BARBARA WALAT, ANDRZEJ WALAT

Wnioskowania oparte na symetriach i analogiach przy rozwiązywaniu zadań probabilistycznych

1. WSTĘP

Rozwiązanie zadania z rachunku prawdopodobieństwa w oparciu o symetrie, to najczęściej takie rozwiązanie, które polega na zbudowaniu odpowiedniego klasycznego modelu probabilistycznego tzn. skończonej przestrzeni probabilistycznej, w której zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

Większość zadań szkolnych tradycyjnie wiążemy z klasycznym modelem probabilistycznym. Dotyczą one rzutów symetryczną monetą, kostką, losowań z urny itp. Zadania te są na ogół mało ciekawe, a przede wszystkim nie są kształcące. Rozwiązując wyłącznie takie (niestety) typowe zadania niewiele się można nauczyć, bo w tej nauce nie ma miejsca na ważne dla rozwoju umysłowego aktywności matematyczne. Np. nie może być schematyzacji, ponieważ odpowiedni schemat - model matematyczny jest z góry dany w treści zadania.

W artykule będziemy się zajmowali głównie takimi zadaniami, w których równość szans trzeba odkryć i które w praktyce szkolnej są z reguły rozwiązywane innymi metodami, np. opartymi na:

- twierdzeniu o prawdopodobieństwie całkowitym;
- własności prawdopodobieństwa warunkowego;
- prawach dodawań i mnożeń dla drzew będących opisem doświadczeń losowych.

W rozdziale drugim podamy przykłady takich zadań wraz z krótkim opisem i analizą typowych szkolnych metod ich rozwiązywania. Rozdział drugi jest w pewnym sensie oceną aktualnej praktyki szkolnej. Jest to ocena dość krytyczna. Twierdzimy, że nauczanie rachunku prawdopodobieństwa w szkole średniej jest na ogół schematyczne, polega ono na wyuczaniu kilku standardowych metod postępowania. Niewielki jest udział rozumowań w tym nauczaniu, nie stwarza ono okazji do odkrywania:

- struktury matematycznej zadań;
- izomorfizmu różnych zadań;
- analogii.

Zasadniczą część niniejszej pracy stanowią rozdziały trzeci i czwarty. W tych dwóch rozdziałach przedstawiamy długą serię zadań. Są one osnute wokół zadania "Gra o pięć dolarów" i innych zadań znanych z artykułu A. Engla [1]. Seria została skonstruowana w ten sposób, aby stymulowała myślenie w oparciu o symetrię. W rozdziałach 3 i 4 przedstawiamy wyniki naszych obserwacji - jak rozwiązywali te zadania uczniowie w bardzo różnym wieku,od klasy VII i VIII do maturzystów i absolwentów szkół średnich. Zadania bardzo pobudzały ich aktywność umysłową, odkrywali oni liczne związki pomiędzy różnymi na pozór problemami i proponowali rozwiązania prostsze i bardziej naturalne niż w artykule Engla.

W rozdziałach 3 i 4 zawarto więc pewną propozycję dydaktyczną, wypróbowaną w praktyce, chociaż może jeszcze nie dość wszechstronnie. Chcielibyśmy, aby była to propozycja wskazująca w jakim kierunku należałoby zmieniać nauczanie rachunku prawdopodobieństwa.

2. DWA TYPOWE PRZYKŁADY ZADAŃ EGZAMINACYJNYCH

Ocenę aktualnej praktyki szkolnej opieramy na kilkuletnich dość wnikliwych obserwacjach.

- Badaliśmy, jak uczniowie (wybrani), głównie maturzyści a także absolwenci liceów, rozwiązują typowe zadania egzaminacyjne i co myślą o poprawności różnych przedstawionych im rozwiązań.
- Badaliśmy opinie nauczycieli na temat poprawności i wartości kształcących różnych metod rozwiązywania zadań.
- Uważnie prześledziliśmy literaturę dla nauczycieli i uczniów szkół średnich, zbiory zadań, artykuły metodyczne, ponieważ w nich także odbija się aktualna praktyka.

Były to bardziej obserwacje niż badania. Poglądy nauczycieli poznawaliśmy głównie w czasie swobodnych dyskusji na zebraniach zespołów metodycznych oraz licznych indywidualnych rozmów. Nie prowadziliśmy żadnych regularnych badań ankietowych, szczegółowych raportów z rozmów i dyskusji, nie badaliśmy wyników nauczania. Dlatego nie możemy i nie zamierzamy formułować pełnej obiektywnej oceny aktualnego stanu nauczania rachunku prawdopodobieństwa w szkole średniej. Zebraliśmy jednak bardzo wiele różnorodnych obserwacji potwierdzających krytyczne uwagi sformułowane we wstąpie o aktualnej rzeczywistości. Wyniki naszych obserwacji zamierzamy przedstawić odwołując się do dwóch przykładów..

Przykład 1

W zbiorze [6] na stronie 63 mamy następujące zadanie (które wystąpiło dwukrotnie na egzaminie maturalnym w Warszawie).

Zadanie 1. W urnie znajduje się 5 kul białych, 4 czarne i 3 zielone. Wyciągamy losowo jedną kulę i nie oglądając jej wyciągamy spośród pozostałych dwie następne. Jakie jest prawdopodobieństwo, że:

a/ obie kule wyciągnięte w drugim losowaniu są białe,

b/ kule wylosowane za drugim razem są różnych kolorów?

Autor podaje tylko jedno następujące rozwiązanie, które cytujemy wraz ze wszystkimi jego osobliwościami.

Rozwiązanie 1

a/ Zadanie rozwiązujemy korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite. Rozważmy następujące zdarzenia:

A - obie kule wyciągnięte za drugim razem są białe,

B_1- kula wyciągnięta za pierwszym razem jest biała,

B_2 - czarna,

B_3 - zielona,

mamy więc:

$$P(B_1) = \frac{5}{12}, \ P(B_2) = \frac{4}{12}, \ P(B_3) = \frac{3}{12}.$$

$A|B_1$, $A|B_2$, $A|B_3$ - kula wyciągnięta za drugim razem jest biała, jeśli za pierwszym razem wyciągnięto: białą, czarną, zieloną. Czyli:

$$P(A|B_1) = \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10},$$

$$P(A|B_2) = \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10},$$

$$P(A|B_3) = \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10}.$$

Stosując twierdzenie 3,1:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3)$$

otrzymujemy:

$$P(A) = \frac{5}{33}.$$

b/ Rozpatrzmy następujące zdarzenia:

A - za drugim razem wyciągnięto kule różnokolorowe.

B_1, B_2, B_3 - za pierwszym razem wyciągnięto odpowiednio kulę: białą, czarną, zieloną.

$A|B_1$, $A|B_2$, $A|B_3$ - za drugim razem wylosowano różnokolorowe, jeśli za pierwszym razem wylosowano kulę białą, czarną, zieloną.

Mamy więc:

$$P(B_1) = \frac{5}{12}, \ P(B_2) = \frac{4}{12}, \ P(B_3) = \frac{3}{12}.$$

oraz:

$$P(A|B_1) = \frac{C_4^1 \cdot C_4^1 + C_5^1 \cdot C_3^1 + C_3^1 \cdot C_3^1}{C_{11}^2} = \frac{40}{55},$$

$$P(A|B_2) = \frac{C_5^1 \cdot C_4^1 + C_5^1 \cdot C_2^1 + C_4^1 \cdot C_2^1}{C_{11}^2} = \frac{39}{55},$$

$$P(A|B_3) = \frac{C_5^1 \cdot C_4^1 + C_5^1 \cdot C_2^1 + C_4^1 \cdot C_2^1}{C_{11}^2} = \frac{38}{55},$$

stąd $P(A) = \frac{47}{66}$. Koniec rozwiązania 1.

