ALEKSANDRA URBAŃSKA

Klasyczne zadanie o ruinie gracza a ułamki łańcuchowe

Przedmiotem rozważań jest klasyczny problem prawdopodobieństwa ruiny gracza. W grze uczestniczy gracz X startujący z kapitałem k złotych oraz gracz Y startujący z kapitałem l złotych

(1) $$k, l \in N, \quad k \geqslant 1, \quad l \geqslant 1.$$

Wynik próby Bernoulliego o prawdopodobieństwie sukcesu równym $r (0 < r < 1)$, powtarzanej w kolejnych jednostkach czasu, decyduje o tym, który z graczy traci w kolejnej jednostce czasu 1 zł na korzyść przeciwnika. Koniec n-tej jednostki czasu nazywajmy chwilą n. Przyjmijmy, że jeśli n-ta próba zakończy się sukcesem, to gracz X wygrywa złotówkę w chwili n $(n = 1,2,...,)$. Próba powtarzana jest do momentu straty przez jednego z graczy wszystkich złotówek. Mówimy wtedy o ruinie tego gracza.

Niech

(2) $$m = k + l$$

Przebieg gry (przebieg schematu doświadczalnego, który odpowiada tej grze, a jest jednorodnym łańcuchem Markowa o $(m+1)$ stanach), można opisywać ciągiem stanów kapitału np.

gracza X po kolejnych próbach. Wyniki należące do przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω są tu oznaczane nieskończonymi ciągami o początku k, o wyrazach różniących się od sąsiednich o 1, od pewnego miejsca równych 0 lub m. Prawdopodobieństwo P podane jest poprzez funkcję p (zwaną rozkładem prawdopodobieństwa) określoną na Ω tak, że wartości jej dla każdego $\omega \in \Omega$ są nieujemne i $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$.

Przebieg zmian stanu kapitału gracza X po kolejnych próbach można interpretować jako losowe błądzenie cząstki po dwuwymiarowym grafie stochastycznym. Ω jest tu zbiorem tras, a rozkład prawdopodobieństwa określony jest regułą mnożenia:

$p(\omega)$ równe jest iloczynowi prawdopodobieństw przypisanych kolejnym krawędziom trasy ω;

natomiast dla $A \subset \Omega$ zgodnie z regułą dodawania jest:

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega).$$

Oto przykład takiej interpretacji.

W układzie współrzednych SOT cząstka startuje z punktu (k,0) - gracz X rozpoczyna grę z kapitałem k. Gdy próba Bernoulliego zakończy się sukcesem, cząstka przesuwa się do punktu (k+1,1) - gracz X wygrał w pierwszej chwili od przeciwnika złotówkę. Gdy próba zakończy się porażką, cząstka wędruje do punktu (k-1,1) - gracz X stracił w pierwszej chwili złotówkę na korzyść przeciwnika.

Ruch cząstki po grafie we wszystkich następnych chwilach określony jest następującą zasadą: jeśli próba Bernoulliego zakończy się sukcesem, cząstka, która znajduje się w chwili n w stanie j ($j \neq 0$ i $j \neq m$), wędruje z punktu (j,n) do punktu $(j+1, n+1)$, w przeciwnym razie cząstka przesuwa się z punktu (j,n) do punktu $(j-1, n+1)$. Wędrówka cząstki kończy się w momencie, gdy dotrze ona do prostej $s = 0$ lub $s = m$. Pierwsze dotarcie cząstki do punktu $(0,t)$ oznacza ruinę gracza X w chwili t (po t próbach), a pierwsze dotarcie cząstki do punktu (m,t) oznacza wygraną gracza X w chwili t (to znaczy ruinę gracza Y po t próbach).

Przyjmijmy, iż schemat doświadczalny opisany w klasycznym zadaniu o ruinie określony jest przez parametry m i k (spełniające warunki (1) i (2)). Wtedy niech R_k^m oznacza ruinę gracza X, a W_k^m - jego wygraną. $P(R_k^m)$ i $P(W_k^m)$ można wyrazić poprzez r (prawdopodobieństwo sukcesu w próbie Bernoulliego) i $q = 1-r$ (prawdopodobieństwo porażki w tejże próbie)*.

Niech $p_{i,j}^{m,r}$ $(0 \leq j \leq i < m)$ oznacza prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j wyłącznie poprzez stany większe od j i mniejsze od m.

