BOGUSŁAWA WEŁNA

O pewnych funkcjach zadań probabilistycznych w nauczaniu matematyki

1. WPROWADZENIE

W ostatnich latach nauczanie rachunku prawdopodobieństwa, ze względu na swoją specyfikę, stało się przedmiotem szczególnego zainteresowania dydaktyki matematyki. Wraz z pojawieniem się różnych koncepcji nauczania tej dyscypliny powstała potrzeba określania podstawowych celów nauczania probabilistyki i analizowania w ich kontekście zadań probabilistycznych.

Prezentowana w niniejszej pracy analiza zadań dotyczy koncepcji nauczania rachunku prawdopodobieństwa w szkole średniej, wypracowanej w trakcie seminarium z dydaktyki rachunku prawdopodobieństwa w Wyższej Szkole Pedagogicznej w Krakowie.

Zasadniczym kryterium dla przedstawionej analizy, zgodnie ze zdobyczami funkcjonalizmu jest funkcja zadań probabilistycznych w nauczaniu matematyki i w kształceniu ogólnym. Naczelnym zaś założeniem jest pogląd, że "rozwiązywanie problemów należy traktować jako najważniejszy dla szkoły rodzaj aktywności, w ramach której powinny organizować się nabyte wiadomości" ([39]).

Przeprowadzając analizę zadań probabilistycznych powołano się na:

1. Pewne ogólne wiadomości z pedagogiki i psychologii ([21], [39], [10]);

2. Teorię rozwiązywania problemów, ze szczególnym uwzględnieniem rodzaju zdolności intelektualnych warunkujących efektywność rozwiązywania problemów ([11], [10], [6]);

3. Typologię zadań matematycznych ([13]).

Zadania matematyczne (probabilistyczne) mogą pełnić różne funkcje w zależności od wielu czynników, z których najważniejszymi są: cele jakie chce się osiągnąć, koncepcja nauczania, moment (ogniwo procesu dydaktycznego), w którym dane problemy są rozwiązywane oraz sposób ich wykorzystania, jak też etap kształtowania pojęć, których zadania dotyczą.

Z tego powodu szczegółową analizę (4) poprzedza krótka charakterystyka ogólnych funkcji zadań matematycznych (2) oraz krótki zarys wspomnianej koncepcji nauczania rachunku prawdopodobieństwa (3). Analiza funkcji zadań probabilistycznych na tle głównych założeń koncepcji nauczania tej dyscypliny, w porównaniu z ogólną analizą funkcji zadań matematycznych, pozwoli łatwiej uwypuklić te funkcje, które są wspólne dla nauczania różnych działów matematyki oraz te, które wynikają ze specyfiki danej gałęzi. Świadomość różnorodnych funkcji, jakie zadania mogą pełnić jest konieczna przy wyborze zadań dla realizacji poszczególnych celów nauczania.

Na prezentowaną analizę i wybór zadań znaczny wpływ miały obserwacje poczynione w trakcie prowadzenia zajęć z rachunku prawdopodobieństwa w liceum w roku szkolnym 1981/82.

2. FUNKCJE ZADAŃ MATEMATYCZNYCH

Rozwiązywanie zadań matematycznych to jeden z głównych środków, przy pomocy których nauczyciel realizuje cele kształcenia matematycznego, a w konsekwencji i kształcenia ogólnego. Każde zadanie rozpatrywać należałoby zatem w dwóch podporządkowanych sobie aspektach:

1) *węższym* dotyczącym samej matematyki i tego, w jakim stopniu dane zadanie przyczynia się do ukształtowania właściwego obrazu tej dyscypliny w umyśle ucznia;

2) *szerszym* związanym z wpływem zadania na wszechstronny rozwój ucznia i przygotowanie go do skutecznej działalności indywidualnej włączonej w ramy szerszej działalności gospodarczej, społecznej i kulturowej.

Podstawę wyróżnienia różnych funkcji zadań matematycznych stanowi następujący schemat:

(A)
$$U \leftrightarrows X \leftrightarrows Y \leftrightarrows F$$

gdzie U oznacza ucznia, X cele kształcenia ogólnego, Y cele szczegółowe (cele nauczania matematyki) i F funkcje zadań.

Czynnikiem pośredniczącym między Y a F mogą być na przykład ogniwa procesu nauczania O. Wtedy schemat jest następujący:

(B) $U \leftrightarrows X \leftrightarrows Y \leftrightarrows O \leftrightarrows F$.

Przyjęto następujące cele kształcenia ogólnego ([21]).

I. Wyposażenie ucznia w usystematyzowaną wiedzę;

II. Przekształcanie tej wiedzy w szereg aktywności i umiejętności stosowania wiedzy;

III. Rozwijanie zdolności poznawczych i zainteresowań;

IV. Kształtowanie postaw naukowego poglądu na świat;

V. Zagwarantowanie wszechstronności rozwoju osobowości ucznia;

VI. Przygotowanie do samokształcenia.

Uwzględniono trzy główne cele nauczania matematyki (według programu z roku 1966 z interpretacją podaną w [12]):

1. Opanowanie przez ucznia podstawowych wiadomości z matematyki w ich nowoczesnym ujęciu;
2. Wyrobienie umiejętności posługiwania się metodami matematycznymi, a także zapoznanie z zastosowaniem tych metod w innych dziedzinach;
3. Kształcenie logicznego myślenia i umiejętności ścisłego wyrażania myśli przy użyciu symboli i pojęć matematycznych.

Przyjmując schemat (A) wyróżnić można następujące funkcje zadań:

a) funkcję poznawczą - zadania dostarczają uczniowi nowych informacji i spostrzeżeń:

b) funkcję kształcącą - zadania rozwijają myślenie, wyobraźnię i intuicje ucznia, kształtują zdolności i ogólne postawy intelektualne ucznia np. "wrażliwość na problemy", postawę otwartą wobec problemu, szukanie heurystyk, dokonywanie refleksji "a posteriori" na temat rozwiązanego problemu;

c) funkcję metodologiczną - zadania wprowadzają ucznia w metodę matematyczną;