Uwagę musi tu zwracać wprowadzenie dziwnych "warunkowych" zdarzeń postaci $A|B_1$, $A|B_2$ itd. Mówić tu należało nie o owych "warunkowych" zdarzeniach, lecz o warunkowym prawdopodobieństwie zdarzenia A, skoro wiadomo, że zaszło zdarzenie B_1 lub zdarzenie B_2. Zadanie ma inne prostsze, choć nie dla wszystkich łatwiejsze:

Rozwiązanie 2

Interesuje nas tylko wynik drugiego losowania. Każda para kul spośród dwunastu może być wynikiem drugiego losowania. Mamy więc $C_{12}^2 = 66$ jednakowo prawdopodobnych wyników, w tym $C_5^2 = 10$ wyników sprzyja zdarzeniu A, że obie kule będą białe. Zdarzeniu B, że otrzymamy dwie kule różnych kolorów, sprzyja: $5 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 47$ wyników. Otrzymujemy odpowiedź:

$$P(A) = \frac{10}{66} = \frac{5}{33}, \quad P(B) = \frac{47}{66}$$

Chociaż rozwiązanie 2 jest znacznie prostsze niż rozwiązanie 1 (zarówno rachunkowo jak i pojęciowo), ponieważ nie korzystamy z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym, spośród dwudziestu kilku maturzystów, których poprosiliśmy o rozwiązanie zadania 1, nikt nie podał rozwiązania 2. Dla wszystkich rozwiązanie 2, kiedy je przedstawiliśmy, było zaskakującym odkryciem. Większość w pierwszym odruchu uznała, że nie jest ono całkiem poprawne. Tak samo myśli duża część nauczycieli, chociaż ściślej należałoby powiedzieć odwrotnie, że uczniowie myślą podobnie jak ich nauczyciele, ponieważ zadania zbliżone do zadania 1 rozwiązywali w szkole zawsze pierwszym a nigdy drugim sposobem.

Przykład 2

W artykułach [2] oraz [3] ich autorzy przedstawiają kilka rozwiązań następującego zadania egzaminacyjnego:

Zadanie 2. Wśród dziesięciu losów loterii znajduje się jeden los na główną wygraną oraz dwa losy uprawniające do bezpłatnego wyciągnięcia następnego losu. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania głównej wygranej przy zakupie jednego losu i maksymalnym wykorzystaniu wszystkich uprawnień?

Autor artykułu [3] podaje dwa rozwiązania, które zacytujemy w skrócie.

Rozwiązanie 1

Zaczyna się od stwierdzenia: Opisane doświadczenie jest oczywiście wieloetapowe, przy czym liczba etapów jest losowa.

Następnie reprezentując model probabilistyczny za pomocą odpowiedniego drzewa autor otrzymuje odpowiedź:

$$P(A) = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8}.$$

Rozwiązanie 2

Autor wprowadza następujące oznaczenia:

G_i - oznacza osiągnięcie wygranej w wyniku i losowań /i = 1,2,3/,

N_i - oznacza wyciągnięcie w i-tym losowaniu losu uprawniającego do dalszej gry /oczywiście i = 1,2/.

Mamy: $A = G_1 \cup G_2 \cup G_3$ oraz $G_i \cap G_j = \emptyset$ dla $i \neq j$,

$$P(G_1) = \frac{1}{10};$$

$$P(G_2) = P(N_1) \cdot P(G_2 | N_1) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9},$$

$$P(G_3) = P(N_1) \cdot P(N_2 | N_1) \cdot P(G_3 | N_1 \cap N_2) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8}.$$

i otrzymujemy taką samą jak powyżej odpowiedź:

$$P(A) = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8}.$$

Uwaga: Można porachować, że $P(A) = \frac{1}{8}$, ale autor tego nie robi; porównując oba rozwiązania wskazuje na dwa identyczne wyrażenia arytmetyczne. Widać uważa, że uczeń nie powinien być ciekawy jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia A, duże czy małe, ma tylko nauczyć się dobierać odpowiednie metody do różnych typów zadań, o to tylko chodzi.

Autorzy artykułu [2] podają jeszcze kilka innych rozwiązań zadania 2. To dobrze, jeśli analizuje się różne rozwiązania zadania, ale dziwi fakt, że w obu artykułach nie ma następującego prostego rozwiązania.

Rozwiązanie 3

Los nazwiemy kończącym grę, jeżeli po jego wyciągnięciu gra się kończy. Wśród 10 losów jest 8 kończących grę. W przypadku opisanego doświadczenia wieloetapowego interesuje nas tylko wynik końcowy, wynikiem doświadczenia nazwiemy więc wyciągnięcie losu kończącego grę, bądź wygrywającego (jest jeden taki los), bądź przegrywającego (jest 7 takich losów). Wszystkie losy kończące grę są jednakowo prawdopodobne, zatem prawdopodobieństwo wygranej wynosi $\frac{1}{8}$.

O zadaniu 2 i jego różnych rozwiązaniach rozmiawialiśmy z wieloma uczniami i nauczycielami. Dały nam one okazję do wielu ciekawych spostrzerzeń.

Dlaczego wielu nauczycieli lekceważy rozwiązanie 3? Nie tylko dlatego, że niesłusznie sądzą, że nie jest ono całkiem poprawne. Mówią oni: rozwiązania 1 i 2 uczą określonych metod i wzorów, a czego uczy rozwiązanie 3?

Kilka osób, uczniów i nauczycieli kwestionowało poprawność rozwiązania 3 używając następujących argumentów.

W rozwiązaniu 3 pomijamy milczeniem istnienie losów uprawniających do dalszej gry, tak jakby nie miały one żadnego znaczenia, a przecież wyciągnięcie takiego dodatkowego losu przedłuża grę, zwiększa zatem szansę wygranej. Losy te mają więc wpływ (dodatni) na prawdopodobieństwo wygrania na loterii.

Kiedy naszych rozmówców, którzy w ten sposób rozumowali, zapytywaliśmy: "A czy nie jest tak, że wyciągnięcie losu dodatkowego i przedłużenie gry powiększa szanse przegranej?" spontanicznie protestowali i odrzucali tę myśl.

W ich wypowiedziach było wiele chaosu i sprzeczności logicznych, np. jeden z naszych rozmówców w jednym zdaniu twierdził, że: "Im więcej jest losów dodatkowych - uprawniających do dalszej gry, tym większe są szanse wygranej", a w następnym - "Po wyciągnięciu losu uprawniającego do dalszej gry nasze szanse na wygranie są większe niż przed jego wyciągnięciem".

Bardzo różnie i bardzo mgliście rozumieli oni co to znaczy, że istnienie losów dodatkowych powiększa szanse wygrania.

W rozumowaniach tych ujawnia się ciekawa i ważna prawidłowość psychologiczna. Pisze o niej wielokrotnie Piaget w książce [4]. W rozwoju poznawczym człowieka występuje bardzo wyraźna asymetria elementów pozytywnych - afirmacji i negatywnych - negacji, dopełnień. Istotnym elementem rozwoju poznawczego jest przezwyciężanie tej asymetrii i uczenie się odkrywania i konstruowania negacji. Asymetria w ocenie szans na wygraną i szans na przegraną, niemożność zrozumienia, że przegrana to wygrana (naszego przeciwnika) a wygrana jest równocześnie przegraną, to typowy przejaw asymetriii pozytywów i negatywów w rozwoju poznawczym.

