji rodzą się rozmaite pytania. Chodzi o to, aby uczeń sam je sformułował i sam spróbował dostępnymi mu środkami uzyskać na nie odpowiedzi, konstruując ewentualnie środki potrzebne do uzyskiwania tych odpowiedzi. Stawianie sobie samemu sensownych pytań, poszukiwanie, a przede wszystkim konstruowanie matematycznych środków (narzędzi) pozwalających na te pytania odpowiadać stanowią ważną formę matematycznych aktywności.

Podstawowe pytania, jakie inspiruje opisana sytuacja, to:

a) ile średnio paczek gumy do żucia trzeba kupić, aby skompletować fotografie wszystkich sześciu gwiazd?

b) jak znając wysokość premii ocenić koszt fotografii (wliczony w cenę paczki gumy), który gwarantowałby to, że wypłacaną przez firmę premię pokrywają w istocie sami konsumenci?

Oba problemy - choć wydają się niespokrewnione - dotyczą tego samego pojęcia, a mianowicie pojęcia nadziei matematycznej. Drugie pytanie jest w istocie pytaniem związanym ściśle z problemem gry sprawiedliwej.

W klasie IV liceum, w której ów problem zostaje postawiony, brak odpowiedniej probabilistycznej wiedzy koniecznej nie tylko do znalezienia szukanej wartości oczekiwanej, ale przede wszystkim do konstrukcji modelu probabilistycznego dla opisanego tu oczekiwania na skompletowanie sześciu fotografii. I jest to zamierzona trudność. Chodzi bowiem o wprowadzenie ucznia w inne formy twórczości matematycznej niż dedukcja i rachunki.

Atakowanie sformułowanych na tle powyższej sytuacji dwu zadań probabilistycznych rozpoczyna się od pewnej matematycznej obróbki zjawiska, jakim jest nabywanie gum do żucia tak długo, aż zgromadzimy komplet fotografii wszystkich sześciu gwiazd. Chodzi tu o zanurzenie tej sytuacji w świecie matematycznej abstrakcji, o przekład tej sytuacji na język matematyki i matematycznych modeli.

Uczeń ma tu skorzystać z podanych informacji, które tę sytuację pozwalą mu zmatematyzować, to jest opisać środkami matematycznymi. Musi on tu dokonać pewnych uproszczeń zaniedbując to, co jest nieistotne (schematyzacja), po to, aby zauważyć, że kupowanie jednej paczki gumy i obserwacja znajdującej się wewnątrz fotografii jest - z matematycznego punktu widzenia - losowaniem jednej z sześciu fotografii i to losowaniem nietendencyjnym w tym sensie, że każda z fotografii ma przy tym jednakowe szanse. Tę odkrytą w procesie pewnej schematyzacji własność uczeń formułuje w języku probabilistyki: "dla każdej gwiazdy prawdopodobieństwo, że w kupowanej paczce gumy znajdzie się jej fotografia, wynosi $\frac{1}{6}$". Ten probabilistyczny wniosek sugeruje odkrycie, że kupowanie jednej paczki gumy jest - jeśli chodzi o znajdującą się w niej fotografię - równoważne z probabilistycznego stanowiska z rzutem kostką. Wystarczy tylko wcześniej gwiazdy ponumerować (chodzi tu o utworzenie bijekcji ze zbioru wyników rzutu kostką na zbiór fotografii sześciu różnych gwiazd muzyki rockowej). Wyrzuconą liczbę oczek można interpretować jako numer gwiazdy znajdującej się na fotografii w kupowanej paczce gumy.

Etap atakowania sformułowanych wyżej problemów, o którym teraz mowa, dotyczy konstrukcji tzw. modelu symulacyjnego. Oczekiwanie na uzyskanie prawa do premii (powtarzanie kupowania gumy aż do momentu skompletowania fotografii wszystkich sześciu gwiazd) daje się symulować powtarzaniem rzutu kostką dopóty, dopóki nie wypadną wszystkie liczby oczek.

Opisany w ten sposób schemat doświadczalny jest jeszcze konkretnym doświadczeniem losowym, ale o już wyraźnych cechach matematycznych. Droga od tego doświadczenia do odpowiadającego mu modelu probabilistycznego jest już prosta. Symetrie kostki (a ściślej: nieistotne, godne zaniedbania asymetrie konkretnej kostki, którą to doświadczenie można przeprowadzać) umożliwiają konstrukcję modelu probabilistycznego dla pojedynczego etapu (jest to zarazem model probabilistyczny, który uznajemy za właściwy dla nabywania jednej paczki gumy i obserwacji znajdującej się wewnątrz fotografii). Pewne algorytmy (reguły dotyczące drzewa stochastycznego, zob.[10]) umożliwiają konstrukcję modelu probabilistycznego dla oczekiwania na wyrzucenie wszystkich liczb oczek (zauważmy, że jest to ciekawe doświadczenie o losowej liczbie etapów).

Załóżmy dalej, że zakup kolejnych paczek gumy (że kolejne rzuty kostką) odbywają się w kolejnych jednostkach czasu. Liczba nabytych paczek gumy staje się zarazem czasem trwania wspomnianego doświadczenia losowego. Wprowadzenie do tych rozważań czasu jako parametru ułatwi formułowanie w przystępnym dla ucznia języku wielu jego wypowiedzi. W przyjętej teraz terminologii postawione pytanie dotyczy średniego czasu oczekiwania na prawo do premii.

Mając już sposób symulowania wyjściowego zjawiska możemy kupowanie gum, aż do nabycia prawa do premii, powtarzać wiele razy. Kolejny ciekawy problem dotyczy teraz organizacji gromadzenia, porządkowania i opracowywania matematycznymi środkami danych empirycznych w klasie. Sam problem wprowadza równocześnie na lekcję rachunku prawdopodobieństwa elementy statystyki matematycznej i opisowej.

Każdy z uczniów powtarza 10 razy oczekiwanie na wyrzucenie wszystkich liczb oczek. Pojedynczemu wynikowi tego oczekiwania przypisuje następnie liczbę wykonanych rzutów, to jest czas oczekiwania na wyrzucenie wszystkich liczb oczek. Średnia arytmetyczna takich liczb wzyskanych przez uczniów całej klasy jest pewnym oszacowaniem i to oszacowaniem metodą Monte Carlo poszukiwanej nadziei matematycznej.

Liczba przeprowadzonych eksperymentów (moc próbki) jest tu rzędu kilkuset, a więc próbka stanowi podstawę do estymacji. I tak bardzo liczna próbka została wylosowana w stosunkowo krótkim czasie na lekcji.

Teoretyczny sposób rozwiązania problemu tej nadziei matematycznej zostanie omówiony w dalszej części pracy przy ilustrowaniu bogatych w matematyczne środki metod znajdowania nadziei matematycznej zmiennej losowej z pominięciem definicji, która opiera się na rozkładzie zmiennej losowej (w tym przypadku rozkład czasu oczekiwania na wyrzucenie wszystkich liczb oczek) jest trudny do określenia w klasie IV liceum.

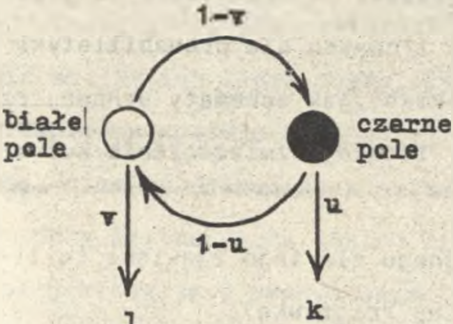
Szacowanie nadziei matematycznej metodą Monte Carlo jest jak nietrudno zauważyć - estymacją, a więc opartym na próbce szacowaniem pewnego parametru charakteryzującego rozkład pewnej cechy w pewnej populacji. W tym przykładzie populacją była przestrzeń wyników oczekiwania na komplet oczek przy rzucaniu kostką, a cechą X-liczba wykonanych rzutów.

Rozwiązywanie metodą Monte Carlo problemu nadziei matematycznej cechy w danej populacji odbyło się według następującego planu:

1) schematyzacja konkretnego zjawiska ukierunkowana na jego charakterystykę w kontekście typowych dla probabilistyki schematów doświadczalnych takich, jak schematy urnowe, rzuty kostkami, rzuty monetami, losowe rozmieszczenia kul w szufladach itd.;
2) konstrukcja modelu symulacyjnego dla tego zjawiska (w literaturze nazywa się ten etap rozgrywką);
3) powtarzanie n razy doświadczenia losowego (konkretnego, przeprowadzanego bowiem za pomocą konkretnych przyrządów losujących) uznanego za model symulacyjny dla wyjściowego zjawiska (losowanie próbki);
4) opracowywanie danych empirycznych, tj. znajdowanie wartości danej zmiennej losowej dla wyników kolejnych powtórzeń modelu symulacyjnego (konstrukcja wektora zwanego wartością próbki);
5) wyznaczanie średniej arytmetycznej uprzednio znalezionych liczb (wyznaczanie wartości statystyki średnia z próbki).