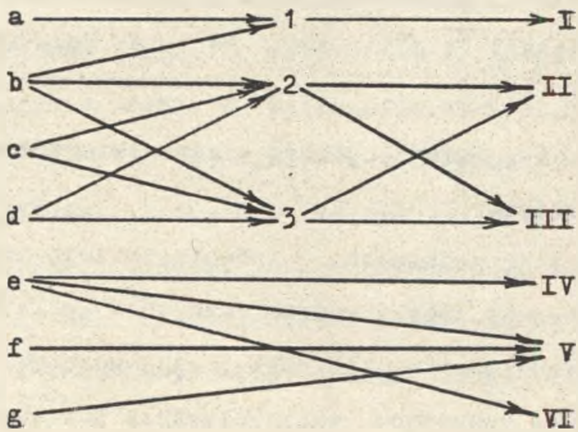
d) funkcję praktyczną - zadania ukazują uczniowi praktyczne zastosowanie teorii matematycznych w życiu codziennym i innych dziedzinach nauki, dostarczają uczniowi pewnych reguł postępowania, sposobów wykorzystywania poznanych wiadomości teoretycznych w praktyce i w nowych sytuacjach oraz schematów różnych heurystyk;

e) funkcję samokształceniową - zadania zmuszają ucznia do stawiania sobie pytań i poleceń oraz poszukiwania odpowiedzi na nie, wyzwalają chęć zgłębiania wiadomości oraz ciekawość poznawczą;

f) funkcję wychowawczą - zadania uczą krytycyzmu, samokontroli, kształtują postawy zachowania (np. nie załamywania się w przypadku napotkania trudności, szukanie dróg wyjścia, postawę "refleksyjną" w wyniku analizowania popełnionych błędów i formułowania wniosków na przyszłość);

g) funkcję estetyczną - zadania mogą wywołać różnego rodzaju emocje, pożądane uczucia estetyki, harmonii, piękna, zadowolenia, radości z odkrycia problemu czy pokonania trudności.

Poniżej zilustrowano związki zachodzące między tymi funkcjami zadań, a wymienionymi celami nauczania matematyki i kształcenia ogólnego.



rys.1

Symbol "x ⟶ y", oznacza relację "x realizuje cel y". Dla przejrzystości rysunku pominięto strzałki, które wynikają z faktu, że relacja jest przechodnia.

Uwzględniając w schemacie (B) następujące ogniwa procesu nauczania ([21]):

1) uświadomienie celów nauczania;

2) zaznajamianie ucznia z nowym materiałem;

3) kierowanie procesami uogólniania opanowanych pojęć, sądów poprzez odpowiednie myślenie i rozwiązywanie problemów;

4) utrwalanie materiału;

5) kształtowanie umiejętności, nawyków i przyzwyczajeń;

6) wiązanie teorii z praktyką;

7) kontrola i ocena wyników;

otrzymano poniższą charakterystykę funkcji:

a) funkcję motywacyjną - zadania mogą być motywacją dla wprowadzenia pojęć, definicji, teorii czy rozwiązywania innych zadań, wzbudzać chęć i zainteresowanie uczeniem się i nauczaniem;

b) funkcję wprowadzającą - zadania wprowadzają nowe pojęcia, definicje czy twierdzenia;

c) funkcję uogólniającą - zadania prowadzą do uogólniania niektórych pojęć, twierdzeń czy sądów;

d) funkcję syntetyzująco-systematyzującą, integrującą i utrwalającą - zadania służą utrwalaniu przerobionego materiału,dokonują syntezy, systematyzują i integrują poznane wiadomości;

e) funkcję ćwiczeniowo-algorytmizującą - zadania służą kształtowaniu pewnych umiejętności i sprawności algorytmicznych;

f) funkcję praktyczną - zadania ukazują praktyczne zastosowania;

g) funkcję kontrolującą i samokontrolującą - zadania stanowią środek kontroli i oceny wyników nauczania i uczenia się.

Z powyższych rozważań należy wyciągnąć praktyczny wniosek: zestaw zadań powinien być tak dobrany, aby łącznie zadania spełniały wszystkie wymienione funkcje.

"Uczeń tworzy sobie taką koncepcję matematyki, jaka ukazuje mu się przez pryzmat rozwiązywanych zadań" ([13]).

Aby uchwycić istotę matematyki, jej strukturę i specyficzne metody, nie wystarczy przyswoić sobie w gotowej formie najważniejsze definicje i twierdzenia. Uczeń musi w działaniu uświadomić sobie różne elementy metody matematycznej. W [14] nazywa się te elementy komponentami aktywności matematycznej. Oto główne z nich: dostrzeganie analogii i jej wykorzystywanie (np. w procesach generalizacji i dokonywaniu transferu), schematyzowanie, kodowanie i symbolizowanie, dedukowanie i redukowanie, definiowanie i racjonalne używanie definicji, interpretowanie definicji, pojęć i twierdzeń w różnych modelach, formułowanie i weryfikowanie hipotez.

"Rozwiązywanie zadań nie powinno być celem pracy ucznia i nauczyciela, powinno być środkiem, którego stosowanie rozwija aktywność matematyczną" ([16]).

3. GŁÓWNE ZAŁOŻENIA KONCEPCJI NAUCZANIA PROBABILISTYKI I ETAPY KSZTAŁTOWANIA POJĘCIA PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Charakter zadań probabilistycznych oraz ściśle z nim związany sposób ich wykorzystywania jest uzależniony od ogólnej koncepcji nauczania tej dyscypliny. Celowym wydaje się przypomnienie głównych założeń koncepcji, w ramach której omawiane są w tym artykule zadania probabilistyczne.*)

*) Przegląd głównych koncepcji nauczania teorii prawdopodobieństwa w historycznym ujęciu znajduje się w [22].

Założenie pierwsze: (porównaj [25], str.B-43 oraz [28]): Pojęcie prawdopodobieństwa należy wprowadzać w jak najszerszym zakresie uwzględniając jego różne aspekty, wynikające z jego rozwoju historycznego i matematycznej struktury tego pojęcia, a więc aspekt częstościowy, klasyczny i mnogościowo-miarowy z uwypukleniem tego ostatniego jako rezultatu matematyzacji konkretnych sytuacji i obserwacji. Te różne aspekty z formalnego punktu widzenia są różnymi interpretacjami tego samego pojęcia w różnych modelach.

Założenie drugie: Punktem wyjścia do sformułowania aksjomatycznej definicji prawdopodobieństwa jest rzeczywistość (konkretne sytuacje i ujawnione na ich tle relacje ilościowe i jakościowe). Postępujemy wówczas zgodnie z naturalnym tokiem nauczania przemierzając drogę od konkretnej sytuacji do pewnych pojęć matematycznych (patrz hasło "nauczanie genetyczne" [27]).

Założenie trzecie: Nauka o prawdopodobieństwie ma być przykładem nie tylko formalnej teorii matematycznej, ale przykładem b u d o w a n i a tej teorii opartej na procesach matematyzacji, schematyzacji konkretnych sytuacji oraz na różnych interpretacjach pojęcia prawdopodobieństwa dostarczających różnych intuicji. W przypadku formalnie wysnutych wniosków "nauka o prawdopodobieństwie" ma uczyć ich interpretacji w różnych modelach. (Porównaj [25], cele 5,6,7,8,9,10,16).

Założenie czwarte (patrz [24]): Nauka o prawdopodobieństwie ma być przykładem zastosowania innych teorii matematycznych do jej budowania (np. teorii mnogości, miary, funkcji, granic itd.)