Analizując dokładnie aspekty psychologiczne zarysowanego powyżej myślenia, należałoby również uwzględnić możliwy wpływ czynnika emocjonalnego. Jak pisze Reykowski [5], emocje mają istotny wpływ na myślenie. Większość ludzi przecenia szanse zdarzeń pożądanych, np. wygrania w Toto-Lotka i nie docenia szans zdarzeń niekorzystnych, np. śmierci, wypadku.

Taka psychologiczna analiza różnych rozumowań związanych z zadaniem 2 pokazuje, czego uczą rozwiązania oparte na symteriach i wyjaśnia wątpliwości formułowane przez wielu nauczycieli.

Podkreślamy wagę rozumowań przez symetrię dlatego, że widzimy ich ścisły związek z rozwojem bogatych, pełnych i plastycznych schematów poznawczych.

3. UWAGI O ROZWIĄZYWANIU ZADAŃ O RUINIE GRACZA

Zadania, które omawiamy poniżej, nie są typowymi zadaniami szkolnymi. Są to różne warianty klasycznego zadania o ruinie gracza i zadań o błądzeniu losowym. W zadaniach tych tkwią ogromne wartości kształcące, ponieważ mają one elementarne rozwiązania, ale te proste rozwiązania trzeba jednak odkryć poprzez rożnorodne i ważne operacje myślowe, trzeba widzieć analogie, symetrie, trzeba budować uogólnienia. Te ważne aktywności umysłowe można stymulować układając zadania w odpowiednio skonstruowane serie. Poniżej przedstawimy taką serią zadań i opiszemy jak rozwiązywali je uczniowie, których pracę obserwowaliśmy.

Zadanie 3A

Masz dolara, potrzebujesz pięć dolarów. Możesz je osiągnąć w sprawiedliwej grze. Stawiając stawkę możesz z równym prawdopodobieństwem stracić ją albo podwoić. Decydujesz się na ryzykancką strategię, w każdej rundzie stawiasz tyle z aktualnego majątku, aby w razie wygranej być jak najbliżej celu tj. potrzebnych ci pięciu dolarów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osiągniesz cel?*

Zadanie 3B

Masz dolara, potrzebujesz pięć, tak jak w zadaniu 3A. Jesteś jednak ostrożny i wybierasz inną strategię gry. Będziesz w każdej rundzie stawiał jednego dolara. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osiągniesz cel?

Zadanie 3C

W grze bierze udział pięciu graczy. Jesteś jednym z nich. Każdy rozpoczyna grę mając jednego dolara. Każda z kolejnych rund rozgrywana jest między dwoma spośród tych uczestników gry, którzy mają jeszcze choćby dolara. Stawiają po dolarze i otrzymuje je jeden z nich w wyniku sprawiedliwego losowania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wygrasz grę (i osiągniesz potrzebne ci pięć dolarów)?

Zadanie 4A

Masz dwa dolary, potrzebujesz pięć. Dalsza treść jak w zadaniu 3A

Zadanie 4B

Masz dwa dolary, potrzebujesz pięć. Dalej jak w zadaniu 3B.

---

* Tekst zadania cytujemy z pracy [1].

Zadanie 4C.

Brown ma dwóch synów, a Smith trzech. Każdy chłopiec ma dolara. Będą grali według zasad opisanych w zadaniu 3C. Jeśli wygra któryś z synów Browna, powiemy, że wygrał Brown. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wygra Brown?

Zadanie 3D.

Masz dolara, potrzebujesz ich n. Dalej jak w zadaniu 3A.

Zadanie 4D.

Masz m dolarów, potrzebujesz ich n /$0 < m < n$/. Dalej jak w 3A.

Zadanie 4E.

Na osi liczbowej stoi pionek w punkcie m. Będziemy wielokrotnie rzucali monetę i jeśli wypadnie orzeł, przesuniemy pionek w prawo, a jeśli reszka, w lewo. Rzut monetą będziemy powtarzali tak długo, aż pionek znajdzie się w punkcie "końcowym" 0 albo n /zakładamy, że $0 < m < n$/. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pionek zakończy grę w punkcie n?

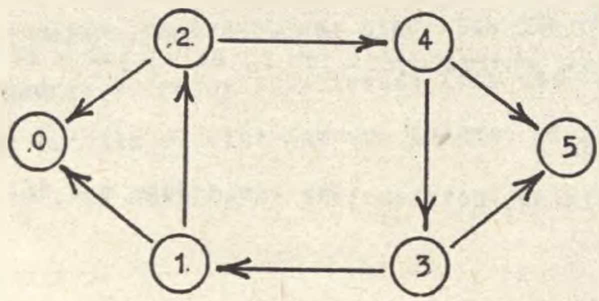
Zadanie 4F.

Na początku gry pionek stoi w punkcie m. Gra zakończy się, gdy pionek dotrze do punktu k lub do punktu n /$k < m < n$/. Dalej jak w zadaniu 4E.

Zadanie 4G.

Masz dwa dolary, potrzebujesz ich pięć. "W potrzebie" możesz pożyczać dolary od wujka, ale w sumie nie więcej niż trzy dolary. Dalej jak w zadaniu 4B.

Rozpoczynające serię zadanie 3A pochodzi z artykułu [1]. Engel podaje kilka sposobów rozwiązania tego i podobnych zadań. Opierają się one na uwadze, że przebieg gry można symulować błądzeniem losowym pionka po grafie przedstawionym na rysunku 1.



rys.1

Przedstawimy poniżej inne, bardziej elementarne rozwiązania, które w dość naturalny sposób nasuwają się uczniom, jeśli postawimy im nie jedno tylko zadanie 3A, ale całą serię od 3A do 4G. Śledziliśmy pracę (indywidualną) kilkunastu uczniów i kilku niedużych grup uczniów (od dwóch do czterech uczniów) w wieku od 14 do 19 lat. Byli to uczniowie według naszej oceny dość zdolni (chociaż nie badaliśmy ich zdolności żadnym testem). Opiszemy w syntetycznym skrócie przebieg ich pracy pomijając szczegółowe różnice tempa i stylu pracy a także drobiazgowy opis wszystkich naszych interwencji.

Tak jak przypuszczaliśmy, najłatwiejsze okazało się zadanie 3C. To naturalne, że każdy gracz ma takie same szanse wygrania gry, a więc dla każdego konkretnego gracza prawdopodobieństwo wygrania gry wynosi 1/5.

Analizując treść zadania 3C niektórzy uczniowie wskazywali na problem - jak zorganizować grę, w jaki sposób wybrać dwóch spośród pięciu graczy do pierwszej rundy, jak wybierać następnych?

Uwaga: Część uczniów miała w treści zadania podany następujący opis organizacji gry:

1° Graczom przydzielamy losowo numery od 1 do 5.

2° Tworzymy listę: 1,2,3,4,5,1,2,3,4,5,1,2,3,4,5,...

3° Do pierwszej rundy wybieramy graczy 1 i 2 i skreślamy ich z początku listy,
do drugiej rundy wybieramy graczy 3 i 4 i skreślamy ich z początku listy
i tak dalej,
do każdej następnej rundy wybieramy dwóch pierwszych na liście.

4° Gracza, który wypadł z gry (który stracił wszystko) usuwamy z listy. Przekonaliśmy się, że problem organizacji gry bardzo pasjonuje uczniów i pobudza różnorodną aktywność matematyczną.

Zadanie 3B ma identyczną odpowiedź jak 3C. Oceniając grę opisaną w zadaniu 3C z punktu widzenia wybranego konkretnego gracza, widzimy, że jest to gra, która spełnia warunki zadania 3B. Następnie przez uogólnienie otrzymujemy rozwiązanie zadania 3D: $p = \frac{1}{n}$.

Zadania 3B, C i D były w pewnym sensie aż "za łatwe" dla "naszych" uczniów, żaden z nich nie dostrzegł problemu - czy gra musi się skończyć?