13. ROZWIĄZYWANIE UKŁADÓW RÓWNAŃ LINIOWYCH METODĄ MONTE CARLO A NADZIEJA MATEMATYCZNA

Rozważmy dwie gry. W każdej rekwizytem (choć nieistotnym, jak się później okaże) jest kolorowy krążek, który w zależności od wyniku próby Bernoulliego będzie przemieszczany na grafie z rys. 6. Jeden z graczy jest właścicielem białego krążka. Jest to gracz G_1. Drugi jest właścicielem czarnego krążka. Jest to gracz G_2, który stawia swój krążek na białym polu i wykonuje próbę Bernoulliego o prawdopodobieństwie sukcesu równym v $(0 < v < 1)$. Ta próba



rys.6

odpowiada białemu polu na grafie w tym sensie, że jeśli na nim znajdzie się krążek, to jego właściciel wyznacza dalsze losy swego krążka przeprowadzając tę próbę. Jeśli próba zakończy się sukcesem, to gracz G_1 (a także w następnych etapach gracz G_2) zdobywa l złotówek, jeśli nie, to jego krążek zostaje przełożony na pole czarne (aby następnie dalsze losy wyznaczać temu krążkowi przeprowadzając niżej opisaną próbę Bernoulliego odpowiadającą temu czarnemu polu).

Gracz G_2 stawia na początku swój krążek na czarnym polu i wykonuje próbę Bernoulliego o prawdopodobieństwie sukcesu równym u $(0 < u < 1)$. Jeśli ta próba zakończy się sukcesem, to gracz zdobywa k złotówek, jeśli nie - to jego krążek przełożony zostaje na białe pole (aby następnie jego dalsze losy wyznaczyć za pomocą wyniku poprzednio opisanej próby Bernoulliego). Omawiana teraz próba Bernoulliego o prawdopodobieństwie sukcesu równym u odpowiada czarnemu polu w tym sensie, że jeśli krążek gracza trafi na czarne pole, to dalsze losy krążka są zależne od wyniku tej próby.

Gra kończy się, gdy każdy z graczy zdobędzie l albo k złotówek. Należy jeszcze ustalić, kto wygrywa w takiej grze i jakie są w stosunku do siebie kwoty l i k. To jednak nie jest w tej chwili istotne.

Liczba zdobytych złotówek przez każdego z graczy w takiej grze jest zmienną losową. Oznaczmy przez X liczbę złotówek zdobytych przez gracza G_1 (a więc przez gracza rozpoczynającego grę na białym polu), a przez Y - liczbę złotówek zdobytych w grze przez gracza G_2, który jako właściciel czarnego krążka startował z czarnego pola na grafie. Należy teraz znaleźć E(X) i E(Y).

Dla obu tych zmiennych losowych ich zbiorem wartości jest $\{l, k\}$.

Mamy:

$$E(X) = lP(X=l) + kP(X=k), \tag{14}$$

$$E(Y) = kP(Y=k) + lP(Y=l), \tag{15}$$

oraz:

(16)

$$P(X=l)=v+(1-v)(1-u)v+[(1-v)(1-u)]^2v+\ldots=\frac{v}{1-(1-v)(1-u)},$$

(17)

$$P(X=k)=(1-v)u+(1-v)(1-u)(1-v)u+(1-v)[(1-u)(1-v)]^2u+\ldots=$$

$$=\frac{(1-v)u}{1-(1-u)(1-v)},$$

(18)
$$P(Y=1)=(1-u)v+(1-u)(1-v)(1-u)v+(1-u)\left[(1-v)(1-u)\right]^2v+\ldots=$$
$$=\frac{(1-u)v}{1-(1-v)(1-u)},$$

(19)
$$P(Y=k)=u+(1-u)(1-v)u+\left[(1-u)(1-v)\right]^2u+\ldots=\frac{u}{1-(1-u)(1-v)}.$$

Z (16) i (18) oraz z (17) i (19) wynika, że:

(20)
$$P(X=1) = \frac{1}{1-u}\,P(Y=1),$$

(21)
$$P(X=k) = (1-v)P(Y=k),$$

a zatem wstawiając (20) i (21) do (14) dostajemy:

$$E(X) = 1\cdot\frac{1}{1-u}\cdot P(Y=1) + k(1-v)P(Y=k) =$$
$$= (1-v)\left[1\cdot P(Y=1)+k\cdot P(Y=k)\right] + \left[1\cdot\frac{1}{1-u} - 1(1-v)\right]P(Y=u) =$$
$$= (1-v)E(Y) + 1\left[\frac{1}{1-u} - 1(1-v)\right]P(Y=1).$$

Ale biorąc pod uwagę (18) mamy dalej:

$$E(X) = (1-v)E(Y)+\left[1\,\frac{1}{1-u} - 1(1-v)\right]\frac{(1-u)v}{1-(1-v)(1-u)} =$$
$$= (1-v)E(Y) + \frac{1v(1-u)\left[1-(1-v)(1-u)\right]}{(1-u)\left[1-(1-v)(1-u)\right]} = (1-v)E(Y) + 1v =$$
$$= 1v + E(Y)(1-v),$$

czyli:

$$E(X) = 1v + (1-v)E(Y).$$

Analogicznie wykorzystując (17) i (19) dostajemy, że:

(22)
$$P(Y=k) = \frac{1}{1-v}\,P(X=k).$$

Biorąc pod uwagę (16) i (18) mamy:

(23) $$P(Y=1) = (1-u)P(X=1).$$

Wstawiając (22) i (23) do (15) dostajemy po przekształceniach, że:

$$E(Y) = ku + (1-u)E(X).$$

Wykazaliśmy więc, że para (E(X), E(Y)) jest pierwiastkiem układu równań liniowych:

(U) $$\begin{cases} x = lv + (1-v)y \\ y = ku + (1-u)x \end{cases}$$

UWAGA: fakt, że:

$$E(X) = lv + (1-v)E(Y) \text{ i}$$

$$E(Y) = ku + (1-u)E(X)$$

może być dla ucznia intuicyjnie oczywisty. Powyższy dowód tego faktu potwierdza poprawność tych intuicji i jest także pewną formą matematycznej twórczości związanej z kształtowaniem pojęcia nadziei matematycznej.

Często spotyka się opinie krytykujące dowód faktu, który jest intuicyjnie oczywisty. W przypadku faktów natury probabilistycznej nasze intuicje podsuwają wielokroć fałszywe oceny i wnioski. Trudno więc polegać na tych intuicyjnych wnioskach. Intuicje probabilistyczne - co potwierdzają wyjątkowo liczne przykłady - okazują się często, i to częściej niż w przypadku intuicji geometrycznych czy arytmetycznych, niewłaściwe.

Zadaniem lekcji rachunku prawdopodobieństwa jest rozwój (kształcenie) właściwych intuicji. Te zaś rozwijają się także na drodze dedukcji. Rachunki, czasami nawet żmudne, które stają się udziałem dowodu prawie oczywistego (intuicyjnie) faktu miały tu zatem także swój udział w kształtowaniu właściwych intuicji (w tym przypadku związanych z nadzieją matematyczną).

Szacując metodą Monte Carlo (zilustrowaną na poprzednim przykładzie) E(X) i E(Y) szacujemy równocześnie pierwiastek układu (U) równań liniowych*.

Różne k i l oraz u i v prowadzą do rozmaitych układów równań liniowych postaci (U). Metoda Monte Carlo stała się tym samym metodą przybliżonego rozwiązywania układów równań liniowych i to metodą opartą na wnioskowaniach statystycznych i probabilistycznych.

Nasuwa się tu jednocześnie pytanie, kiedy układ równań liniowych postaci:

$$(V) \qquad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

można przedstawić w postaci (U), aby odpowiednim wyrazom macierzy głównej i wyrazom kolumny wyrazów wolnych można było nadać powyższy sens probabilistyczny.

---

* Pierwiastkiem układu równań o dwu niewiadomych nazywajmy (analogicznie jak to ma miejsce w przypadku równań wielomianowych) każdą parę liczb (x,y), która spełnia ten układ równań. Rozwiązaniem układu nazywajmy zbiór wszystkich jego pierwiastków.

Ustalanie warunków wystarczających na to, aby układ (V) można było rozwiązać opisaną wyżej metodą Monte Carlo, może być treścią interesującego zadania matematycznego. Jest to jednak zadanie z arytmetyki i algebry, pozostawiamy je do rozwiązania Czytelnikowi.

14. ROZMAITE SPOSOBY WYZNACZANIA NADZIEI MATEMATYCZNEJ BEZ KONSTRUOWANIA ROZKŁADU ZMIENNEJ LOSOWEJ

W typowych aktualnie zadaniach z rachunku prawdopodobieństwa definicja jest jedynym środkiem wyznaczania nadziei matematycznej zmiennej losowej.