Założenie piąte: Nauka o prawdopodobieństwie ma ukazywać liczne zastosowania teorii probabilistycznej i innych teorii matematycznych w życiu codziennym, w innych naukach konkretnych (jak w przyrodoznawstwie, ekonomii, technice) oraz w naukach abstrakcyjnych (w teoriach cybernetyki np. statystyki, gier, decyzji). (Porównaj z celem 14 w [25]). Pamiętać należy, że "rozwijająca wartość matematyki wypływa nie tylko z właściwej jej metody badania, ale również z olbrzymiego obszaru jej zastosowania" ([19] str.122). Ze względu na złożoność konkretnych zastosowań trzeba je pokazywać na przykładach odpowiednio przystosowanych do poziomu nauczania (znany problem symulacji dydaktycznych [13], str.72).

Założenie szóste: Nauka o prawdopodobieństwie ma uczyć myślenia probabilistycznego, podkreślając jego specyfikę i odrębność ([25], §1). Ten rodzaj myślenia odgrywa coraz większą rolę w działalności człowieka w szybko zmieniającej się rzeczywistości. Wzrasta ilość sytuacji, w których człowiek musi działać na podstawie wiadomości niepewnych, pomieszanych z fałszywymi, mających różny stopień prawdopodobieństwa. Potrzeba zmniejszania niepewności poszczególnych wiadomości jest szczególnie ważna dla przewidywania przyszłości ([39], str.48). Często w praktyce stosuje się pojęcia wyrażające niepewność źle je interpretując, co w konsekwencji prowadzi do nieuzasadnionych i zniekształconych wyników ([3], str.149).

W ramach myślenia probabilistycznego należy więc:

- uczyć formułowania hipotez i sprawdzania ich, przy równoczesnym zachowaniu ostrożności w ich formułowani i weryfikowaniu (w [1] nazywa się to rozsądnym zagadywaniem);

- kształtować intuicje probabilistyczne, które są istotne i specyficzne dla tego myślenia;

- uczyć organizacji wszystkich dostępnych informacji i przeprowadzania prób oraz ich wykorzystywania np. dla osiągnięcia lepszych podstaw do formułowania swojej hipotezy i oszacowywania prawdopodobieństw różnych zdarzeń (problem marnowania informacji [11], str.91).

Przy powyższych założeniach proces kształtowania pojęcia prawdopodobieństwa dzieli się na cztery etapy.

Etap wstępny. Na tym etapie kształtuje się wstępne intuicje*), związane ze specyficznymi pojęciami i elementarnymi twierdzeniami teorii prawdopodobieństwa, bazujące na potocznym rozumieniu słowa "prawdopodobieństwo" jako liczba-miara szansy zajścia zdarzenia. Etap ten stanowi motywację do wprowadzenia matematycznego pojęcia prawdopodobieństwa oraz innych pojęć i twierdzeń tej teorii. Jest on intuicyjnym wprowadzeniem do przyszłej definicji aksjomatycznej. Na tym etapie uczeń dokonuje wstępnych spostrzeżeń i obserwacji.

Etap drugi (definicyjny). Definiuje się tu aksjomatycznie pojęcie prawdopodobieństwa. Przez aksjomatyczne definiowanie pojęcia rozumieć będziemy proces obserwacji pewnych modeli pojęcia, schematyzowanie spostrzeżeń (sformułowanie definicji),

---

*) Wstępne intuicje należy odróżnić od właściwych intuicji probabilistycznych w znaczeniu intuicji przedłużonych ([12], str.132, 134).

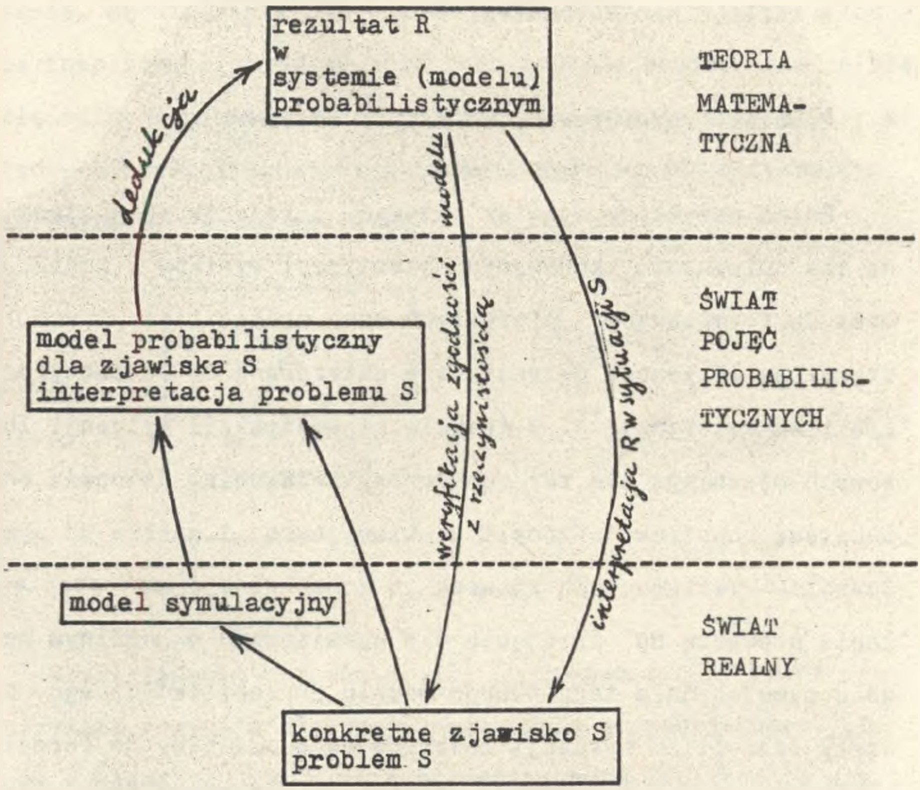
przejście do innych modeli tego samego pojęcia i oderwanie się od interpretacji. W przypadku prawdopodobieństwa obserwowanymi mogą być modele: częstościowy, klasyczny i miarowy. Etap ten ma charakter metodologiczny. Uczy definiowania aksjomatycznego.

Etap trzeci (rozwijanie teorii)* . Istotą tego etapu jest to, że do nowych twierdzeń i pojęć probabilistycznych dochodzi się dwiema różnymi drogami. Pierwszą z nich jest droga od obserwacji prawdopodobieństwa przy jego konkretnej interpretacji do sformułowania w przyjętej terminologii definicji czy twierdzenia oraz przeprowadzenia formalnego jego dowodu. Drugą jest droga dedukcyjna poprzez kolejno wyciągane wnioski z twierdzeń poprzednio udowodnionych oraz przyjętych definicji, do podania konkretnej interpretacji. Etap ten, podobnie jak poprzedni, ma charakter metodologiczny.