Uważaliśmy, że nie można tego problemu zbywać milczeniem i dlatego ingerowaliśmy stawiając pytanie:

- Czy gra musi się skończyć?

- Czy jest możliwe, że w grze o pięć dolarów nasz stan posiadania będzie w nieskończoność oscylował pomiędzy 1 i 4 i gra nigdy się nie skończy?

Okazało się, że bardzo wielu uczniów, którzy przedtem nie widzieli problemu, przeceniało prawdopodobieństwo nieskończoności gry. Twierdzili, że jest ono większe od zera. Dyskusje przebiegały rozmaicie w zależności od wieku i umiejętności uczniów. Kończyło się na formułowaniu i uzasadnianiu hipotezy: Prawdopodobieństwo, że rzucając monetą dowolnie wiele razy kiedyś otrzymamy orła, wynosi 1.

Były też formułowane i uzasadniane inne warianty - dla kostki, dla ogólnego przypadku n jednakowo prawdopodobnych wyników.

W przypadku młodszych uczniów uzasadnienia miały charakter empiryczny. Odwoływaliśmy się do zjawiska stabilności częstości.

Jeśli akceptujemy, że: "W bardzo długiej serii rzutów monetą częstość orła powinna być bliska liczbie $\frac{1}{2}$", to musimy też zaakceptować sformułowaną powyżej hipotezę.

W przypadku starszych licealistów także liczyliśmy:

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1.$$

W ogólnym przypadku:

$$p = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n^2} \cdot \frac{1}{n} + \ldots = 1.$$

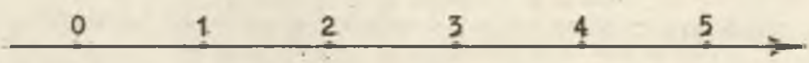
Rozwiązanie zadania 4C jest bezpośrednią konsekwencją rozwiązania zadania 3C. Pomiędzy zadaniami 4B i 4C oraz 4D zachodzą podobne zależności jak pomiędzy zadaniami 3B, 3C oraz

3D. Otrzymujemy odpowiedź $p = \frac{2}{5}$ w przypadkach B i C oraz $p = \frac{m}{n}$ w przypadku D. Zadanie 4E ma oczywiście identyczną odpowiedź jak 4D. Mając rozwiązanie zadania 4E, łatwo znajdziemy rozwiązanie zadania 4F, wystarczy wyznaczyć nowy początek osi liczbowej w punkcie k, wtedy punkt m będzie miał nową współrzędną m-k oraz punkt n nową współrzędną n-k i przez analogię z zadaniem 4E otrzymujemy odpowiedź

$$p = \frac{m-k}{n-k}.$$

Rozwiązanie zadania 4F jest bardzo ważne, ponieważ wynika z niego, że w opisanych powyżej grach hazardowych obojętna jest strategia gry, a w szczególności, że zadania 3A i 3B oraz odpowiednio 4A i 4B mają taką samą odpowiedź. Najłatwiej przekonamy się o tym, odwołując się do rysunków.

Wyobraźmy sobie dwie osoby. Pierwsza dysponuje planszą przedstawioną na rysunku 2 (odcinkiem osi liczbowej), a druga planszą przedstawioną na rysunku 1.



rys.2

Każda z osób stawia pionek w polu 1. Pierwsza osoba będzie rzucała monetą i po każdym rzucie przesuwała swój pionek o jedno pole w lewo lub w prawo. Druga z osób grająca bez monety, będzie naśladowała pierwszą. Powiedzmy, że po pierwszym rzucie przesunie swój pionek na pole dwa, tak samo jak pierwsza osoba. Po drugim rzucie nie może wykonać ruchu pionkiem, bo na jej planszy nie ma strzałki z pola 2 wprost na pole 3 ani na pole 1. Musi czekać aż pionek na osi liczbowej dojdzie do pola 0 albo do pola 4, a więc na rozstrzygnięcie gry opisanej w zadaniu 4F dla k=0, m=2, n=4 prawdopodobieństwo, że zakończy się ona w punkcie 0 jest takie jak prawdopodobieństwo, że zakończy się w punkcie 4 i wynosi $\frac{1}{2}$ zgodnie z rysunkiem 1. Podobnie będzie, gdy pionek drugiej z osób znajdzie się w punkcie 3. Będzie ona musiała czekać aż pionek na osi dotrze do punktu 1 albo do punktu 5. Tu także mamy równe prawdopodobieństwa $\frac{3-1}{5-1} = \frac{5-3}{5-1} = \frac{1}{2}$. O pierwszej osobie możemy powiedzieć, że bierze udział w grze o pięć dolarów wg strategii ostrożnej, jak w zadaniu 3B, o drugiej, że gra hazardowo, jak w zadaniu 3A. Obie osoby zakończą grę równocześnie i z takim samym rezultatem. Prawdopodobieństwo wygrania gry jest dla drugiej osoby takie samo, jak dla pierwszej.

Odkrycie i zrozumienie niezależności prawdopodobieństwa wygrania gry o n dolarów od wyboru strategii to największa trudność w całej serii zadań. Bez naszej pomocy obserwowani przez nas uczniowie z pewnością nie poradziliby sobie z tym problemem. Nasza pomoc nie odbierała im jednak samodzielności i w gruncie rzeczy ograniczała się do narysowania grafu z rysunku 1 i wskazówek, aby:

a) porównali grę o pięć dolarów wg strategii hazardowej z błądzeniem losowym pionka po planszy z rysunku 1.
b) przeprowadzili w myśli opisany powyżej eksperyment równoległego błądzenia pionków po planszy i po osi liczbowej.

Gdybyśmy wzbogacili serię jeszcze o kilka zadań, można byłoby nie ingerować zupełnie w tok pracy naszych uczniów. Inna sprawa, że wtedy zapewne trudno byłoby zakończyć pracę w czasie jednego dwugodzinnego (czasem trochę dłuższego) seansu.

Różne zadania będące przedłużeniem serii stawialiśmy naszym uczniom w czasie kolejnych spotkań, np:

Zadanie 3E.

Masz dolara, potrzebujesz ich n. Możesz je osiągnąć w sprawiedliwej grze. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osiągniesz cel?

Jest ono z pozoru identyczne jak zadanie 3D a ponadto ma bardzo proste rozwiązanie, przynajmniej dla uczniów starszych klas szkoły średniej, którzy w szkolnym kursie rachunku prawdopodobieństwa poznali pojęcie gry sprawiedliwej.

Rozwiązanie. W grze możemy wygrać:

- albo $n-1$ dolarów, z prawdopodobieństwem p,
- albo -1 dolarów, z prawdopodobieństwem $1-p$.

Ponieważ gra jest sprawiedliwa, wartość oczekiwana wygranej jest równa zeru, mamy:

$$(n-1)p - 1(1-p) = 0.$$

Po rozwiązaniu równania otrzymujemy odpowiedź: $p = \frac{1}{n}$.

Czy jednak istotnie zadania 3E i 3D są identyczne? Przeanalizujmy dokładnie treść zadania 3A. Co miał na myśli jego autor (A. Engel) zakładając w drugim zadaniu, że gra ma być sprawiedliwa? Naszym zdaniem dokładnie to, co precyzyjnie formułuje w trzecim zadaniu, a mianowicie, że gracz może z równym prawdopodobieństwem stracić stawkę albo ją podwoić. Przynajmniej my tak chcemy to założenie rozumieć. Takie rozumienie sprawiedliwości odnosi się tylko do szczególnej klasy gier. Jest to w pewnym sensie lokalna sprawiedliwość gry tzn. sprawiedliwość poszczególnych rund. Istotnie przyjmując, że s to wysokość stawki, otrzymujemy wartość oczekiwaną wygranej w pojedynczej rundzie:

$$s \cdot \frac{1}{2} + (-s) \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Czy jednak możemy bez dowodu przyjąć, że sprawiedliwość "lokalna" implikuje sprawiedliwość "globalną"? Intuicyjnie tak powinno być, bo wartość oczekiwana wygranej w grze powinna być równa sumie wartości oczekiwanych wygranych w poszczególnych rundach. Jednak w szkole dowodzi się, że: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$, a tu mamy znacznie bardziej złożony przypadek sumy losowej liczby zmiennych losowych. To właśnie przytoczone powyżej rozwiązania zadań mogą przekonać uczniów, że istotnie sprawiedliwość globalna gry wynika ze sprywiedliwości lokalnej.