Ważną rolę w kształtowaniu pojęcia nadziei matematycznej odgrywają sytuacje, w których można ją wyznaczyć (jedynie) za pomocą jej własności. Do poszukiwania innych niż definicja środków wyznaczania nadziei matematycznej zmusza sytuacja, w której konstrukcja rozkładu zmiennej losowej jest zbyt trudna, bądź wręcz niemożliwa. Sytuacje takie mogą inspirować rozmaite aktywności matematyczne jak formułowanie ogólnych praw i weryfikacja, czy są one treścią matematycznego twierdzenia, przedstawianie danej zmiennej losowej jako kombinacji liniowej zmiennych losowych o znanych wartościach oczekiwanych, formułowanie warunków prowadzących do równań, bądź układów równań o dających się określić warunkach brzegowych i wyznaczanie nadziei matematycznej środkami algebraicznymi itd.

a. Średnia liczba pustych szuflad w losowym rozmieszczeniu kul w szufladach

Wyjdźmy od zmiennej losowej X, którą opisem słownym określamy jako liczbę pustych szuflad w losowym rozmieszczeniu k ponumerowanych kul w s ponumerowanych szufladach. Chodzi tu w istocie o k-krotne losowanie ze zwracaniem kuli z urny o s ponumerowanych kulach. Interpretacja tego schematu urnowego w kontekście losowych rozmieszczeń kul w szufladach (numer kuli wylosowanej za j-tym razem interpretujemy jako numer szuflady, do której trafia kula numer j, j=1, 2,...,k) pozwala w prostym języku formułować (opisywać) różne zdarzenia związane z tym schematem doświadczalnym, w tym także zdarzenia związane z ciekawą z pewnych powodów zmienną losową X. Zmienna losowa X przypisuje wynikowi losowania liczbę tych kul z urny, które nie zostały wylosowane ani raz. We wspomnianej interpretacji X jest po prostu liczbą pustych szuflad.

Losowemu rozmieszczeniu, o którym mowa, odpowiada klasyczny model probabilistyczny (Ω,p), gdzie

$\Omega = \{1,2,...,s\}^{\{1,2,...,k\}}$.

Poszukiwanie E(X) mogą inspirować następujące problemy:

1. W grze rzuca się k kostkami do gry, a wygrywa się tyle złotówek, ile oczek nie wypadło ani raz. Za udział w grze trzeba opłacić wstęp. Przy jakiej jego wysokości gra będzie sprawiedliwa (mamy tu s = 6)..
2. W kawał ciasta wsypano k rodzynków. Ciasto dokładnie wymieszano, podzielono na s równych części i z każdej po

uformowaniu wypieczono babkę. Jaka jest średnia liczba babek bez rodzynków w takim wypieku?

3. s wędkarzy łowiło ryby na identyczne przynęty, w identycznych co do warunków połowów miejscach nad jeziorem. Złowiono łącznie k ryb. Nie wiadomo, kto ile złowił ryb. Jaka jest średnia liczba wędkarzy, którzy wracają znad jeziora nie złowiwszy ani jednej ryby.

W zadaniach 2 i 3 chodzi także o takie aktywności matematyczne, jak schematyzacja, która prowadzi do odkrycia, że obu opisanym wyżej zjawiskom, przy pewnej konwencji ich obróbki matematycznymi środkami, odpowiada ten sam model probabilistyczny co dla losowego rozmieszczenia k ponumerowanych kul (tu są to rodzynki, bądź ryby) w s dużych ponumerowanych szufladach (są tu nimi babki, bądź wędkarze). Losowe rozmieszczenie, albo - co na jedno wychodzi - k-krotne losowanie ze zwracaniem kuli z urny o s ponumerowanych szufladach staje się poprzez ów proces wstępnej matematyzacji modelem symulacyjnym dla wyjściowych zjawisk. Wspólny model symulacyjny staje się tu zarazem środkiem odkrywania pewnych probabilistycznych analogii pomiędzy rozkładem rodzynków w babkach a rozkładem liczby k złowionych ryb pomiędzy s wędkarzy.

Już dla stosunkowo niedużych k i s konstrukcja rozkładu p_X może przerastać możliwości ucznia.

Łączną liczbę pustych szuflad można zliczać w trakcie przechodzenia od szuflady do szuflady w kolejności np. ich numeracji. Jeśli szuflada jest pusta, stawiajmy kreskę, jeśli nie - kreski nie stawiajmy - proponuje uczeń znajdowanie wartości zmiennej losowej X dla otrzymanego gotowego wyniku rozmieszczenia.

W powyższym odkryciu kryje się pomysł wprowadzenia s zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_s$, gdzie X_j dla $j=1,2,\ldots,s$ przypisuje wynikowi rozmieszczenia liczbę 1, gdy j-ta szuflada jest pusta a liczbę 0, gdy tak nie jest.

Mamy dla każdego $\omega \in \Omega$:

$$X(\omega) = \sum_{j=1}^{s} X_j(\omega),$$

a więc:

(24) $$X = \sum_{j=1}^{s} X_j.$$

Wyjściowy problem sprowadzony został tym samym do wyznaczenia $E(X_j)$ dla $j=1,2,\ldots,s$.

Jak nietrudno zauważyć, rozkłady zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_s$ są identyczne. Wynika to z pewnych symetrii.

Zdarzenie $\{X_j=1\}$ zajdzie wtedy i tylko wtedy, gdy j-ta szuflada będzie pusta. $\{X_j=1\}$ jest więc w modelu probabilistycznym zbiorem tych wariacji z Ω, których liczba j nie jest żadnym z jej wyrazów. Takich wariacji jest $(s-1)^k$. Model jest klasyczny, a więc:

$$P(X_j=1) = \frac{(s-1)^k}{s^k} = \left(\frac{s-1}{s}\right)^k \quad \text{dla } j=1,2,\ldots,s.$$

Ponieważ rozkład p_{X_j} jest zerojedynkowy, więc $E(X_j)=P(X_j=1)$, a zatem:

$$E(X_j) = \left(\frac{s-1}{s}\right)^k \quad \text{dla } j=1,2,\ldots,s.$$

Biorąc pod uwagę (24) i addytywność funkcjonału E mamy:

$$E(X) = s\left(\frac{s-1}{s}\right)^k.$$

b. Średnia liczba sukcesów w schemacie Bernoulliego

Niech S_m będzie liczbą sukcesów w schemacie Bernoulliego o m próbach ($m \geqslant 2$) i o prawdopodobieństwie sukcesu w pojedynczej próbie równym u ($0 < u < 1$). Aby wyznaczyć $E(S_m)$ bez opierania się na definicji, przedstawmy łączną liczbę sukcesów jako sumę liczb sukcesów w kolejnych próbach. Chodzi więc o określenie na przestrzeni wyników schematu Bernoulliego, tj. na zbiorze $\Omega_m = \{0,1\}^{\{1,2,\ldots,m\}}$, m zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_m$, gdzie X_j jest liczbą sukcesów w j-tej próbie (X_j jest funkcją, która wynikowi schematu przypisuje liczbę "jedynek" na j-tym miejscu). Wszystkie te zmienne losowe są określone na Ω_m. Ponieważ każda ma rozkład zerojedynkowy, więc $E(X_j) = P(X_j=1)$.

Interesującym zadaniem probabilistycznym dla ucznia staje się tu wyznaczenie w modelu probabilistycznym powyższego prawdopodobieństwa.

Zdarzenie $\{X_j=1\}$ jest w modelu probabilistycznym rodziną tych m-wyrazowych wariacji zbioru $\{0,1\}$, których j-ty wyraz jest równy 1, a zatem $P(X_j=1) = u$.

Ponieważ dla każdego $\omega \in \Omega_m$ $S_m(\omega) = \sum_{j=1}^{m} X_j(\omega)$, więc

(25) $$S_m = \sum_{j=1}^{m} X_j,$$

a zatem:

$$E(S_m) = E(\sum_{j=1}^{m} X_j) = \sum_{j=1}^{m} E(X_j) = \sum_{j=1}^{m} P(X_j=1) = mu.$$

c. Średnia liczba skojarzeń w losowym rozmieszczeniu k ponumerowanych kul w k małych ponumerowanych szufladach

W problem nadziei matematycznej nowej interesującej zmiennej losowej wprowadzają następujące przykłady:

1. Rekwizytem w grze jest urna o k ponumerowanych kulach. Gracz opłaciwszy wstęp do gry - losuje k razy bez zwracania kulę z tej urny. Wyciągając za pierwszym razem kulę mówi "jeden". Jeśli trzymana w ręku kula ma numer jeden - zdobywa za ten etap losowania złotówkę. Wyciągając kulę za drugim razem mówi "dwa". Za wynik drugiego etapu losowania zdobywa złotówkę, jeśli trzymana kula (wylosowana za drugim razem) ma numer dwa. I tak dalej.

Jaki powinien być wstęp do tej gry, aby była ona sprawiedliwa?