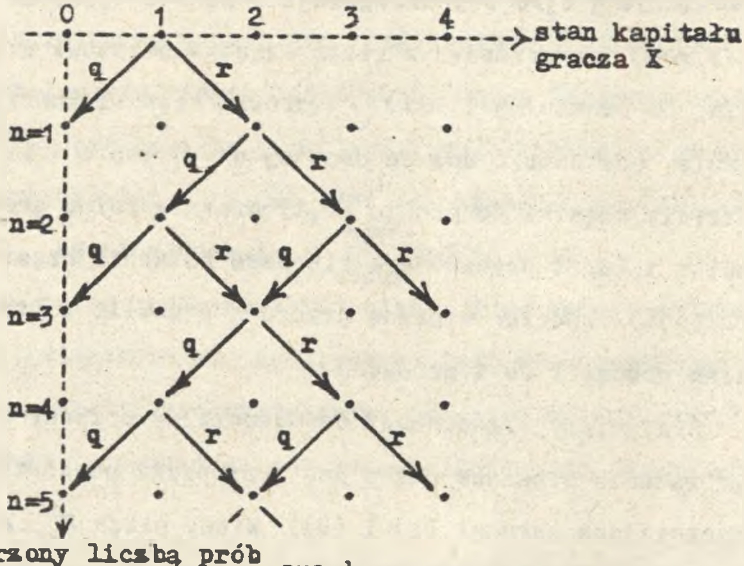
Przy tych oznaczeniach jest:

$$P(R_k^m) = p_{k,0}^{m,r}.$$

---

* Prezentowane w tej pracy podejście do zagadnienia prawdopodobieństwa ruiny gracza jest odmienne od omówionego w artykule [3], gdzie nie została wskazana efektywna metoda znajdowania $P(R_k^m)$ i $P(W_k^m)$.

Zanalizujmy sytuację dla $m = 4$ i $k = 1$ (rys.1).



rys.1.

Gracz X może zostać zrujnowany w chwili $n = 1$ z prawdopodobieństwem q lub później z prawdopodobieństwem $p_{1,1}^{4,r} \cdot p_{1,0}^{4,r}$ (w tym drugim przypadku jego kapitał najpierw oscyluje między kwotą 1 a 3, by potem z kwoty 1 zmaleć do zera).

Korzystając z reguły mnożenia i dodawania dla błądzeń otrzymujemy równanie:

(3)
$$p_{1,0}^{4,r} = q + p_{1,1}^{4,r} \cdot p_{1,0}^{4,r}.$$

$p_{1,1}^{4,r}$ oznacza, zgodnie z wcześniejszą umową, prawdopodobieństwo powrotu ze stanu 1 do stanu 1, co jest możliwe jedynie wtedy, gdy cząstka wędruje między stanami 1,2 i 3:

(4)
$$p_{1,1}^{4,r} = r \cdot p_{2,1}^{4,r}.$$

$p_{2,1}^{4,r}$ określamy analogicznie jak $p_{1,0}^{4,r}$, traktując tym razem stan 1 jako stan pochłaniający:

(5) $$p_{2,1}^{4,r} = q + p_{2,2}^{4,r} \cdot p_{2,1}^{4,r}.$$

$p_{2,2}^{4,r}$ to prawdopodobieństwo powrotu do stanu 2 poprzez jedyny możliwy stan większy niż 3:

(6) $$p_{2,2}^{4,r} = r \cdot p_{3,2}^{4,r},$$

gdzie

(7) $$p_{3,2}^{4,r} = q.$$

W powyższy sposób problem prawdopodobieństwa ruiny gracza (dla $m = 4$, $k = 1$), zinterpretowany najpierw w terminologii błądzenia losowego cząstki po dwuwymiarowym grafie stochastycznym, został opisany układem równań (3), (4), (5), (6) i (7). Rozwiązując ten układ otrzymujemy ułamek łańcuchowy

$$p_{1,0}^{4,r} = \frac{q^2}{1 -}\ \frac{rq}{1 - rq} = P(R_1^4).$$

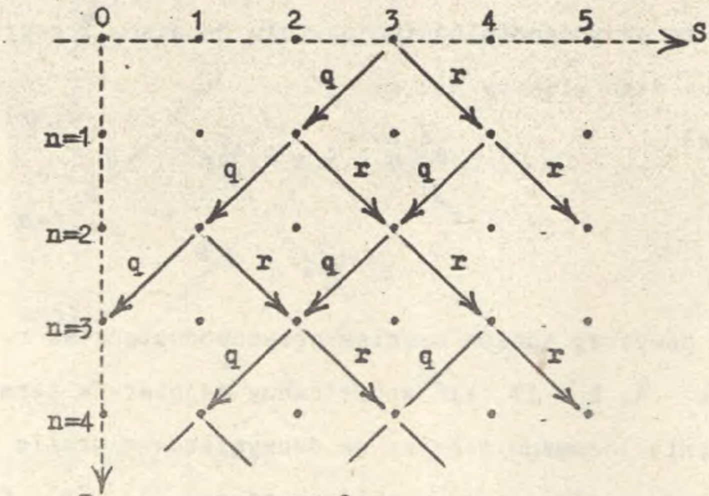
W omówionym wyżej opisie istotny jest fakt, iż $k = 1$. Od wartości m zależy jedynie liczba równań w układzie. Uogólniając postępowanie na $m > 1$ i $k = 1$, opisujemy problem ruiny gracza X układem $(2m - 3)$ równań postaci