Etap czwarty (stosowanie teorii). Na tym etapie pokazuje się konkretne zastosowania teorii prawdopodobieństwa na poziomie dostosowanym do możliwości intelektualnych uczniów. Schemat procesu ilustruje rys.2.
(Porównaj [38], str.35 oraz [27], str.B-61).

---

* Etap ten sprzyja rozumieniu prawdopodobieństwa na poziomie uogólnienia ([2],str.49).



rys.2

Uwaga: Etapu wstępnego nie należy utożsamiać z etapem propedeutycznym. Jednakże, ze względu na specyfikę rachunku prawdopodobieństwa etap wstępny powinien zawierać wiele elementów etapu propedeutycznego. Etap wstępny powinien być raczej procesem porządkowania i wiązania ze sobą pierwszych intuicji, spostrzeżeń i wniosków prowadzących do sformułowania (na kolejnym etapie) aksjomatycznej definicji prawdopodobieństwa.

4. ANALIZA WYBRANYCH ZADAŃ POD KĄTEM ICH FUNKCJI W KSZTAŁCENIU MATEMATYCZNYM

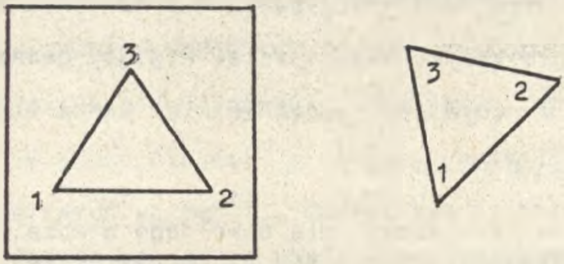
4.1 Problemy rozwiązywane na etapie wstępnym

Różne przykłady zjawisk losowych i zadania polegające na ich opisywaniu, kodowaniu przestrzeni wyników i zdarzeń oraz na formułowaniu pierwszych ocen probabilistycznych, stymulują aktywność matematyczną skierowaną na matematyzację i schematyzację* . W trakcie schematyzacji sytuacji losowych ujawniają się różnego rodzaju analogie. Stanowią one podstawę konstrukcji modeli symulacyjnych i grafów do symulowania przebiegu tych zjawisk. W konsekwencji odkryte analogie prowadzą do przyjęcia dla doświadczeń o wspólnym modelu symulacyjnym tego samego modelu probabilistycznego. Odkryty izomorfizm sytuacji losowych daje podstawy do formułowania odpowiednich wniosków. Takie spostrzeżenia i wnioski są istotne nie tylko dla procesu matematyzacji i dla rozumienia specyficznego charakteru probabilistyki. W sensie ogólniejszym sprzyjają one rozwijaniu zdolności dostrzegania "subtelnych" stosunków, niezbędnej w analizie sytuacji problemowej ([10],str.161). Za interesujący z punktu widzenia dydaktyki uznano taki zestaw przykładów doświadczeń losowych, które pomimo zewnętrznego podobieństwa nie posiadają wspól-

---

* Proces matematyzacji na etapie propedeutycznym i rolę konkretnej czynności w tym procesie obszernie opisano w [30].

nego modelu probabilistycznego, lub z pozoru niepodobne do siebie, są wzajemnie dla siebie modelami symulacyjnymi. Zadania inspirujące do odkrywania tego rodzaju podobieństw pełnią rolę metodologiczną. Z drugiej strony uświadomienie sobie błędnych analogii uczy krytycyzmu i ostrożnośći w formułowaniu wniosków. A oto przykłady:



rys.3

Gry i zadania opisane w [40] (przykład 1 i 2) można wykorzystać w szkole średniej, nieznacznie je modyfikując. Losowe nakładanie trójkąta o ponumerowanych obustronnie wierzchołkach na namalowany trójkąt (losowe tu w znaczeniu, że każda pozycja trójkąta jest jednakowo prawdopodobna) może stać się punktem wyjścia do innych schematów doświadczalnych, np.: rozmieszczanie 3 ponumerowanych kul w 3 "małych szufladach"; trzykrotne losowanie kuli bez zwracania z urny, w której znajdują się 3 rozróżnialne kule; klasyczny problem "roztargnionej sekretarki".

Przy uogólnianiu wniosków na przypadek n=4 okazuje się, że losowe nakładanie kwadratu nie ma już takiego samego modelu probabilistycznego jak odpowiedniki pozostałych doświadczeń. Niektóre wnioski dotyczące zdarzeń dla n=4 nie będą już analogiczne jak dla przypadku n=3. Podobieństwo jest tutaj zasugerowane sytuacją. Zarówno bowiem "losowe nakładanie trójkątów" jak i "losowe nakładanie kwadratów" jest realizowane przy pomocy doświadczeń, które nie zmieniły się w swej istocie przy przejściu z przypadku n=3 na n=4. Dla kwadratu sytuacja uległa radykalnej zmianie. Względy geometryczne spowodowały, że w nowym doświadczeniu nie każda ilość skojarzeń jest p r a w d o p o d o b n a .

Uwaga: Problem "skojarzeń" dla dowolnego n może okazać się interesujący ze względu na bogaty aparat matematyczny, stosowany przy rozwiązaniu zadania.

Następujące polecenia i pytania stwarzają naturalną okazję do odkrywania doświadczeń losowych z pozoru niepodobnych do siebie, a posiadających ten sam model probabilistyczny:

"Zginęła Ci kostka sześcienna do gry, a chciałbyś zagrać w chińczyka. Masz przy sobie tablicę liczb losowych. Jak symulować za ich pomocą rzut kostką sześcienną?

Przypuśćmy, że chcemy zagrać w orła i reszkę, ale nie mamy ani grosza. Jak wybrnąć z tej sytuacji?

Jak w sposób sprawiedliwy, dając każdemu jednakową szansę, wylosować jeden spośród n elementów, mając do dyspozycji monetę, kostkę, inny przyrząd losujący? Który z przyrządów wybrałbyś do takiego losowania, jeśli n będzie równe 7,24,33 itd.?" ([24], str.157).

Powyższe pytania są inspiracją do konstruowania różnych generatorów takich samych rozkładów prawdopodobieństwa na danym zbiorze, co jest niezbędne w kształtowaniu pojęcia modelu probabilistycznego jako ogólnej struktury wspólnego schematu dla różnych doświadczeń losowych. Rozwiązywanie tego rodzaju zadań pobudza wyobraźnię ucznia i prowadzi do wysuwania przez niego nowych pomysłów, jakościowo różnych sposobów wykorzystywania przyrządów losujących. Ogólniej, zadania te przełamują "sztywność" myślenia, rozwijając zarazem jego "giętkość", w szczególności "giętkość adaptacyjną"* oraz "redefinicję semantyczną"**. Dzięki tym pytaniom powstają nowe analogiczne zadania. W czasie lekcji prowadzonej przez autorkę ostatnie z wymienionych pytań stało się bodźcem do szerokiej dyskusji i argumentacji za poprawnością konkretnych propozycji, które często okazywały się błędne. Naturalnym przedłużeniem powyższego problemu jest zadanie:

Jak z populacji n elementowej (n jest dostatecznie duże) w sposób nie tendencyjny losować próbkę?