2. Gracze G_1 i G_2 uczestniczą w grze, w której rekwizytem jest 13 kart pikowych i 13 kart kierowych z pełnej talii. Na stole leży 13 żetonów. Karty pikowe należą do gracza G_1, karty kierowe - do gracza G_2. Kolor karty oznacza dalej jedynie właściciela kart. Najpierw gracz G_1 tasuje swoje karty i rozkłada je w rzędzie awersami ku górze. Następnie tasuje swoje karty gracz G_2 i rozkłada je w równoległym rzędzie na przeciw. Mówmy o skojarzeniu, jeśli na przeciw siebie znalazły się te same (nie biorąc pod uwagę koloru) karty. Gracz G_1 zdobywa tyle żetonów, ile nastąpiło skojarzeń. Pozostałe żetony zdobywa gracz G_2. Wygrywa ten, kto posiadł więcej żetonów. Jeśli liczby zdobytych żetonów są równe, mówmy o remisie.

Czy taka gra jest sprawiedliwa? Co w tym kontekście powinna oznaczać sprawiedliwość gry?

3. Gracz G_2 ma 13 kart kierowych, które po potasowaniu rozkłada w rzędzie. Zanim to jednak zrobi, gracz G_1 stawia na wynik tego rozkładania, wpisując na kartce jego kod, a więc pewną permutację zbioru $\{a,2,3,4,5,6,7,8,9,10.w,d,k\}$, to jest zbioru kodów 13-tu kart pikowych. Mówmy o trafieniu na danym miejscu, jeśli na nim znalazła się ta karta, którą tam typował gracz G_1. Na stole leży 13 złotówek. Gracz G_1 zdobywa tyle spośród nich, ile miał trafień. Pozostałe złotówki należą do gracza G_2.

Czy taka gra jest sprawiedliwa?

4. W salonie gier znajduje się zakorkowana butelka z długą szyjką, a w niej cztery kulki o średnicy nieco mniejszej niż przekrój szyjki. Jedna kula jest biała, jedna czerwona, jedna zielona i jedna czarna. W szyjce kulki mieszczą się jedna nad drugą. Sama szyjka podzielona jest na segmenty o wysokości równej średnicy kulki. Jeden z segmentów oznaczony jest kolorem białym, drugi czerwonym, trzeci zielonym, a czwarty czarnym. Gracz potrząsa butelką z czterema kulkami w środku, a następnie szybko odwraca ją do góry dnem. Kulki rozmieszczają się losowo w segmentach. Mówmy o skojarzeniu, jeśli kolor kulki zgodził się z kolorem segmentu, do którego ona trafiła. Gracz zdobywa tyle złotówek za wynik takiego doświadczenia, ile nastąpiło skojarzeń. Za udział w tej grze trzeba zapłacić dwa złote.

Czy taka gra jest sprawiedliwa? Ile powinna wynosić opłata, aby gra była taką?

5. Z okazji 6 grudnia uczniowie danej klasy przygotowują sobie nawzajem drobne upominki. Za pomocą losowania ustala się, kto komu ów drobny upominek przygotuje. Na kartkach wpisuje się nazwiska uczniów, zwija się je na kształt losów, losy te miesza się, po czym każdy z uczniów ciągnie jeden los. Znajdujące się na nim nazwisko mówi komu ma przygotować upominek.

Jaka jest w takiej sytuacji średnia liczba uczniów, którzy będą przygotowywać upominek samemu sobie?

Powyższe, zdawołoby się różne, problemy mają inspirować oprócz wielu matematycznych aktywności także odkrycie sposobu wyznaczania nadziei matematycznej z pominięciem definicji. W każdym bowiem przypadku konstrukcja rozkładu zmiennej losowej, która raz jest liczbą skojarzeń, innym razem liczbą trafień, jeszcze innym - liczbą uczniów, którzy wylosowali samych siebie.

Pierwszym ważnym krokiem powinno być tu odkrycie oczywistych analogii pomiędzy powyższymi problemami. W każdym z zadań mowa jest w istocie o k-krotnym losowaniu bez zwracania kuli z urny o k ponumerowanych kulach, a więc o doświadczeniu losowym mającym klasyczny model probabilistyczny (Ω,p), gdzie Ω jest rodziną wszystkich permutacji zbioru $\{1,2,\dots,k\}$ (j-ty wyraz permutacji oznacza tu numer kuli wylosowanej za j-tym razem, $j=1,2,\dots,k$). Zmienna losowa, o której mowa w każdym z zadań, jest funkcją, która permutacji ze zbioru Ω przypisuje liczbę jej stałych wyrazów. Z pewnych powodów (częściowo wyjaśnia je treść zadania 4) interpretujmy takie losowanie jako losowe rozmieszczenie k ponumerowanych kul w tyluż małych (bo do każdej szuflady trafia tylko jedna kula) szufladach. Kula wylosowana za j-tym razem zostaje jakby wkładana do szuflady numer j pewnej komody o k ponumerowanych szufladach. Jeśli numer kuli zgadza się z numerem szuflady, do której trafiła, to mówmy o skojarzeniu. Dla zmiennej losowej będącej liczbą takich skojarzeń należy wyznaczyć nadzieję matematyczną. Oznaczajmy tę zmienną losową przez L_k.

W zadaniach 2 i 3 mowa jest jeszcze o zmiennej losowej Y_k, która jest różnicą liczby k (tu k=13) i zmiennej losowej L_k. Badania sprawiedliwości gier opisanych w zadaniach 2 i 3 sprowadza się do wyznaczenia $E(L_k)$ i $E(Y_k)$.

Nietrudno zauważyć, że już dla k=4 konstrukcja rozkładu zmiennej losowej L_k jest uciążliwa. Ale podobnie, jak to robiliśmy uprzednio, na łączną liczbę skojarzeń możemy popatrzeć jak na sumę liczb skojarzeń na poszczególnych etapach.

Niech X_j będzie liczbą skojarzeń na j-tym etapie.

Mamy:

(26)
$$L_k = \sum_{j=1}^{k} X_j.$$

Zmienna losowa X_j ma rozkład jednopunktowy, a zatem $E(X_j)=P(X_j=1)$. Zdarzenie $\{X_j=1\}$ jest w modelu probabilistycznym zbiorem tych permutacji z Ω, w których j-tym wyrazem jest liczba j (j=1,2,...,k). Takich permutacji jest (k-1)!, a zatem - ponieważ model jest klasyczny:

$$P(X_j=k) = \frac{(k-1)!}{k!} = \frac{1}{k} \quad \text{dla } j=1,2,\ldots,k.$$

Mamy więc dla j=1,2,...,k:

$$E(X_j) = \frac{1}{k}.$$

Biorąc pod uwagę ostatni związek i zależność (26) dostajemy, że:

$$E(L_k) = k\cdot\frac{1}{k} = 1.$$

Wynik jest w pewnym sensie zaskakujący. Średnia liczba skojarzeń nie zależy od k. Fakt, że niezależnie od liczby kul w urnie gra opisana w 1. będzie zawsze sprawiedliwa przy wysokości wstępu równej jednej złotówce, wydaje się być godny zdumienia.

Otrzymany rezultat ukazuje także, jak bardzo niekorzystny dla jednego z graczy jest udział w grach opisanych w zadaniach 2.i 3.

Ponieważ $Y_k = k-L_k$, zatem $E(Y_k) = k-E(L_k) = k-1$.

d. Średni czas oczekiwania na wylosowanie wszystkich kul z urny w trakcie losowania ze zwracaniem

1. W urnie jest k ponumerowanych kul. Losujemy ze zwracaniem kulę tak długo, aż każda z kul zostanie wyciągnięta z urny.

Jaka jest średnia liczba kul wyciągniętych w takim schemacie doświadczalnym?

2. Rzucamy kostką tak długo, aż wypadną wszystkie liczby oczek.

Wyznacz średnią liczbę wykonanych rzutów.

Jeśli przyjąć, że kolejne etapy (losowania, rzuty) przeprowadzane są w kolejnych jednostkach czasu, to w obu zadaniach postawiony został problem nadziei matematycznej czasu trwania opisanych w nich schematów doświadczalnych.

3. Firma produkująca papierosy postanowiła w celach reklamowych dołączać do każdej paczki papierosów jedną kartę z pełnej tali 52 kart. Każda z kart reprezentowana jest w równej ilości (dla dowolnej z kart prawdopodobieństwo, że ona znajdzie się w.kupowanej właśnie paczce papierosów, wynosi $\frac{1}{52}$). Za skompletowanie pełnej talii kart firma wypłaca specjalną premię w wysokości z zł.

Ile powinno się wliczać w cenę paczki papierosów, aby koszty tej premii pokrywali sami konsumenci?

4. Zob. opisane w punkcie 12 zadanie o gumach do żucia.

Postawiony w powyższych zadaniach problem dotyczy nadziei matematycznej zmiennej losowej, dla której konstrukcja rozkładu jest trudna i uciążliwa z uwagi na konieczność stosowania skomplikowanych wzorów kombinatorycznych.

Metodę wyznaczania poszukiwanej tu nadziei matematycznej zilustrujemy na przykładzie oczekiwania na wypadnięcie wszystkich ścianek kostki (zadanie 2).