(8) $$\begin{cases} p_{i,j}^{m,r} = q + p_{i,i}^{m,r} \cdot p_{i,j}^{m,r} & \text{dla } 1 \leqslant i \leqslant m-1, \\ & j = i - 1, \\ p_{i,i}^{m,r} = r \cdot p_{i+1,i}^{m,r} & \text{dla } 1 \leqslant i \leqslant m-2, \end{cases}$$

który można przekształcić w ułamek łańcuchowy o $(m-2)$ ogniwach

(9)
$$p^{m,r}_{1,0} = \frac{q}{1-}\ \frac{rq}{1-} \cdots \frac{rq}{1-}\ \frac{rq}{1-rq} = P(R^{m}_{1})^{*}$$

Rozważmy teraz problem ruiny gracza, gdy k=3, m=5 (rys.2).



rys.2.

Z powyższej interpretacji graficznej, z reguły mnożenia dla błądzeń oraz z określenia $p^{m,r}_{i,j}$ wynika

(10)
$$p^{5,r}_{3,0} = p^{5,r}_{3,2} \cdot p^{5,r}_{2,1} \cdot p^{5,r}_{1,0},$$

(11)
$$p^{5,r}_{3,2} = p^{3,r}_{1,0},$$

(12)
$$p^{5,r}_{2,1} = p^{4,r}_{1,0}.$$

---

* Przechodząc we wzorze (9) z m do nieskończoności otrzymamy ułamek łańcuchowy nieskończony zbieżny (porównaj [1], s.158). Możemy zatem obliczyć wartość graniczną $p^{m,r}_{k,o}$ otrzymując w ten sposób wartość prawdopodobieństwa ruiny gracza X w sytuacji, gdy jego przeciwnik dysponuje kapitałem nieskończonym. Ta metoda pozwala zweryfikować wyniki uzyskane inną drogą w teorii grafów stochastycznych nieskończonych.

Z (10), (11) i (12) otrzymujemy:

(13)
$$p^{5,r}_{3,0} = p^{3,r}_{1,0} \cdot p^{4,r}_{1,0} \cdot p^{5,r}_{1,0} = P(R^5_3).$$

(Występujące w (13) prawdopodobieństwa typu $p^{m,r}_{1,0}$ wyrażają się ułamkiem (9)).

Przejdźmy do sytuacji ogólnej. Niech m i k czynią zadość warunkom (1), (2), wtedy

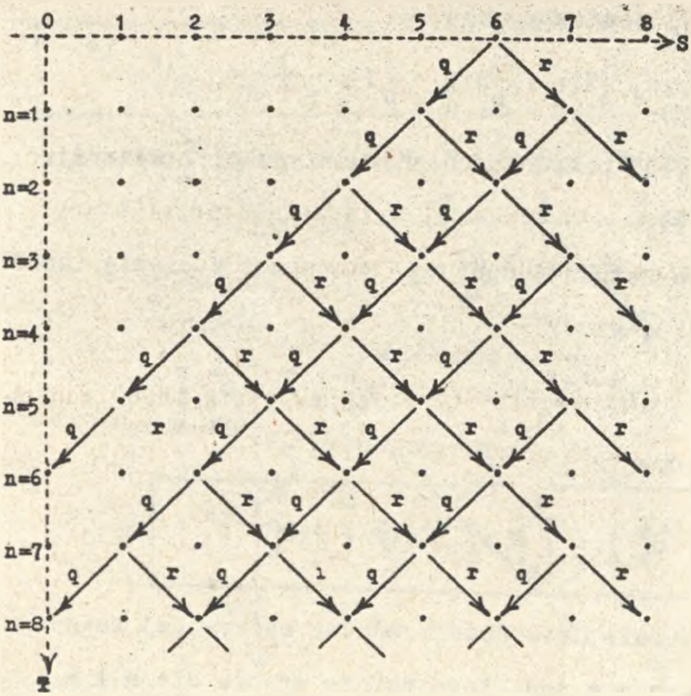
$$p^{m,r}_{k,0} = p^{m-k+1,r}_{1,0} \cdot \ldots \cdot p^{m-1,r}_{1,0} \cdot p^{m,r}_{1,0},$$