Motywacji do jego rozwiązania może dostarczyć zagadnienie statystycznej kontroli jakości ([24], str.58).

---

* W [10] "giętkością adaptacyjną" nazywa się zdolność wytwarzania jakościowo różnych wyników, umożliwiającą zmianę kierunku poszukiwań.

** "Redefinicją semantyczną" nazywa się w [10] taką zdolność, dzięki której łatwo zmienić dotychczasową funkcję przedmiotu lub jego części.

Przy opisywaniu różnych doświadczeń, zdarzeń i ich kodowaniu, a także przy pierwszych ocenach "a priori" czy "a posteriori", uczeń posługuje się różnymi środkami graficznymi (tabele, grafy, drzewa, układ współrzędnych itp.) i wykorzystuje wiadomości z innych dyscyplin matematycznych. Zatem zadania te pełnią także rolę integrującą, utrwalającą oraz, ze względu na nowe informacje dla ucznia, funkcję poznawczą.

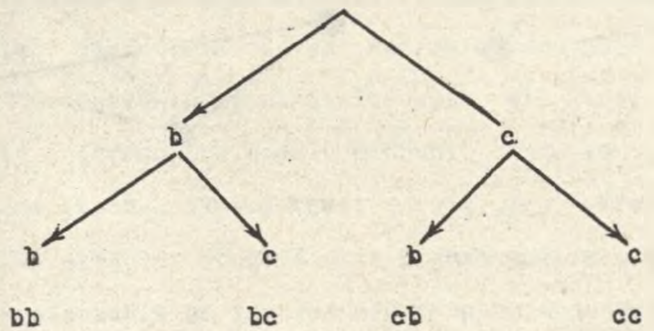
Nie są to jakby się z pozoru wydawało zwykłe zadania-ćwiczenia (w znaczeniu [13], str.20). Mogą one prowadzić do różnych sposobów opisywania tych samych doświadczeń losowych w zależności od uczynionych założeń oraz punktu naszej obserwacji (sposobu widzenia zjawiska).

Rozważmy dwukrotne losowanie kuli bez zwracania z urny, w której znajdują się 3 kule białe i 1 czarna.

Oto różne sposoby opisywania przestrzeni wyników tego doświadczenia: $\Omega_1 = \{(2,0),(1,1)\}$, gdzie pierwszy element pary oznacza ilość kul białych, drugi - czarnych, i $\Omega_2 = \{bb, bc, cb\}$. W pierwszym przypadku obserwowano, czy wylosowane kule są tego samego koloru, w drugim: jakiego koloru kulę wylosowano za każdym razem. Z daną sytuacją losową związane jest następujące zadanie:

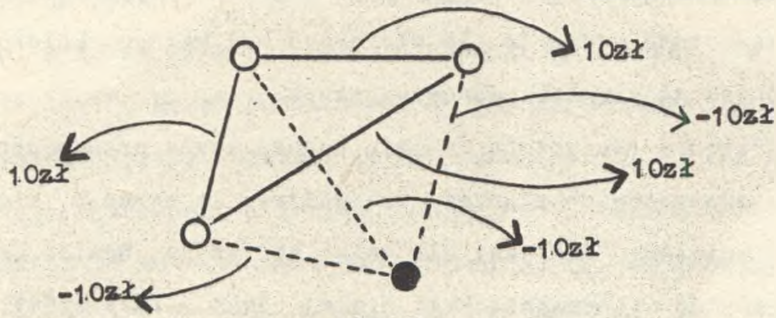
Wyobraź sobie, że ktoś zaproponował ci grę: Będziesz losować dwukrotnie kulę bez zwracania z urny, w której są 3 białe i 1 czarna. Wygrasz 10 zł jeżeli wylosujesz kule tego samego koloru, w przeciwnym razie, ty wpłacasz do banku taką kwotę. Czy przystąpiłbyś do takiej gry? Gdybyś miał wpływ na zawartość urny, to ile włożyłbyś kul każdego koloru, aby mieć jak największą szansę wygrania?

Pytania prowokują do intuicyjnej oceny prawdopodobieństwa odpowiednich zdarzeń. Przypuśćmy, że uczeń U_1 sformułował wniosek: "Gra jest dla mnie korzystna, bowiem prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest 3 razy większe niż czarnej, zatem łatwiej jest wylosować dwie kule białe", natomiast inny uczeń U_2 stwierdził: "Nie opłaca mi się grać, ponieważ częściej stracę, niż wygram". Obaj sądzą, że gra będzie sprawiedliwa, jeżeli w urnie będzie po dwie kule z każdego koloru. Uczeń U_2 argumentuje ten sąd rysunkiem 4.

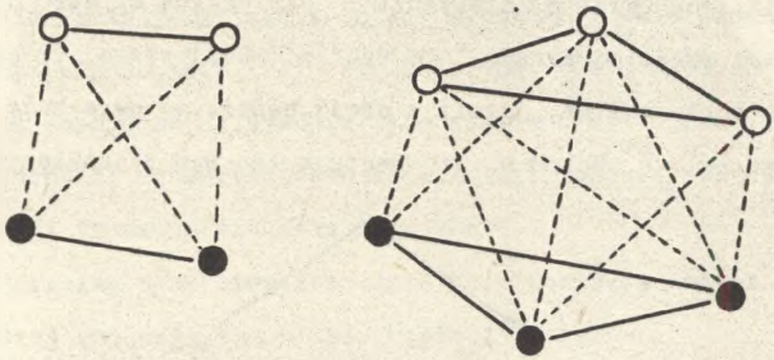


rys.4

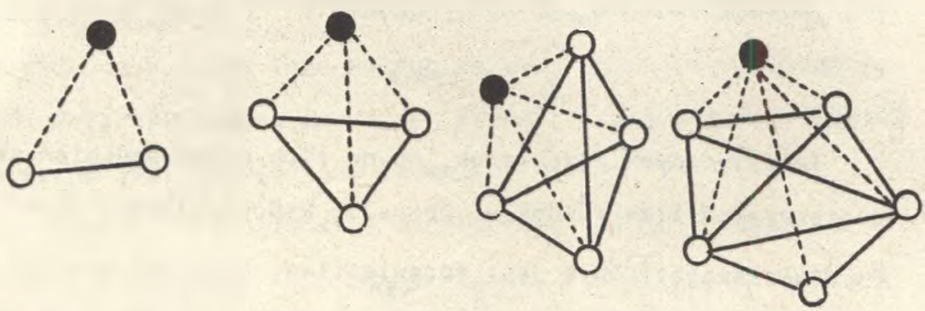
Teoretycznych przesłanek, co do tych prawdopodobieństw, dostarcza analiza rysunkowa pomysłu, który podsunął uczeń U_3 stwierdzając: "Gra jest sprawiedliwa. Aby mieć większą pewność wygranej może zmieniłbym skład urny. Jednak bez rysunku trudno jest mi ocenić, czy zwiększać, czy zmniejszać ilość kul". Uczeń U_3 tak opisał doświadczenie rysunkiem 5.