Niech (Ω, p) będzie modelem probabilistycznym dla omawianego tu oczekiwania. Przez X_j oznaczmy zmienną losową, która jest liczbą rzutów potrzebnych do "skompletowania" wszystkich liczb oczek gdy już wyrzuconych zostało j różnych ścianek kostki (j różnych liczb oczek), j=0,1,2,3,4,5,6.

Zmienna losowa X_6 ma rozkład jednopunktowy. $P(X_6=0)=1$, a więc $E(X_6)=0$. Problem dotyczy wyznaczenia $E(X_0)$.

Rozważmy w modelu probabilistycznym dwa zdarzenia odnoszące się do sytuacji, w której przy określonej liczbie rzutów wypadło już j różnych oczek:

A: w kolejnym rzucie wypadnie liczba oczek, która już wypadła wcześniej,

B: w kolejnym rzucie wypadnie liczba oczek, która jeszcze nie wypadła.

Z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym wynika, że:

(27) $$P(X_j=k) = P(A)P(X_j=k|A) + P(B)P(X_j=k|B).$$

Warunkowe prawdopodobieństwa po prawej stronie w (27) dają się łatwo zinterpretować w kontekście rozkładu zmiennej losowej X_j. $P(X_j=k|A) = P(X_{j+1}=k-1)$ i $P(X_j=k|B) = P(X_j=k-1)$. Uwzględniając te związki równość (27) przyjmuje postać:

(28)
$$P(X_j=k) = \frac{6-j}{6} P(X_{j+1}=k-1) + \frac{j}{6} P(X_j=k-1).$$

Korzystając z definicji nadziei matematycznej oraz z (28) dostajemy równanie:

(29)
$$E(X_j)\frac{6-j}{6} = 1 + \frac{6-j}{6} E(X_{j+1}),$$

dla którego równość $E(X_6) = 0$ jest warunkiem brzegowym. Rozwiązując to równanie dostajemy: $E(X_0) = 14,7$.

Szczegółowe rozwiązanie powyższego problemu znaleźć można w [12].

Ale zilustrowane uprzednio idee sugerują prostszy sposób wyznaczenia średniego czasu oczekiwania na wypadnięcie wszystkich liczb oczek. "Odmierzajmy" czas trwania rozważanego tu schematu doświadczelnego etapami. W pierwszym rzucie wypada pewna liczba oczek. Czas trwania tego etapu wynosi 1. Teraz "odmierzajmy" czas oczekiwania na pierwszą, różną od otrzymanej za pierwszym razem, liczbę oczek. Na pojedynczy rzut patrzmy odtąd pod kątem: wypadnie liczba oczek różna od już wyrzuconej (sukces), czy nie. Ten "odcinek" czasu oczekiwania na wszystkie liczby oczek jest tym samym czasem oczekiwania na pierwszy sukces (którego prawdopodobieństwo wynosi $\frac{5}{6}$). Oznaczmy tę zmienną losową przez T_1. $E(T_1) = 1:\frac{5}{6} = \frac{6}{5}$. Otrzymawszy dwie różne liczby oczek patrzmy na pojedynczy rzut pod kątem: wypadnie liczba oczek różna od już wyrzuconych (sukces), czy nie. Przez T_2 oznaczmy czas oczekiwania na wypadnięcie liczby oczek różnej od już dwu wcześniej wyrzuconych liczb oczek. $E(T_2) = 1:\frac{4}{6} = \frac{6}{4}$.

I ogólnie: Przez T_j oznaczmy czas oczekiwania na wypadnięcie liczby oczek różnej od już wyrzuconych j różnych między sobą liczb oczek. $E(T_j) = 1:\frac{6-j}{6} = \frac{6}{6-j}$ dla $j=1,2,3,4,5$.

Zmienne losowe T_1, T_2, T_3, T_4 i T_5 traktujmy jako funkcje określone na przestrzeni wyników oczekiwania na wyrzucenie wszystkich liczb oczek.

Mamy:

$$X_0 = 1 + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5,$$

a więc

$$E(X_0) = 1 + E(T_1) + E(T_2) + E(T_3) + E(T_4) + E(T_5) =$$

$$= 1 + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + \frac{6}{1} = 14,7.$$

e. Nadzieja matematyczna a symetrie - średnie miejsce pierwszego asa przy wykładaniu kart z potasowanej talii

1. Rekwizytem w grze jest talia kart. Po jej potasowaniu gracz wykłada karty tak długo, aż na stole pojawi się as, wygrywając tyle złotówek, ile kart zostało wyłożonych. Udział w takiej grze trzeba opłacić.

Przy jakiej wysokości tej opłaty gra będzie sprawiedliwa?

2. Przypuśćmy, że po wyłożeniu asa pozostałe karty zostają przekazane drugiemu z graczy, który wykłada pozostałe karty aż do momentu, gdy na stole znów pojawi się as. Gracz ten wygrywa tyle złotówek, ile kart wyłożył.

Ile powinien ten gracz opłacać wstępu, aby gra była dla niego sprawiedliwa?

3. Rekwizytem w grze jest talia kart. W grze uczestniczy czterech graczy, których oznaczamy przez G_A, G_B, G_C, i G_D. Każdy wpłaca właścicielowi salonu gier x złotówek. Gracz G_A tasuje karty i wykłada po jednej tak długo, aż wyłoży asa, następnie przekazuje resztę kart graczowi G_B. Gracz G_B wykłada znów karty na oddzielny stos tak długo, aż wyłoży asa, resztę kart przekazuje graczowi G_C. Ten wykłada po jednej karcie na oddzielny stos dopóty, dopóki nie wyłoży asa. Resztę kart przekazuje graczowi G_D, który pozostałe karty wykłada na swój stos dopóty, dopóki nie wyłoży asa. Każdy z graczy wygrywa tyle złotówek, ile kart wyłożył.

Czy można tak ustalić x, aby opisana tu gra była sprawiedliwa dla wszystkich graczy?

Zanim uzyskasz odpowiedź środkami matematycznymi spróbuj odpowiedzieć, jak ci się wydaje?

W ostatnim pytaniu chodzi o ocenę intuicyjną, która następnie zostanie skonfrontowana z rezultatami dedukcji.

Niech X_A, X_B, X_C i X_D będzie liczbą kart wyłożonych odpowiednio przez gracza G_A, G_B, G_C i G_D.

Nic nie stoi na przeszkodzie, aby po potasowaniu wykładać karty nie w oddzielne stosy, lecz w rzędzie i to wszystkie karty. Takiemu doświadczeniu losowemu odpowiada bowiem klasyczny model probabilistyczny (Ω,p) gdzie Ω jest rodziną permutacji zbioru kodów 52 kart z talii. Wszystkie karty różne od asa zostają losowo rozbite na 5 klas. Pierwszą klasę stanowią karty poprzedzające pierwszego wyłożonego na stół asa. Klasa druga - to karty leżące między pierwszym i drugim w kolejności asem. I tak dalej. Niektóre z tych klas mogą być puste.

Niech X_j będzie liczbą kart w j-tej klasie (j=1,2,3,4,5). Z symetrii wynika, że rozkłady wszystkich tych zmiennych losowych są identyczne (najbardziej oczywista jest tu bez wątpienia identyczność rozkładu zmiennych losowych X_1 i X_5). Z równości rozkładów wynika także równość nadziei matematycznych, a więc:

$$E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = E(X_4) = E(X_5).$$

Mamy:

$$X_1 + 1 + X_2 + 1 + X_3 + 1 + X_4 + 1 + X_5 = 52,$$

czyli:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 48,$$

a więc:

$$E(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5) = 48.$$

Z ostatniej równości oraz z identyczności rozkładów wynika, że:

$$5E(X_1) = 48,$$

a więc

$$E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = E(X_4) = E(X_5) = \frac{48}{5} = 9{,}6.$$

$$X_A = X_1+1, \text{ a zatem } E(X_A) = 9{,}6 + 1 = 10{,}6,$$

$$X_B = X_2+1, \text{ a zatem } E(X_B) = 9{,}6 + 1 = 10{,}6,$$

$$X_C = X_3+1, \text{ a zatem } E(X_C) = 9{,}6 + 1 = 10{,}6,$$

$$X_D = X_4+1, \text{ a zatem } E(X_D) = 9{,}6 + 1 = 10{,}6.$$

Tak więc dla $x=10{,}6$ złotych gra jest sprawiedliwa dla wszystkich graczy.

f. Średni czas trwania schematu Pascala a średni czas oczekiwania na pierwszy sukces

Powtarzanie tej samej próby Bernoulliego aż do uzyskania k sukcesów (k-ustalona liczba naturalna) nazywamy **schematem Pascala**. Modelem probabilistycznym dla tego doświadczenia losowego jest para (Ω, p), gdzie:

$$= \{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) : n \geq k \text{ i } a_j \in \{0,1\} \text{ i } a_n = 1 \text{ i } \sum_{j=1}^{n} a_j = k \}$$

oraz

$$p((a_1, a_2, \ldots, a_n)) = u^k (1-u)^{n-k} ,$$

przy czym u jest prawdopodobieństwem sukcesu we wspomnianej próbie Bernoulliego ($0 < u < 1$), 0 jest kodem porażki, a 1 - kodem sukcesu w tej próbie.