4. ROZWIĄZYWANIE ZADAŃ O DWÓCH CIĄGACH WYNIKÓW RZUTU MONETĄ PRZEZ ODKRYCIE IZOMORFIZMU Z ODPOWIEDNIM ZADANIEM O RUINIE GRACZA

W tej części pracy przypomnimy kolejne zadania z artykułu [1] i przedstawimy inne niż A. Engel metody ich rozwiązywania.

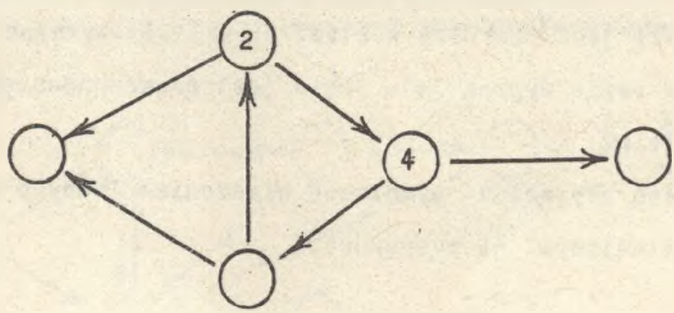
Zadania będą dotyczyły gier, a rozwiązania będą polegały na odkryciu izomorfizmu z odpowiednim zadaniem o ruinie gracza. Pokażemy, że dwie różne z pozoru gry mają ten sam graf. Przebieg obu gier można symulować przesuwając losowo pionek po tej samej planszy. Przyjmując, że graf to model matematyczny doświadczenia losowego, będzie to izomorfizm polegający na identyczności modeli.

Metody, które przedstawimy, będą bardzo proste. Łatwo się ich nauczyć i łatwo je zrozumieć. Ale aby uczniowie mogli mieć także udział w odkryciu tych metod, należy przeanalizować z nimi kilka zadań wstępnych.

Zadanie 5.

Na rysunku 3 przedstawiony jest graf pewnej sprawiedliwej "gry dolarowej". Wierzchołek początkowy oznaczony jest liczbą 2. O ile dolarów toczy się gra, jakie jest prawdopodobieństwo wygrania gry?

Wskazówka. Wpisz brakujące liczby w wierzchołkach grafu.



rys.3

Uczniowie powinni zauważyć, że stawka w wierzchołku 2 jest równa 4-2=2. Wygrywając stawkę przechodzimy do wierzchołka 4, przegrywając stawkę przechodzimy do wierzchołka 0. Wpisujemy liczbę 0 do lewego wierzchołka grafu i rozumując podobnie dalej otrzymujemy odpowiedź: Gra toczy się o siedem dolarów, prawdopodobieństwo wygranej $p = \frac{2}{7}$.

Rozwiązując kilka podobnych zadań uczniowie powinni odkryć i sformułować podstawową prawidłowość grafów sprawiedliwych gier dolarowych.

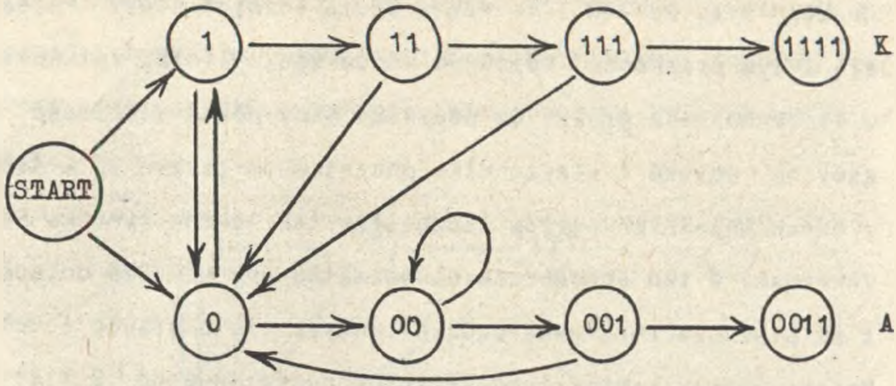
Liczba w dowolnym wierzchołku w grafu (sprawiedliwej gry dolarowej) jest zawsze średnią arytmetyczną liczb w wierzchołkach w' oraz w'', do których prowadzą strzałki od wierzchołka w.

Teraz możemy już postawić następujące zadanie, które pochodzi z artykułu [1].

Zadanie 6.

Abel mówi do Kaina: "Będziemy rzucać symetryczną monetą ze stanami 0 i 1 aż do otrzymania jednego z ciągów 1111 lub 0011. Jeżeli jako pierwszy wystąpi ciąg 1111, ty wygrasz, w przeciwnym razie wygram ja". Jakie jest prawdopodobieństwo, że wygra Kain?

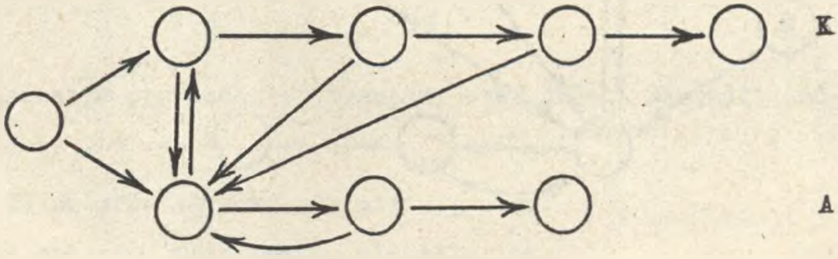
Przebieg gry można symulować błądzeniem losowym po grafie przedstawionym na rysunku 4.



rys.4

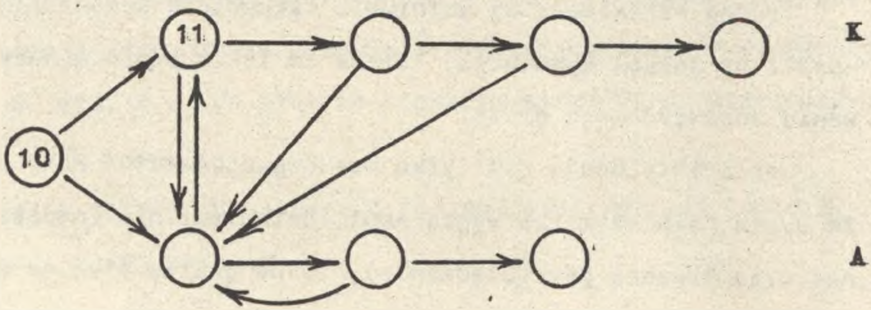
Trudno oczekiwać, by uczniowie całkowicie samodzielnie wpadli na pomysł symulacji, trzeba im także pomóc w narysowaniu odpowiedniego grafu.