rys.5



rys.6



rys.7

Schematy graficzne (rys.6,7) mogą prowadzić do uogólniania sądów i postawienia hipotez, które będzie można zweryfikować (np. zawsze przy jednakowej ilości kul obu rodzajów prawdopodobieństwo wylosowania kul tych samych kolorów jest mniejsze od prawdopodobieństwa wylosowania kul różnych kolorów). W dalszej części artykułu (4.3.2) zostanie pokazane, do jak interesujących problemów natury matematycznej prowadzi rozwiązanie tego zadania, oraz jak wykorzystać ten przykład do zaznajamiania uczniów z metodą heurystyczną.

4.2 Zadania rozwiązywane na etapie definicyjnym

Dla kształtowania intuicji związanych z pojęciem prawdopodobieństwa, jak również do wprowadzenia tego pojęcia niezbędne jest rozważanie sytuacji losowych, dla których jedynym źródłem informacji o modelu probabilistycznym są dane statystyczne (albo estymacja jest jedyną drogą określania tego modelu, albo też droga a priori jest możliwa, ale nie na tym etapie nauczania, gdyż uczeń nie dysponuje jeszcze wystarczającą wiedzą, np. kombinatoryczną).

Wyjściowym modelem pojęcia prawdopodobieństwa jest w prezentowanej koncepcji model częstościowy. Analiza danych empirycznych prowadzi do jakościowych ocen prawdopodobieństwa, które uwypuklają jego częstościowy aspekt. Istotne na etapie definicyjnym dla zadań, związanych z estymacją modelu probabilistycznego, jest to, aby prowadziły one do odkrywania pewnych własności częstości. Taką rolę spełnia następujące zadanie:

Paweł i Gaweł rzucają na przemian monetą, aż wypadnie reszka. Wygra ten, który wyrzuci reszkę. Gra kończy się remisem, jeżeli po czterech rzutach nie wypadnie reszka. Czy szanse obu graczy są w tej grze równe? Powtórzcie w klasie wiele razy taką grę. Obliczcie jak często wygrywał Paweł, a jak często Gaweł. ([31], str.78).

Naturalnym uogólnieniem spostrzeżeń jest sformułowanie następujących własności częstości: dla dowolnych zdarzeń A i B:

$$A \cap B = \emptyset \Longrightarrow f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$$

$$f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B) - f_n(A \cap B),$$

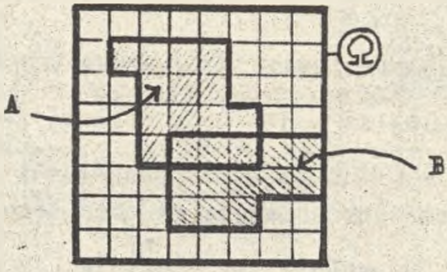
$$(A \cup B = \Omega \text{ i } A \cap B = \emptyset) \Longrightarrow f_n(A) = 1 - f_n(B).$$

Ostatnim problemem przed sformułowaniem definicji prawdopodobieństwa jest wybór niezależnych od siebie własności, z których dałoby się wydedukować pozostałe. Zadania na tym etapie pełnią rolę wprowadzającą w nowe pojęcia, uczą aksjomatyzowania oraz rozwijają rozumowanie dedukcyjne. Popularna "gra w okręty" ujawnia nowy aspekt (model prawdopodobieństwa) ([24], str.70). Uczeń odkrywa, że prawdopodobieństwo ma analogiczne własności jak pole, objętość, a w ogólności miara*

---

* Według Dyrszlaga ([2], str.64) czwarty poziom rozumienia pojęcia matematycznego to dostrzeganie wspólnej struktury różnych modeli pojęcia.

Dokonując "pojęciowego przesunięcia" ("conceptual shift" [8]*) uczeń przedstawia zdarzenia-zbiory, traktując je jako figury zawarte w kwadracie jednostkowym (rys.8).



rys.8

Ważnym etapem aksjomatycznego definiowania jest oderwanie się od konkretnych modeli pojęcia. Jeżeli uczeń zgodzi się, że prawdopodobieństwem na zbiorze S zdarzeń związanych z rzutem monetą można nazywać dowolną funkcję P określoną na S następująco:

$A \in S$	$\emptyset$	$\{o\}$	$\{r\}$	Ω
P(A)	0	p	q	1

gdzie $S = \{\emptyset, \{o\}, \{r\}, \Omega\}$, a p i q są dowolnymi liczbami nieujemnymi, spełniającymi warunek p+q=1 ([31], str.69), znaczy to, że uczeń f o r m a l n i e rozumie definicję. Umiejętność dopasowywania odpowiednich doświadczeń losowych (konstruowania przyrządów losujących) do danych rozkładów praw-

---

* Autor podaje propozycję wprowadzania pojęcia prawdopodobieństwa w klasie VI za pomocą pojęcia pola. Wyjściowym modelem jest model geometryczny.

dopodobieństwa i odwrotnie, zgodnie z konkretnymi interpretacjami pojęcia prawdopodobieństwa, świadczy o specyficznym rozumieniu tego pojęcia.

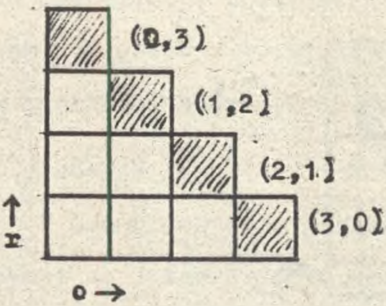
4.3 Kilka uwag o problemach rozwiązywanych na etapie rozwijania teorii

Istotną cechą odróżniającą zadania tego etapu od tradycyjnych, typu: "Udowodnij ..." jest to, że nowe twierdzenia i pojęcia odkrywane są w trakcie rozwiązywania różnego rodzaju problemów, w większości zainspirowanych przez konkretną grę losową czy praktyczne zagadnienie. Czytelnik łatwo odnajdzie w literaturze odpowiednie przykłady, dotyczące prawdopodobieństwa warunkowego, wartości oczekiwanej, schematu Bernoulliego oraz twierdzeń: klasycznego i o prawdopodobieństwie całkowitym ([23], [24], [26], [27], [32], [34]).