Załóżmy, że kolejne etapy są przeprowadzane w kolejnych jednostkach czasu. Niech T^k będzie czasem trwania schematu Pascala.

Zdarzenie $\{T^k = n\}$ jest w modelu zbiorem wszystkich n-wyrazowych ciągów z Ω. Ciągów takich jest tyle, na ile sposobów k-1 jedynek (sukcesów) da się rozmieścić na n-1 miejscach (wszak miejsce n-te, czyli ostatnie, zawsze jest zapełnione jedynką). Ciągów sprzyjających zdarzeniu $\{T^k = n\}$ jest więc $\binom{n-1}{k-1}$ i każdemu funkcja p przypisuje tę samą wartość $u^k (1-u)^{n-k}$, a więc

$$P(T^k = n) = \binom{n-1}{k-1} u^k (1-u)^{n-k} \quad \text{dla } n = k\text{-}k+1, k+2, \ldots$$

Dla k=1 schemat staje się znanym oczekiwaniem na pierwszy sukces. T^1 jest czasem oczekiwania na pierwszy sukces, a więc zmienną losową o tzw. rozkładzie geometrycznym..

$$E(T^1) = \frac{1}{u}.$$

Wyznaczanie $E(T^k)$ z definicji jest uciążliwe w rachunkach i wymaga znajomości teorii szeregów.

Określmy na przestrzeni Ω k innych zmiennych losowych. Niech T_1 będzie czasem oczekiwania na pierwszy sukces, T_2 czasem oczekiwania na drugi sukces (licząc czas od pierwszej próby po uzyskaniu pierwszego sukcesu) i ogólnie; T_j niech będzie czasem oczekiwania na j-ty sukces (licząc czas od pierwszej próby po uzyskaniu (j-1)-szego sukcesu). $T_1, T_2, \ldots, T_k$ traktujemy tu jako funkcje określone na Ω.

Jest:

$$T_1+T_2+\ldots+T_k = T^k. \tag{30}$$

Dla $j=1,2,\ldots,k$ T_j ma rozkład geometryczny, a więc $E(T_j) = \frac{1}{u}$. Biorąc zatem pod uwagę (30) i addytywność funkcjonału E mamy:

$$E(T^k)=E(T_1+T_2+\ldots+T_k)=E(T_1)+E(T_2)+\ldots+E(T_k) = k\,\frac{1}{u} = \frac{k}{u}.$$

g. Średnia odległość dwu sukcesów przy wielokrotnym powtarzaniu próby Bernoulliego

Odległością dwu sukcesów przy wielokrotnym powtarzaniu danej próby Bernoulliego nazywajmy liczbę prób wykonanych między dwiema kolejnymi próbami zakończonymi sukcesem. Oznaczajmy tę zmienną losową przez L.

Formalnie L jest funkcją określoną na przestrzeni wyników oczekiwania na dwa sukcesy. Wynik takiego schematu doświadczalnego jest ciągiem, który - korzystając z konwencji zapisów chemicznych - zakodujmy symbolem $0_m 1 0_n 1$ (jest to kod ciągu, którego m początkowych wyrazów jest równych 0, wyraz (m+1)-szy jest równy 1, kolejnych n wyrazów jest znów równych 0 i ostatni równy 1). $L(0_m 1 0_n 1) = n$.

Jeśli p jest rozkładem prawdopodobieństwa na przestrzeni wyników oczekiwania na dwa sukcesy, to $p(0_m 1 0_n 1) = (1-u)^m u (1-u)^n u$.
$\{L=n\} = \bigcup_{m=0}^{\infty} \{0_m 1 0_n 1\}$, a więc:

$$P(L=n) = \sum_{m=0}^{\infty} (1-u)^m u (1-u)^n u = u(1-u)^n = P(T=n-1),$$

gdzie T jest czasem oczekiwania na pierwszy sukces.

Jest więc:

$$E(L) = E(T-1) = E(T) - 1 = \frac{1}{u} - 1.$$

Średnia odległość dwu reszek przy wielokrotnym rzucaniu monetą wynosi więc 1. Średnia odległość "szóstek" przy wielokrotnym rzucaniu kostką wynosi 5. Powyższe wnioski wydają się być zgodne z intuicją.

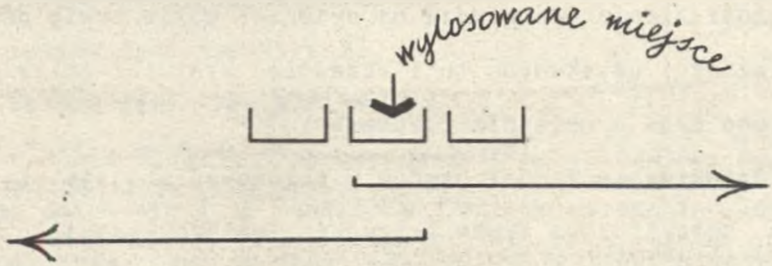
Do ważnych form aktywności matematycznych należą: weryfikacja poprawności rozumowania oraz poszukiwanie luk lub błędów w rozumowaniach.

Surowcem do wielu matematycznych odkryć, podstawą do wnioskowań są w wielu przypadkach dane empiryczne (próbka), w tym także dane fikcyjne. Takie dane, po obróbce środkami matematycznymi, stały się surowcem, z którego po procesie matematyzacji została odkryta postać definicji nadziei matematycznej.

Dobrym surowcem do tego typu wnioskowań są tablice liczb losowych (tzw. tablice jednorodne). Chodzi tu o dowolne tablice, niekoniecznie dziesiętne.

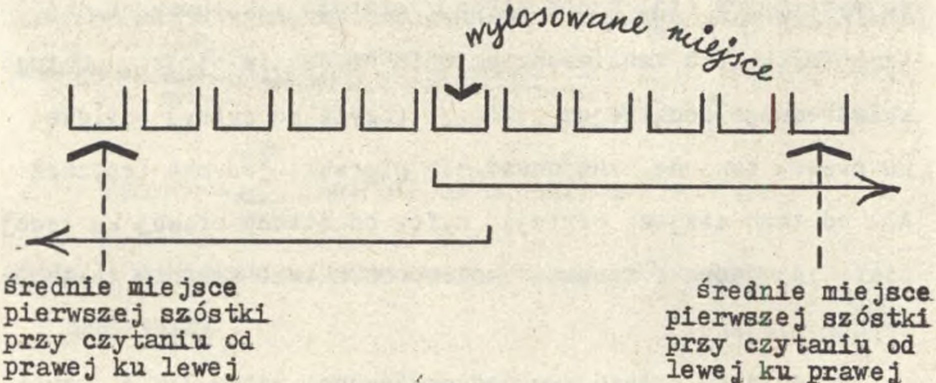
Rozważmy dwójkowe, jednorodne tablice liczb losowych, tj. tablice, których generatorem jest symetryczna moneta. Wylosujmy miejsce (tj. numer strony, wiersza i kolumny na tej stronie) w tych tablicach. Średnio na drugim miejscu od tego wylosowanego poczynając i licząc (czytając cyfry) od lewej ku prawej powinna znajdować się pierwsza jedynka (reszka). Ale od tego miejsca czytając cyfry od strony prawej ku lewej pierwszej jedynki (reszki) możemy oczekiwać średnio także na drugim miejscu.

Średnia odległość dwu jedynek wynosi zatem 2+2-3, czyli 1, co wyjaśnia rysunek 7 i co zgadza się z wnioskiem otrzymanym wyżej na drodze formalnej.



rys.7.

Rozważmy teraz szóstkowe jednorodne tablice liczb losowych. Generatorem takich tablic jest kostka sześcienna. Wylosujmy miejsce w tych tablicach. Średnio na szóstym miejscu w prawo (od tego wylosowanego licząc) powinna znajdować się pierwsza szóstka. Ale od tego miejsca poczynając i czytając cyfry od prawej ku lewej także średnio na szóstym miejscu powinniśmy spotykać pierwszą szóstkę. Z tego wynika, że średnia odległość dwu szóstek przy wielokrotnym rzucaniu kostką powinna wynosić 6+6-3, czyli 9, a nie 5, jak to wynika z powyższych formalnych rozważań (zob. rys.8).



rys.8.

Treścią zadania zainspirowanego ostatnim wnioskowaniem jest znalezienie odpowiedzi na pytania: gdzie tkwią powody rozbieżności uzyskanych tu i wcześniej wyników? gdzie popełniono błąd w ostatnim rozumowaniu?

Poszukiwanie źródeł błędów w rozumowaniu staje się tu nowym, specyficznym typem aktywności matematycznej.

f. Nadzieja matematyczna pewnej zmiennej losowej jako kombinacja liniowa znanych nadziei matematycznych

Na ćwiczeniach z probabilistyki jednym z bogatszych w matematyczne aktywności okazuje się następujące zadanie:

1. Rzucamy kostką do gry. Jeśli wypadnie j oczek, to rzucamy jeszcze j razy (j=1,2,3,4,5,6). X jest łączną liczbą wyrzuconych oczek w tym schemacie doświadczalnym. Wyznacz E(X).