Jeśli interesują nas tylko prawdopodobieństwa P(K) i P(A), że wygra Kain oraz że wygra Abel, natomiast nie interesuje nas czas trwania gry (błądzenia), to na grafie (rys.4) możemy usunąć wierzchołek 00 z pętlą, możemy też oczywiście usunąć zerojedynkowe oznaczenia wierzchołków (pełnią one tylko pomocniczą rolę przy rysowaniu grafu). Zapytajmy teraz: czy graf przedstawiony na rysunku 5 jest grafem jakiejś sprawiedliwej gry dolarowej?

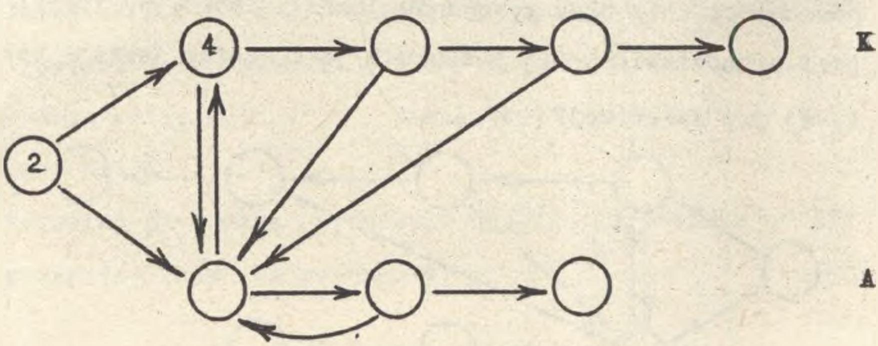


rys.5

Okazuje się, że tak i to nawet wielu różnych gier. Możemy się o tym przekonać wpisując odpowiednio liczby całkowite w wierzchołkach grafu. Na początku mamy pewną dowolność, możemy np. wpisać w wierzchołku początkowym liczbę 10 w jednym z dwóch kolejnych węzłów liczbę 11, tak jak na rysunku 6. Zakładamy w ten sposób, że na początku gry mamy 10 dolarów i że pierwsza rozgrywka będzie toczyła się o stawkę 1 dolara. Możemy jednak wybrać inne wartości początkowe, np. 2 i 4, tak jak na rysunku 7.

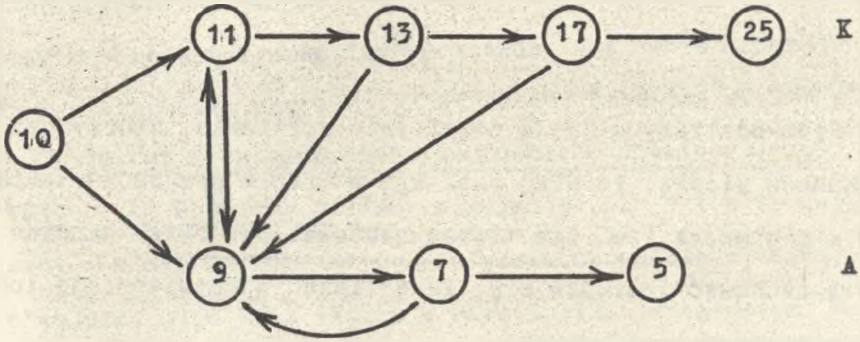


rys.6

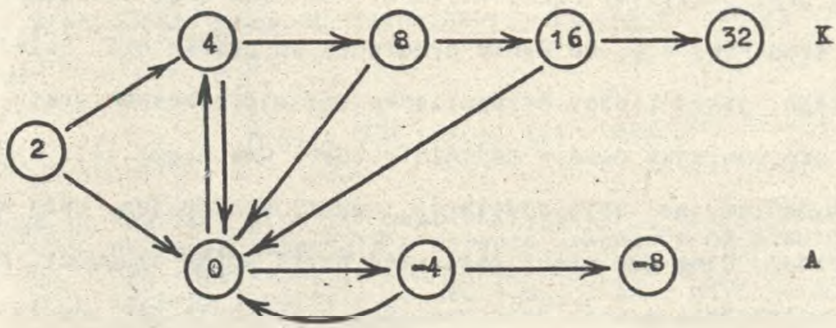


rys.7

Dalsza "numeracja" wierzchołków jest już wymuszona. Musimy wpisywać liczby w wierzchołkach zgodnie z zasadę średniej arytmetycznej. Wynik numeracji przedstawiony jest na rysunkach 8 i 9.



rys.8



rys.9

W pierwszym przypadku otrzymujemy następujące wartości kończące grę:

25 dolarów (gra kończy się wygraną),

5 dolarów (gra kończy się przegraną)

W drugim przypadku otrzymujemy odpowiednio: 32 oraz - 8 dolarów. W obu przypadkach otrzymujemy oczywiście takie samo prawdopodobieństwo wygrania gry:

$$P(K) = \frac{10-5}{25-5} = \frac{1}{4},$$

$$P(K) = \frac{2+8}{32+8} = \frac{1}{4}.$$

Przekonaliśmy się, że nawet tacy uczniowie, którzy bez rachunków wiedzą, że P(K) musi być w drugim przypadku takie jak w pierwszym (że nie trzeba rachować dwa razy) bardzo lubią rachować i cieszą się, że obliczenia potwierdzają ich teoretyczne przewidywania.

Można wybrać dowolnie wartość początkową i stawkę początkową gry. Otrzymamy różne wartości kończące grę, ale zawsze tak samo $P(K) = \frac{1}{4}$, bo wynik błądzenia po grafie nie zależy od tego, jakie liczby przyporządkujemy wierzchołkom grafu.

Uzmienniając dane w zadaniu 6 (dane dwa ciągi 1111 i 0011 możemy zastąpić dowolnymi innymi) otrzymujemy całą klasę zadań. Dane dwa ciągi mogą mieć nawet różne długości. Każde z nich możemy rozwiązać postępując podobnie jak powyżej. Nasze zajęcia z uczniami kończyliśmy odkryciem metody i sformułowaniem algorytmu rozwiązywania dowolnego zadania tej klasy. Cytujemy jedną z wielu możliwych redakcji algorytmu.

ALGORYTM

1. <u>Narysuj graf gry</u>.
2. <u>Usuń zero-jedynkowe oznaczenia wierzchołków</u>.

3. <u>Wykonaj "redukcję grafu"</u>: dopóki istnieją wierzchołki z których wychodzi tylko jedna strzałka do innego wierzchołka, usuwaj je.

4. <u>Ponumeruj wierzchołki grafu</u>: wybierz dowolne dwie różne liczby naturalne, pierwszą wpisz w wierzchołku początkowym, drugą w dowolnym z dwóch wierzchołków, następnie numeruj kolejne wierzchołki przestrzegając zasady średniej arytmetycznej.

5. <u>Oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń odpowiadających wierzchołkom końcowym grafu</u>: przyjmując, że n i k to dwie liczby w wierzchołkach końcowych grafu odpowiednio większa i mniejsza, oraz m to liczba w wierzchołku początkowym, oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A odpowiadającego wierzchołkowi z liczbą n, a następnie prawdopodobieństwo zdarzenia B odpowiadającego wierzchołkowi z liczbą k, według wzorów:

$$P(A) = \frac{m-k}{n-k}, \quad P(B) = 1 - P(A).$$

Uwaga 1: Powyższy algorytm jest oczywiście niederministyczny, gdyż polecenie 4 zezwala wykonawcy na dowolny, być może losowy, wybór liczb naturalnych, także polecenie 3 pozwala na pewną dowolność, gdyż kolejność usuwania wierzchołków z pętlami nie jest wyznaczona jednoznacznie. Ten niedeterminizm łatwo usunąć ustalając od jakiej wysokości zaczyna się gra i początkową stawkę. Można na przykład ustalić, że do dwóch pierwszych wierzchołków będziemy zawsze wpisywali liczby 0 i 1. Nie chcemy jednak narzucać ograniczeń sztucznych tzn. takich, które nie wynikają z istoty problemu. Zakładamy, że wykonawcą algorytmu będzie człowiek. Dla innego wykonawcy, np. maszyny, algorytm należy odpowiednio zmienić, godząc się na warunki dyktowane przez narzędzie.