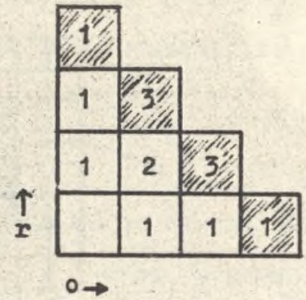
Zaletą probabilistyki jest fakt, że to samo zadanie może być wykorzystywane w nauczaniu dla osiągnięcia, na różnych etapach, różnych celów. Dla przykładu, gra z kulami opisana w 4.1 może prowadzić do odkrycia sposobu liczenia prawdopodobieństwa (twierdzenia klasycznego, czy reguły liczenia dla drzew), jak też do zdefiniowania wartości oczekiwanej.

Bodźcem do formułowania wielu nowych problemów staje się proste zadanie:

Wyznacz prawdopodobieństwa zdarzeń związanych z rzutem trzema identycznymi monetami: wypadnie więcej reszek niż orłów, wypadnie więcej orłów niż reszek, wszystkie monety upadną tą samą stroną, choć raz wypadnie orzeł lub reszka. Spróbuj te oceny uzasadnić teoretycznie.



rys.9a



rys,9b

Gra, której reguły nietrudno sformułować (rys.9a), a na tle której pojawić się może powyższe zadanie, inspiruje do konstruowania analogicznych doświadczeń, uogólnienia i wyabstrahowania wspólnej ich struktury. Nie tyle sama treść zadania, co sposób jego rozwiązywania (rys.9b) prowadzi do pojęcia schematu Bernoulliego i rozkładu dwumianowego.

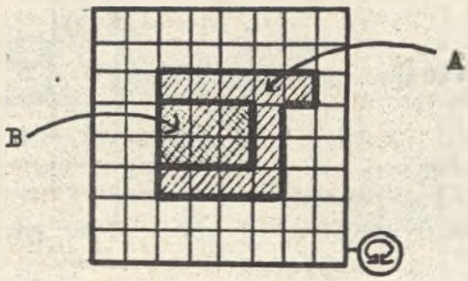
Interesujące wydają się interpretacje miarowe pojęć i twierdzeń teorii probabilistycznej. Interpretacje te mogą pomagać w rozumieniu pojęć i twierdzeń tej teorii. Mogą także sprzyjać odkrywaniu nowych twierdzeń czy też odkrywaniu idei dowodów tych twierdzeń, które są znane ze szkoły podstawowej, bądź sformułowane w drodze rozwiązywania innych zadań, a które należy zalegalizować w budowanej teorii. Np. interpretacja geometryczna prawdopodobieństwa warunkowego (rys.8).

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ – prawdopodobieństwo warunkowe, jako procent powierzchni B, pokrytej przez A;

$(P(B) > 0)$

oraz interpretacje twierdzeń:

o prawdopodobieństwie warunkowym (rys.10)



rys.10

$$(P(B) > 0 \wedge B \subset A) \Longrightarrow P(A|B) = 1$$

o prawdopodobieństwie sumy trzech zdarzeń,

o prawdopodobieństwie całkowitym.

4.4 Zadania rozwiązywane na etapie stosowania teorii

4.4.1 Rozwiązywanie zadań probabilistycznych jako element wprowadzania ucznia w metodę heurystyczną

Interesujące dla kształcenia umiejętności rozwiązywania problemów są zadania, które tworząc pewien cykl, pozwalają - dzięki analogiom i skojarzeniom co do metody czy opisania sytuacji - rozwiązać z pozoru odległe i różne zagadnienia. Zadania te pełnią funkcję samokształceniową, wskazują, jak należy zdobywać samemu wiedzę, nie poprzez kumulowanie poszczególnych informacji, ale poprzez odpowiednie ich przetwarzanie (łączenie relacyjne).

Oto cykl zadań, z pełnymi lub częściowymi różnymi sposobami ich rozwiązania, których analiza pozwoli lepiej uchwycić specyficzną rolę tych zadań. Odsłaniają one pewne istotne elementy procesu rozwiązywania problemów probabilistycznych (w ogólności heurezy).

Zadanie 1.

W urnie znajduje się n kul, w tym jedna czarna. Gracze losują na przemian bez zwracania kulę z urny. Wygrywa ten z graczy, który pierwszy wyciągnie kulę czarną. Czy chciałbyś zaczynać tę grę?

Rozwiązanie 1a.

Jest:

$$P(A) = \frac{1}{2} = P(B) \quad \text{dla } n \text{ parzystego},$$

oraz

$$P(A) = \frac{n+1}{2n} \quad \text{i} \quad P(B) = \frac{n-1}{2n} \qquad \text{dla } n \text{ nieparzystego},$$

gdzie A i B oznaczają odpowiednio zdarzenia: "wygra ten, który zaczyna grę", "wygra drugi z graczy" (zob. [32], str. 177-178).

W przypadku parzystej liczby kul w urnie gra jest sprawiedliwa. W przeciwnym razie większą szansę wygrania ma ten, kto grę zaczyna.

Rozwiązanie 1b.

Dane doświadczenie losowe symulujemy tasowaniem i rozkładaniem n kart, z których jedną wyróżniono. Obserwując miejsca, na których może znaleźć się wyróżniona karta, otrzymujemy klasyczną przestrzeń: $\Omega_1 = \{1,2,3,\ldots,n\}$. Zliczając ilości wyników sprzyjających zdarzeniu A odpowiednio dla n parzystego i nieparzystego oraz korzystając z tego, że A i B są zdarzeniami przeciwnymi, dostajemy rezultat jak w rozwiązaniu 1a.

Rozwiązanie 1c. (z pozoru podobne do rozwiązania 1b)

Na rozkładanie kart patrzymy teraz nieco inaczej. Rozróżniamy wszystkie możliwe rozłożenia n różnych kart. Wówczas Ω_2 jest rodziną wszystkich permutacji zbioru n kart. Przestrzeń Ω_2 jest klasyczna i $\overline{\overline{\Omega}}_2 = n!$. Stąd i z twierdzenia klasycznego mamy:

dla n parzystego

$$P(A) = \frac{\overbrace{(n-1)!+\ldots+(n-1)!}^{\frac{n}{2}}}{n!} = \frac{\frac{1}{2}n(n-1)!}{n!} = \frac{1}{2} = P(B),$$

dla n nieparzystego

$$P(A) = \frac{\overbrace{(n-1)!+\ldots+(n-1)!}^{\frac{n+1}{2}}}{n!} = \frac{\frac{1}{2}(n+1)(n-1)!}{n!} = \frac{n+1}{2n}$$

Zadanie 2.

Zmieniono skład urny. Gracze losują z urny, w której znajduje się n kul, w tym c czarnych ($c < n$). Jakie są teraz szanse obu zawodników? Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej za pierwszym, drugim,..., za k-tym razem?

Rozwiązanie 2a.