Pierwsze próby atakowania tego zadania kończą się prostym wnioskiem: - Gdyby liczba rzutów była ustalona, zadanie byłoby trywialne. Cała trudność wynika z faktu, że liczba rzutów jest losowa.

Aby odkryć metodę rozwiązania zadania 1 studenci proponują zająć się rozwiązaniem serii zadań według następującej kolejności:

2. Rzucamy kostką sześcienną. Jeśli wypadnie j oczek, to rzucamy jeszcze j razy. X jest sumą wyrzuconych oczek w tym schemacie doświadczalnym. Znajdź E(X) gdy:

a) kostka jest typu 111222,

b) kostka jest typu 112233,

c) kostka jest typu 123456.

3. W urnie U_n jest n ponumerowanych kul. Losujemy kulę. Jeśli ma ona numer j, to następnie j raz ze zwracaniem losujemy kulę z tej urny. X jest sumą numerów kul wylosowanych w kolejnych etapach tego schematu doświadczalnego. Znajdź E(X).

4. W urnie U jest k_1 kul o numerze 1, k_2 kul o numerze 2,..., k_n kul o numerze n. Losujemy kulę z tej urny. Jeśli wylosowana kula ma numer j, to jeszcze j razy ze zwracaniem losujemy z tej urny kulę. X jest sumą numerów wylosowanych kul. Znajdź E(X).

Zaproponowane przez studentów zadania 3 i 4 są naturalnym uogólnieniem problemów postawionych w zadaniach 2a, 2b i 2c. Formułowanie w danej sytuacji sensownych pytań i problemów stało się w tej sytuacji pewną formą matematycznej twórczości.

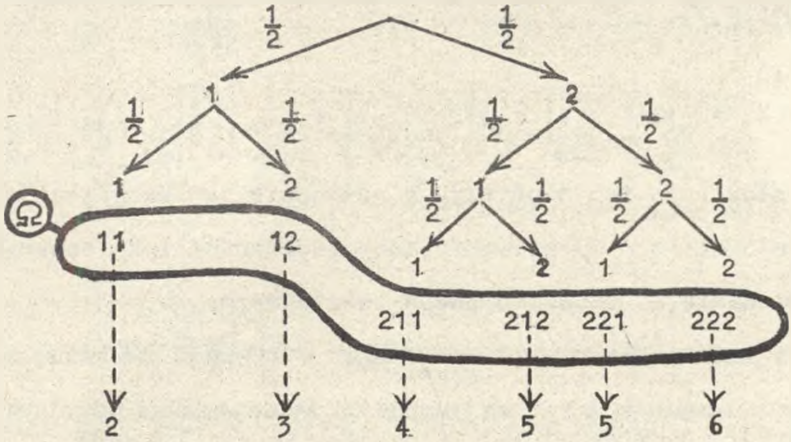
W każdym z powyższych zadań mamy do czynienia z doświadczeniem losowym o losowej liczbie etapów. Gdyby chodziło o wyznaczenie średniej łącznej liczby wyrzuconych oczek (wartości średniej sumy numerów wylosowanych kul) w j-krotnym rzucie kostką (w j-krotnym losowaniu ze zwracaniem kuli), to problem byłby prosty. Jeśli przez Y_j oznaczyć łączną liczbę oczek wyrzuconych w j-krotnym rzucie kostką (w j-krotnym losowaniu ze zwracaniem kuli z urny U_n), to:

$$E(Y_j) = \begin{cases} j\,\frac{1+2}{2}, & \text{gdy kostka jest typu } 111222, \\ j\,\frac{1+3}{2}, & \text{gdy kostka jest typu } 112233, \\ j\,\frac{1+6}{2}, & \text{gdy kostka jest typu } 123456, \\ j\,\frac{1+n}{2}, & \text{w przypadku losowania kuli z urny } U_n. \end{cases}$$

Ostatnia równość wynika z faktu, że $\frac{1+n}{2}$ jest środkiem symetrii rozkładu zmiennej losowej, będącej numerem kuli wylosowanej w jednym losowaniu (analogicznie w przypadku kostek).

Atakowanie i rozwiązywanie zadania 2a) umożliwia odkrycie pewnego algorytmu.

Wykorzystajmy drzewo stochastyczne do konstrukcji modelu probabilistycznego i rozkładu zmiennej losowej X(zob. rys.9).



rys.9.

Każdej gałęzi na drzewie przypisano wartość zmiennej losowej X dla wyniku reprezentowanego przez tę gałąź.

Mamy:

$$E(X) = (2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{4}) + (4\cdot\frac{1}{8} + 5\cdot\frac{1}{8} + 5\cdot\frac{1}{8} + 6\cdot\frac{1}{8}).$$

Suma w pierwszym nawiasie odpowiada wynikowi "wypadła jedynka", suma w drugim nawiasie - wynikowi "wypadła dwójka" (są to oba wyniki pierwszego etapu).

Analizując poszczególne składniki tych sum dostajemy:

$$E(X) = \frac{1}{2}\left[(1+1)\frac{1}{2} + (1+2)\frac{1}{2}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[(2+2)\frac{1}{4} + (2+3)\frac{1}{4} + (2+3)\frac{1}{4} + (2+4)\frac{1}{4}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,E(1+Y_1) + \frac{1}{2}\,E(2+Y_2) = \frac{1}{2}\left[1 + E(Y_1)\right] + \frac{1}{2}\left[2 + E(Y_2)\right].$$

Otrzymana postać sugeruje wzór na wartość oczekiwaną zmiennej losowej X w pozostałych przypadkach. Dla zmiennej losowej X z zadania 3 powinno być:

(31)

$$E(X) = \frac{1}{n}\left[1+E(Y_1)\right] + \frac{1}{n}\left[2+E(Y_2)\right] + \ldots + \frac{1}{n}\left[n+E(Y_n)\right].$$

Postawienie tej hipotezy, a następnie jej weryfikacja są kolejnymi formami matematycznej twórczości inspirowanymi przez zadanie 1. Chodzi o dowód twierdzenia:

Jeżeli X jest sumą numerów kul wylosowanych w schemacie doświadczalnym opisanym w zadaniu 3, a Y_j sumą numerów kul wylosowanych w j-krotnym losowaniu ze zwracaniem kuli z urny U_n, to zachodzi równość (31).

Dowód rozpocząć się musi od konstrukcji modelu probabilistycznego dla schematu doświadczalnego opisanego w zadaniu 3. Modelem tym jest para (Ω, p), gdzie:

$$\Omega = \{(a_0, \ldots, a_k) : a_j \in \{1,2,\ldots n\} \text{ dla } j=0,1,\ldots,k \text{ i } k=a_0\}$$

(a_j oznacza tu numer kuli wylosowanej za j-tym razem, pierwszy rzut potraktowany tu został jako rzut wstępny, a więc zerowy), $p((a_0,a_1,\ldots,a_k)) = (\frac{1}{n})^{k+1}$.

Zmienna losowa X jest sumą numerów wylosowanych kul, a zatem $X((a_0,a_1,\ldots,a_k)) = \sum_{j=0}^{k} a_j$.

Ponieważ X jest zmienną losową określoną na skończonym zbiorze Ω, więc E(X) istnieje. Z własności nadziei matematycznej wynika, że

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)p(\omega).$$

Korzystając z tej własności mamy:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ a_0=k}} X(\omega)p(\omega) = \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ a_0=k}} \left(\frac{1}{n}\right)^{k+1} \sum_{j=0}^{k} a_j\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{a_0=k} \left(\frac{1}{n}\right)^{k}\left(k+\sum_{j=1}^{k} a_j\right)\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ a_0=k}} k\left(\frac{1}{n}\right)^{k} + \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ a_0=k}} \left(\frac{1}{n}\right)^{k}\sum_{j=1}^{k} a_j\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[k + \sum_{\omega\in\Omega_k} Y_k(\omega)p_k(\omega)\right],$$

gdzie Ω_k jest przestrzenią wyników k-krotnego losowania ze zwracaniem kuli z urny U_n ($\Omega_k=\{1,2,\ldots,n\}^{\{1,2,\ldots,k\}}$, j-ty wyraz ciągu ze zbioru Ω_k oznacza tu numer kuli wylosowanej za j-tym razem, $j=1,2,\ldots,k$), p_k jest klasycznym rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω_k, a Y_k zmienną losową określoną na Ω_k wzorem:

$$Y_k((a_1,a_2,\ldots,a_k)) = \sum_{j=1}^{k} a_j \quad \text{dla } (a_1,a_2,\ldots,a_k) \in \Omega_k.$$

$$\sum_{\omega\in\Omega_k} Y_k(\omega)p_k(\omega) = E(Y_k),$$

a zatem

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k + E(Y_k)),$$

co należało pokazać.

Sformułowanie wzoru na E(X) i jego dowód w przypadku schematu doświadczalnego opisanego w zadaniu 4 są w tej sytuacji prostymi zadaniami.