co zapiszemy krócej

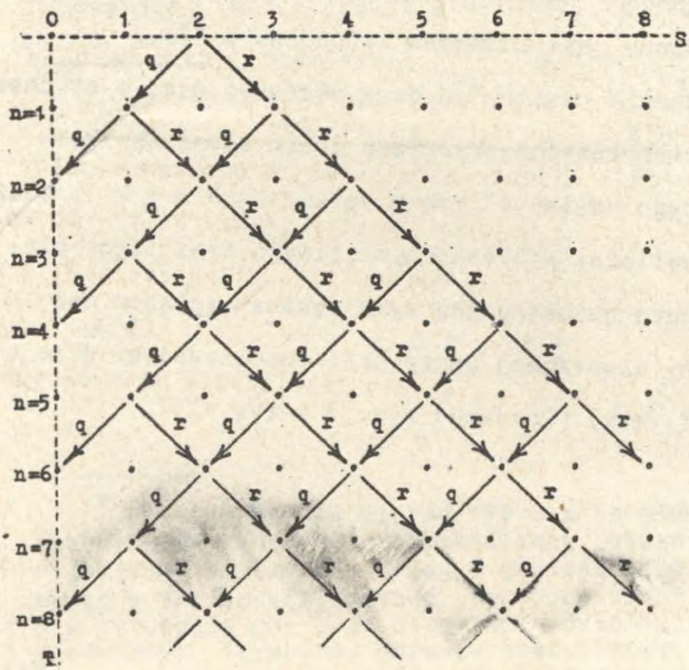
(14)
$$\boxed{p^{m,r}_{k,0} = \prod_{i=1}^{k} p^{m-k+i,r}_{1,0} = P(R^m_k).}$$

Wzór (14) wyraża prawdopodobieństwo całkowitej ruiny gracza X w klasycznym zadaniu o ruinie gracza dla m i k spełniających warunki (1), (2). Każdy z występujących w (14) czynników określony jest ułamkiem łańcuchowym (9).

Losowe błądzenie cząstki po dwuwymiarowym grafie stochastycznym jest interpretacją przebiegu zmian stanu kapitału gracza X biorącego udział w grze o parametrach m i k. Zauważmy, że obraz graficzny wszystkich możliwych tras tegoż błądzenia jest figurą geometryczną symetryczną względem osi $s = \frac{m}{2}$ do figury utworzonej przez graf odpowiadający grze o parametrach m i (m-k).(Porównaj rys. 3 i rys.4).


0 1 2 3 4 5 6 7 8
S
n=1
n=2
n=3
n=4
n=5
n=6
n=7
n=8
T

rys.3.


0 1 2 3 4 5 6 7 8
S
n=1
n=2
n=3
n=4
n=5
n=6
n=7
n=8
T

rys.4.

Ze wzoru (9) mamy:

(15)
$$p^{m,q}_{1,0} = \frac{r}{q}\, p^{m,r}_{1,0}.$$

Niech $s^{m,r}_{i,j}$ $(0 < i \leqslant j \leqslant m)$ oznacza prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j, wyłącznie poprzez stany mniejsze od j i większe od zera. Wtedy

$$P(W^m_k) = s^{m,r}_{k,m}.$$

Ze względu na zauważoną wcześniej symetrię odpowiednich grafów stochastycznych oraz (14) i (15) możemy zapisać:

$$s^{m,r}_{k,m} = p^{m,q}_{m-k,0} = \prod_{i=1}^{m-k} p^{k+i,q}_{1,0} = \prod_{i=1}^{m-k} \frac{r}{q} \cdot p^{k+i,r}_{1,0} =$$

$$= \left(\frac{r}{q}\right)^{(m-k)} \prod_{i=1}^{m-k} p^{k+i,r}_{1,0} = \left(\frac{r}{q}\right)^{(m-k)} p^{m,r}_{m-k,0}.$$

Stąd prawdopodobieństwo wygranej gracza X w klasycznym zadaniu o ruinie wyraża się wzorem:

(16)
$$\boxed{s^{m,r}_{k,m} = \left(\frac{r}{q}\right)^{(m-k)} \cdot p^{m,r}_{m-k,0},}$$

gdzie $p^{m,r}_{m-k,0}$ określone jest wzorem (14), m oznacza wspólny kapitał obu graczy, k - wstępny kapitał gracza X, r - prawdopodobieństwo sukcesu w próbie Bernoulliego towarzyszącej grze, q = 1 - r.

Wzory (9), (14) i (16) stanowią rozwiązanie klasycznego zadania o ruinie gracza*.

---

* Obliczenia wartości prawdopodobieństw ze wzorów (9),(14) i (16) można przeprowadzić dosyć prosto przy pomocy kalkulatora kieszonkowego z pamięcią (patrz [1], s.159).

LITERATURA

[1] Maciej Kozarski, Zbigniew Szurmak, Minikalkutaltory w obliczeniach naukowych i technicznych, WNT, Warszawa 1980.

[2] Adam Płocki, Rachunek prawdopodobieństwa dla nauczycieli, PWN, Warszawa 1981.

[3] Janina Wiercioch, Klasyczne zadanie o ruinie gracza a błądzenie losowe po grafie dwuwymiarowym, Matematyka 2/1981.