Uwaga 2: Budowanie algorytmu dopiero wtedy jest zakończone, gdy umiemy udowodnić jego poprawność. Należy wykazać, że dla dowolnych danych początkowych (dowolnych dwóch skończonych ciągów zero-jedynkowych):
- wykonując algorytm,po pewnej skończonej liczbie operacji otrzymamy wynik (postępowanie wg algorytmu nie załamie się i nie zapętli),
- wynik jaki otrzymamy będzie poprawny.
Drugi fakt można uzasadnić łatwo, ponieważ dla dowolnych dwóch gier, które można symulować za pomocą tego samego grafu, prawdopodobieństwa sukcesu w grze i porażki muszą być takie same.

Skończoność algorytmu można uzasadnić wskazując, że dopóki nie ponumerujemy całego grafu, zawsze można wskazać taki wierzchołek **w**, który spełnia następujące warunki:

- **w** ma numer,
- jedna strzałka z wierzchołka **w** prowadzi do wierzchołka, który już ma numer,
- druga strzałka prowadzi do wierzchołka, który nie ma numeru.

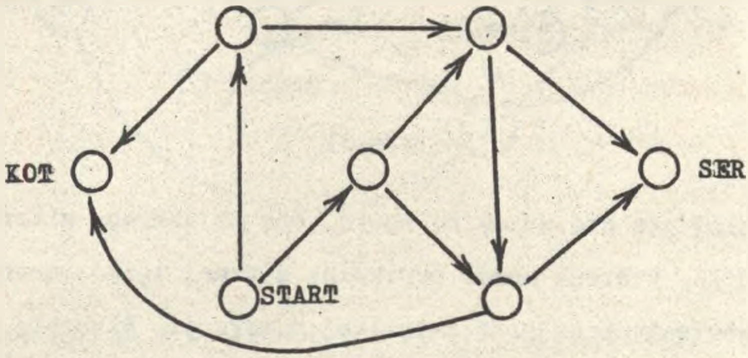
Dowód tego faktu jest jednak znacznie trudniejszy. Niektórym naszym uczniom trudno było nawet wyobrazić sobie, w jaki sposób postępowanie według algorytmu mogłoby załamać się. Dlatego z częścią uczniów ograniczaliśmy się do ścisłego uzasadnienia, że jeśli algorytm doprowadza nas do wyniku, to jest to wynik poprawny.

Zawsze jednak dążyliśmy do pełnego wyjaśnienia na czym polega problem skończoności, w jaki sposób algorytm mógłby "paść".

W zrozumieniu problemu bardzo pomaga próba rozwiązania kolejnego zadania z artykułu [1].

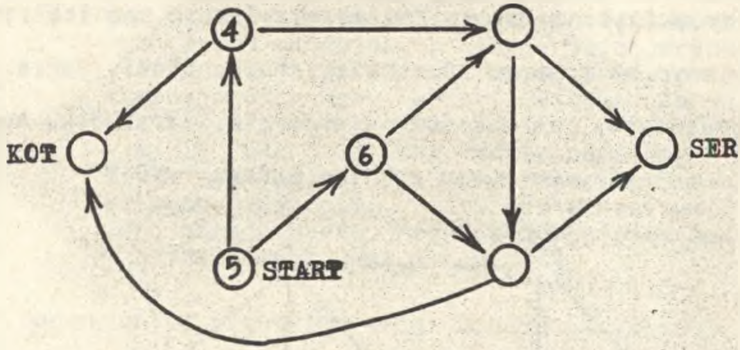
Zadanie 7.

Mysz rozpoczyna wędrówkę, błądzenie losowe, po labiryncie przedstawionym na rysunku 10 od wierzchołka START. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zakończy wędrówkę w wierzchołku końcowym SER, a jakie, że w wierzchołku końcowym KOT?



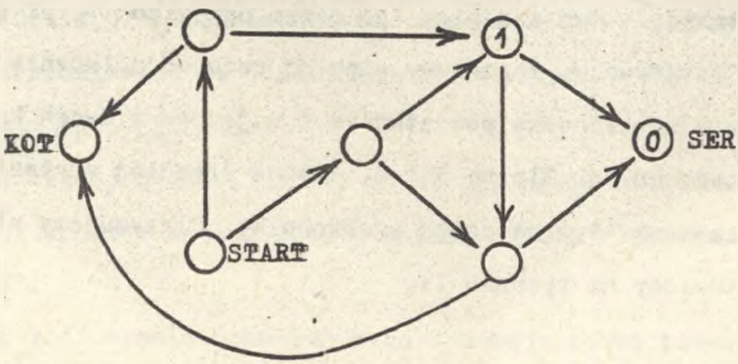
rys.10

Zadanie 7 nie należy do klasy zadań o dwóch ciągach wyników rzutu monetą, do której stosuje się opisany powyżej algorytm. Ponieważ jednak dotyczy ona błądzenia losowego po grafie możemy podjąć próbę zastosowania algorytmu do rozwiązania także i tego zadania. Tym razem odpowiedni graf gry mamy już narysowany, zaczniemy więc od razu od polecenia 3. Wpiszmy w wierzchołku początkowym i w jednym z dwóch kolejnych wierzchołków liczby 5 i 6. Zasada średniej arytmetycznej wyznacza numer 4 następnego wierzchołka. Otrzymujemy stan przedstawiony na rysunku 11.



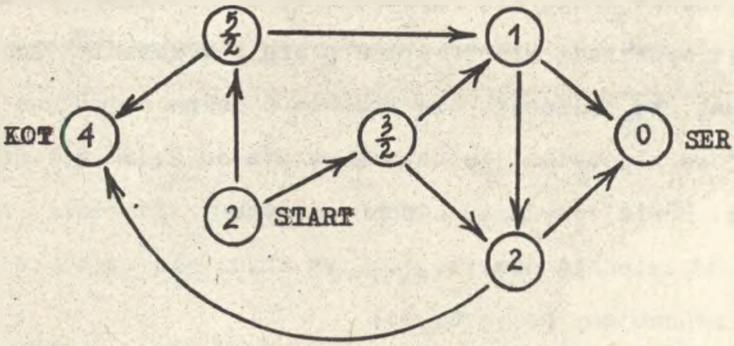
rys.11

Ale dalej już nie wiemy co robić, nie ma takiego wierzchołka na grafie, którego numer wynikałby z samej tylko zasady średniej arytmetycznej oraz aktualnej numeracji. Algorytm do tego zadania nie stosuje się. Ale i na to zadanie można znaleźć "sposób" oparty na podobnej idei co algorytm (pomimo, że sam algorytm rozwiązania nie daje). Spróbujmy zacząć numerację wierzchołków od końca. Wpiszmy liczby 0 i 1 w wierzchołkach grafu, tak jak na rysunku 12.