Odkrycie algorytmu (31) odbyło się zatem na drodze indukcyjnej. Poszukiwanie rozwiązania zadania ogólnego poprzez rozwiązywanie zadań szczególnych, poprzez stopniowanie trudności było tu pewną strategią typową dla atakowania i rozwiązywania pewnych matematycznych zadań.

15. NADZIEJA MATEMATYCZNA A STOCHASTYCZNA NIEZALEŻNOŚĆ

Źródłem wielu trudności związanych z nauczaniem rachunku prawdopodobieństwa jest niewłaściwe kształtowanie pojęć probabilistycznych. Przy wszelkiego typu sprawdzianach wiedzy (i intuicji) probabilistycznej ucznia uwagę zwracają pewne powszechnie spotykane błędy, których źródła tkwią bądź w myleniu pojęć, bądź w ich niewłaściwym rozumieniu. Chodzi tu przede wszystkim o pojęcie stochastycznej niezależności zdarzeń i niezależności zmiennych losowych.

Formalną definicję stochastycznej niezależności zdarzeń cechuje pewna statyczność. Warunek definicyjny nie ujawnia istoty tego pojęcia, nie sugeruje żadnych empirycznych źródeł, z których pojęcie się wywodzi. Nie jest to zresztą zadaniem formalnej definicji. Wprowadzenie tego typu definicji w nauczaniu szkolnym powinno być raczej finałem odpowiednio długiego procesu rozwoju bazy intuicyjnej definiowanego pojęcia.

Istotą stochastycznej niezależności pokrewnych zdarzeń A i B (zdarzeń z tej samej rodziny S) jest brak wpływu informacji o zajściu jednego ze zdarzeń na prawdopodobieństwo drugiego. W sensie formalnym wspomniany brak wpływu wyraża się alternatywą:

(32) $$P(A|B) = P(A) \text{ lub } P(B|A) = P(B).$$

Przyjęcie warunku (32) w definicji niezależności zdarzeń prowadziłoby do pewnych niewygodnych konsekwencji (relacja "być stochastycznie niezależnym" nie byłaby wówczas symetryczna). W definicji przyjęto warunek

(33) $$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Warunek (32) jest wystarczający (acz nie konieczny) do tego, aby zachodziła równość (33).

W analogiczny sposób sformułowana została definicja niezależności zmiennych losowych X i Y. Zmienne losowe X i Y określone na wspólnej przestrzeni Ω nazywamy niezależnymi, jeśli:

(34)

$$F_{XY}(x,y) = F_{X.}(x)F_{.Y}(y) \text{ dla każdego } (x,y) \in R^2,$$

gdzie F_{XY} jest dwuwymiarową dystrybuantą wektora losowego $[X,Y]$, $F_{X.}$ dystrybuantą zmiennej losowej X (tzw. dystrybuantą brzegową), a $F_{.Y}$ - dystrybuantą zmiennej losowej Y.

Warunek (34) ukrywa (w przypadku ziarnistych zmiennych losowych X i Y) istotę pojęcia niezależności, tj. brak wpływu informacji o tym, jaką wartość przyjęła jedna ze zmiennych losowych, na prawdopodobieństwo, z jakim druga przyjmuje taką, lub inną wartość (i gdy tak jest dla wszystkich wartości obu zmiennych losowych), tj. gdy:

$$P(X=x_j|Y=y_k) = P(X=x_j) \quad \text{lub} \quad P(Y=y_k|X=x_j) = P(Y=y_k)$$

dla wszystkich x_j należących do zbioru wartości zmiennej losowej X i dla wszystkich y_k należących do zbioru wartości zmiennej losowej Y.

Prawdopodobieństwo P jest funkcją addytywną. Rozłączność zdarzeń (rozłączność parami) bywa często mylona z ich niezależnością. Ten powszechny wśród uczniów i studentów błąd staje się powodem kolejnego błędu. Przy korzystaniu z twierdzenia o addytywności funkcjonału E, tj. twierdzenia, którego tezą jest równość $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$, uczniowie zawsze sprawdzają, czy zmienne losowe X i Y są niezależne (jeśli tak nie jest, to ich zdaniem nadzieja matematyczna sumy nie jest równa sumie nadziei matematycznych). Ta tendencja daje się także zauważyć i wtedy, gdy zostało już udowodnione twierdzenie (co potwierdza, jak małą siłę przekonywającą ma dla ucznia dowód twierdzenia).

Powróćmy do liczby skojarzeń omówionej w 14c. Na lekcji omawiana była gra, w której dwaj gracze rozkładają w rzędzie trzy karty (w tym przypadku matematyczna obróbka sytuacji jest stosunkowo prosta). Jeśli przez X_j oznaczyć liczbę skojarzeń (trafień) na j-tym miejscu, to z uwagi na "losowanie bez zwracania", zmienne losowe X_1, X_2 i X_3 nie są niezależne (informacja, jaką wartość przyjęła zmienna losowa X_1, wpływa na prawdopodobieństwo, z jakim zmienna losowa X_2 przyjmuje swoje wartości). Średnia liczba skojarzeń - zdaniem uczniów - nie jest w tym przypadku równa sumie średnich liczb skojarzeń na poszczególnych etapach, choć wcześniej udowodnione twierdzenie to gwarantuje. Źródeł tych błędów należy szukać w myleniu takich własności zdarzeń, jak ich rozłączność i ich niezależność oraz w mieszaniu addytywności funkcjonału E z addytywnością prawdopodobieństwa P.

16. ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiono pewną koncepcję kształtowania pojęcia nadziei matematycznej zmiennej losowej w nauczaniu szkolnym, traktującą to ważne probabilistyczne pojęcie jako pewne nowe matematyczne narzędzie badania otaczającej nas rzeczywistości. W myśl tej koncepcji nadzieja matematyczna zostaje odkrywana w trakcie rozwiązywania pewnych specyficznych zadań inspirowanych problematyką otaczającej nas rzeczywistości.

W pracy ukazano, jak bogaty w matematyczne treści i w różnorakie formy matematycznej twórczości może być taki proces kształtowania pojęcia w nauczaniu matematyki. Odkrywanie definicji oraz jej wykorzystanie w dedukcji jest w tej pracy zaledwie jedną z wielu form matematycznych aktywności będących udziałem procesu kształtowania pojęcia nadziei matematycznej. W pracy podkreślona została rola tych aktywności w kształceniu poprzez matematykę, a także w kształceniu ogólnym.

LITERATURA

[1] Engel A,, The Probabilistic Abacus, Educational Studies in Mathematics, Nr 1 (1975) vol.6, s.

[2] Gardner M., Aha! Gotcha. Paradoxes to puzzle and delight, W. H. Freeman and Company, San Francisco 1982,

[3] Glaymann M., Ou le premier n'est pas toujours premier..., Brochure de l'Association des Professeurs de Mathematiques de l'Enseignement Public., Nr 17, s.41-47,

[4] Gucewicz-Sawicka I., (redakcja), Podstawowe zagadnienia dydaktyki matematyki, PWN Warszawa 1982,

[5] Hinders D. C., Monte Carlo, Probability, Algebra and Pi, The Mathematics Teacher, Nr 5 (1981), vol.74, s.335-339,

[6] Houser L. L., Baseball Monte Carlo style, The Mathematics Teacher, Nr 5 (1982), vol.74, s.340-341,

[7] Konior J., Opracowanie definicji pojęć matematycznych w nauczaniu szkolnym, Matematyka Nr 2 (1975), s.74-81

[8] Krygowska Z., Zarys dydaktyki matematyki, cz.3, WSiP Warszawa 1980,

[9] Olecka A., Pewna koncepcja strukturalizacji nauczania początków rachunku prawdopodobieństwa, Dydaktyka Matematyki (Roczniki PTM), Nr 3 (1984), s.85-154,

[10] Płocki A., Rachunek prawdopodobieństwa dla nauczycieli, PWN Warszawa 1981,

[11] Płocki A., Rachunek prawdopodobieństwa dla szkoły średniej, wyd. III, WSiP Warszawa 1985,

[12] Płocki A., Zadania probabilistyczne jako element kształcenia matematycznego, Wyd. Nauk. WSP, Kraków 1985,

[13] Płocki A., Siewruk M., Pojęcia i twierdzenia probabilistyczne w zadaniach, Wyd. Nauk. WSP Kraków 1985,

[14] Sadowski W., Decyzje i prognozy, PWE Warszawa 1977,

[15] Turnau S., Rola podręcznika szkolnego w kształceniu pojęć

i rozumowań matematycznych na poziomie pierwszej klasy ponadpoczątkowej, Wyd. Nauk. WSP Kraków 1978,

[16] Walter H., Heuristische Strategien und Fehlvorstellungen in stochastischen Situationen, Der Mathematikunterricht, Heft 1 (1983), Ernst Klett Verlag, s.11-23,

[17] Wittmann E., Grundfragen des Mathematikunterrichts, Vieweg Braunschweig 1974.