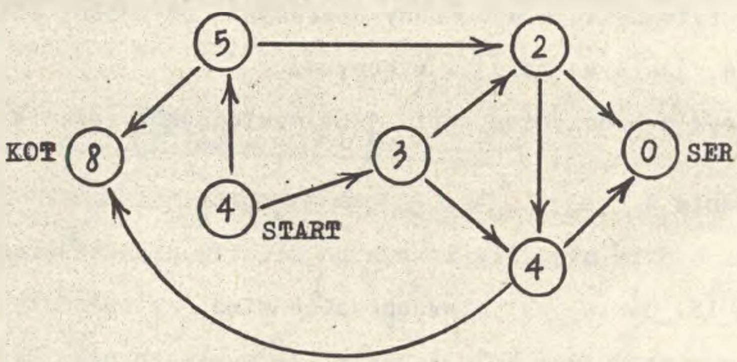
rys.12

Teraz już zasada średniej arytmetycznej jednoznacznie wskazuje liczby, które należy wpisać we wszystkich pozostałych wierzchołkach.



rys.13

Niektóre liczby w wierzchołkach są ułamkowe. Możemy przyjąć, że stawką w grze może być $\frac{1}{2}$ dolara, możemy też pomnożyć wszystkie liczby w wierzchołkach przez dwa.



rys.14

Otrzymujemy graf gry, którą zaczynamy mając 4 dolary, a kończymy mając 8 dolarów (wygrana) albo 0 dolarów (przegrana).

$$P(SER) = P(KOT) = \frac{1}{2}.$$

Porównajmy rozwiązania zadań 7 i 6. Można powiedzieć, że oba te zadania dadzą się rozwiązać tą samą metodą, przez odpowiednią numerację wierzchołków grafu i wykazanie izomorfizmu z pewną grą dolarową. Ale zadanie 6 można rozwiązać "bezmyślnie" wg algorytmu. Ten sam algorytm do zadania 7 nie stosuje się. Musieliśmy mieć trochę sprytu i szczęścia, żeby znaleźć odpowiednią numerację. Czym różni się metoda od algorytmu? Proponujemy przyjąć, że:

-Metoda określa pewne cele lokalne, do których będziemy zmierzać, aby osiągnąć cel globalny, nie dyktuje operacji czynności elementarnych, które należy wykonać, aby kolejno osiągnąć te lokalne cele a w konsekwencji również cel globalny .

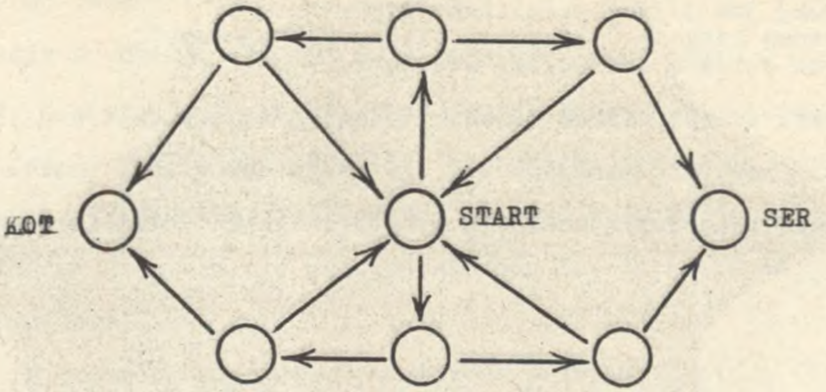
-Algorytm dyktuje wykonawcy operacje - czynności elementarne, jakie ma kolejno wykonywać .

Dobrym zakończeniem serii jest następujące zadanie.

Zadanie 8.

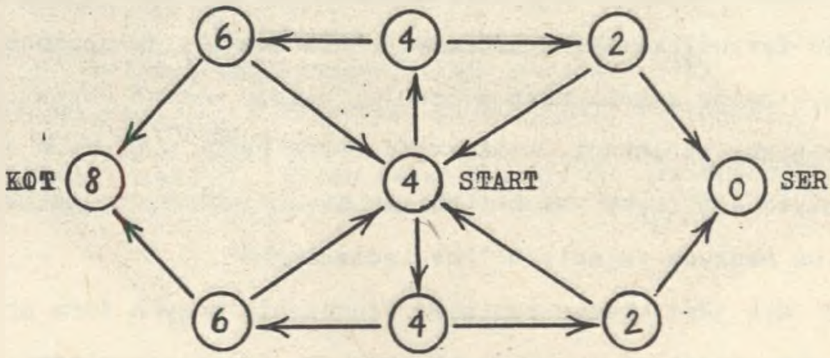
Mysz będzie błądziła losowo po planszy przedstawionej na rysunku 15. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zakończy błądzenie w wierzchołku KOT, a jakie, że w wierzchołku SER?

Gdybyśmy i tym razem chcieli szukać takich dwóch wierzchołków, których numeracja i zasada średniej arytmetycznej wymusza numerację wszystkich pozostałych wierzchołków, to spotka nas rozczarowanie, ponieważ takich wierzchołków nie ma.



rys.15

Widać jednak z symetrii planszy, że musi być: $P(KOT)=P(SER)=\frac{1}{2}$. Wiedząc o tym, możemy potwierdzić słuszność odpowiedzi, odwołując się do odpowiedniej gry dolarowej. Jeśli np. w wierzchołkach START i SER wpiszemy liczby 4 i 0, to w wierzchołku końcowym KOT powinna być liczba 8. Ponumerujmy wszystkie pozostałe wierzchołki zgodnie z zasadą średniej arytmetycznej i sprawdzimy, czy wszystko się zgadza.



rys.16

Mamy, jak widać, trzy różne stany 4:
jeden pasywny - stawiamy stawkę 0, "czekamy",
dwa aktywne - stawiamy stawkę 2.

Jest to oczywiście również dobry graf gry dolarowej. Dzięki niemu przekonujemy się, że nasza odpowiedź, oparta na być może zwodniczym poczuciu symetrii, jest istotnie prawidłowa.

5. UWAGI KOŃCOWE .

1. Zajęcia, które opisaliśmy, miały na celu sprawdzenie naszych pomysłów ożywienia lekcji z rachunku prawdopodobieństwa i wzbogacenia ich o ważne i różnorodne aktywności matematyczne. Uważamy, że eksperyment udał się, ponieważ nasi uczniowie, tak jak spodziewaliśmy się, istotnie byli bardzo aktywni, była to aktywność bardzo różnorodna i naszym zdaniem kształcąca. Zajęcia, nie były jednak lekcjami i można tu postawić zarzut, że nasze propozycje nie zostały sprawdzone do końca. Aby je zrealizować w szkole, należy wybrać odpowiednie formy pracy na lekcji. Wybierając formę pracy w grupach 3-4 - osobowych stworzymy warunki bardzo podobne do tych, jakie były na naszych zajęciach "doświadczalnych".

2. Nie jest naszym zamiarem lansowanie nowych form pracy i nowych zagadnień na lekcjach rachunku prawdopodobieństwa kosztem elementów wiedzy matematycznej, naszym zdaniem już nie potrzebnych. W szczególności nie chodzi nam o to, aby

usunąć twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym z programu szkoły średniej, chociaż pojawiają się takie głosy - skoro mamy drzewa, to po co nam jeszcze twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym. Uważamy, że reforma nauczania probabilistyki w szkole średniej powinna polegać głównie na zmianie metod nauczania a nie zakresu wiadomości, jakie uczeń ma wynieść ze szkoły.

W pytaniu, czy należy kształcić przez matematykę, czy uczyć matematyki, tkwi naszym zdaniem jedna z wielu fałszywych dychotomii.

LITERATURA

[1] Engel A., Abak probabilistyczny, Matematyka 3 (1976).

[2] Klakla M., Treliński G., Jeszcze o rozwiązaniach pewnego zadania, Matematyka 1 (1977).

[3] Kubik L., Doświadczenia losowe o losowej liczbie etapów, Matematyka 2 (1976).

[4] Piaget J., Równoważenie struktur poznawczych, Biblioteka psychologii współczesnej, PWN, Warszawa 1981.

[5] Reykowski J., Z zagadnień psychologii motywacji, PZWS, Warszawa 1970.

[6] Słowikowski S., Zbiór zadań z rachunku prawdopodobieństwa dla szkół średnich, WSiP, Warszawa 1976.