Pierwsze próby analogiczne do rozwiązania 1.a poprzedniego zadania ukazują, że sposób ten jest mało efektywny w nowej sytuacji. Znalezienie odpowiedzi na drugie z postawionych pytań za pomocą drzewa jest praktycznie możliwe tylko dla konkretnych liczb n i c, niezbyt dużych* .Refleksja i ocena pomysłu sugeruje zmianę podejścia.

Rozwiązanie 2b.

Losowanie kuli związane z opisaną grą symulujemy tasowaniem i rozkładaniem n kart, z których c wyróżniono. Ponieważ każda z kart ma taką samą szansę zajęcia dowolnego miejsca, prawdopodobieństwo, że wyróżniona karta znajdzie się na k-tym miejscu jest równe $\frac{c}{n}$ dla $k=1,2,\ldots,n$. Wynik trochę szokujący** , zwłaszcza w kontekście nikłego rezultatu poprzedniego rozwiązania, jak i w zestawieniu z losowaniem kul, tu intuicyjnie jasny. Znalezione prawdopodobieństwa nie dają jeszcze odpowiedzi na pytanie: jakie są szanse obu zawodników w tej grze*** . W tym celu należy obliczyć prawdopodobieństwa zdarzeń $C_{1,k}$: "czarną kulę wylosowano po raz pierwszy za k-tym

---

* W artykule [26] opisano sposób rozwiązania tego problemu za pomocą drzewa i twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

** Wydaje się, że prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej za pierwszym razem jest inne niż za drugim. Błędne intuicje są tutaj wynikiem mylenia prawdopodobieństwa zwykłego z warunkowym.

*** Równość tych prawdopodobieństw ma praktyczne zastosowanie w rozwiązaniu innych problemów (patrz, problem z zapałkami [31], zad. 619, str.103 [32]).

razem" dla $k=1,2,\ldots,n-c+1$. Wydaje się, że tego problemu nie da się rozstrzygnąć w sposób analogiczny do rozwiązania 1.b. Trudno jednak uwierzyć, że pomysł jest zły. Spojrzenie wstecz na sytuację 1 i jej rozwiązanie 1.b oraz dodatkowe zadanie ujawnia, że analogia nie była pełna. Trzeba umiejętnie dokonać transferu metody. Do tego rozwiązania wrócimy po analizie zadania 3.

Rozwiązanie 2c.

Przyjmując przestrzeń wyników taką jak w 1c otrzymujemy:

$$P(C_{1,1}) = \frac{c(n-1)!}{n!} = \frac{c}{n},$$

$$P(C_{1,2}) = \frac{(n-c)\,c(n-2)!}{n!} = \frac{(n-c)c}{n(n-1)},$$

$$P(C_{1,n-c+1}) = \frac{(n-c)!c(c-1)!}{n!} = \frac{(n-c)(n-c-1)[\cdot\ldots\cdot]2\cdot 1}{n(n-1)[\cdot\ldots\cdot](n-c+1)}.$$

Skojarzenie jest natychmiastowe: liczby takiej postaci daje rozwiązanie za pomocą drzewa. Zatem dalsze postępowanie, dotyczące ocen P(A) i P(B) będzie przebiegać jednakowo przy tych dwóch różnych podejściach do rozwiązania problemu.

Niech $p_{1,k}=P(C_{1,k})$ dla $k=1,2,\ldots,n-c+1$. Zauważamy, że $\bigwedge_j p_{1,j} < p_{1,j+1}$. Stąd zachodzi nierówność $P(A) < P(B)$ dla $n-c+1$ parzystego oraz $P(A) > P(B)$ dla $n-c+1$ nieparzystego.

Na tym kończy się podobieństwo opisywanej metody do tej opartej na drzewie. Okazuje się, że jest ona narzędziem (jak sposób 2.b), za pomocą którego znajdujemy odpowiedź na drugie pytanie w zadaniu 2. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że wyróżniona karta pojawi się na k-tym miejscu wynosi: $\frac{c(c-1)!}{n!}$ czyli $\frac{c}{n}$.

Zadanie 3. (Porównaj [37], zad. 3.30, str.29)

W urnie jest 10 kul, w tym 2 czarne. Gracz losuje 5 razy kulę bez zwracania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród pięciu wylosowanych kul znajdzie się dokładnie jedna czarna, dokładnie 2 czarne, nie będzie ani jednej czarnej?

Rozwiązanie 3a.

Szukane prawdopodobieństwa znajdujemy za pomocą drzewa.

Rozwiązanie 3b.

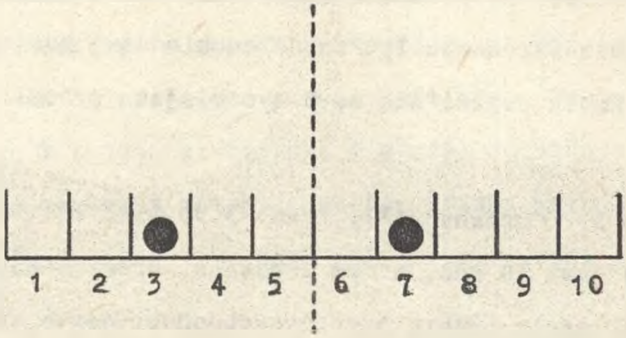
Tradycyjny sposób widzenia tego doświadczenia ilustruje następujący jego opis: wyniki przedstawia się jako zbiory lub ciągi 5-wyrazowe o wyrazach ze zbioru 10-elementowego (kule ponumerowano).

Rozwiązanie 3c.

Rozważmy losowe rozmieszczenie dwóch nierozróżnialnych kul w 10 "małych szufladach" (to tak, jakby rozkładając w rzędzie po wcześniejszym potasowaniu 10 kart, obserwowano numery miejsc, na których pojawią się te asy).

Na rysunku 11 zakodowano jeden z możliwych wyników tego doświadczenia. Przestrzeń wyników jest zbiorem:

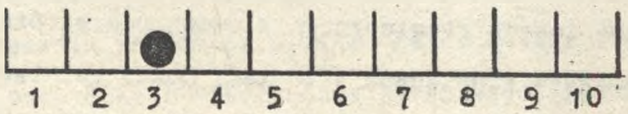
$$\Omega = \left\{ \{i,j\} : \quad i,j \in \{1,2,\ldots,10\} \right\}$$



rys.11

Przy takiej interpretacji wyników model probabilistyczny jest klasyczny i $\overline{\overline{\Omega}} = \binom{10}{2}$.

Rozważmy nową komodę o $\binom{10}{2}$ ponumerowanych szufladach. Kule czarne wkładamy do pudełka i losujemy dla niego jedną z szuflad nowej komody. Jest to analogia (jakby podniesienie wymiaru) do sposobu widzenia doświadczenia z zadania 1 w rozwiązaniu 1.b. Odpowiednikiem sytuacji "jedna kula i 10 szuflad" (rys. 12) jest "jedno pudełko (w nim dwie kule) i $\binom{10}{2}$ nowych szuflad" (rys.13).

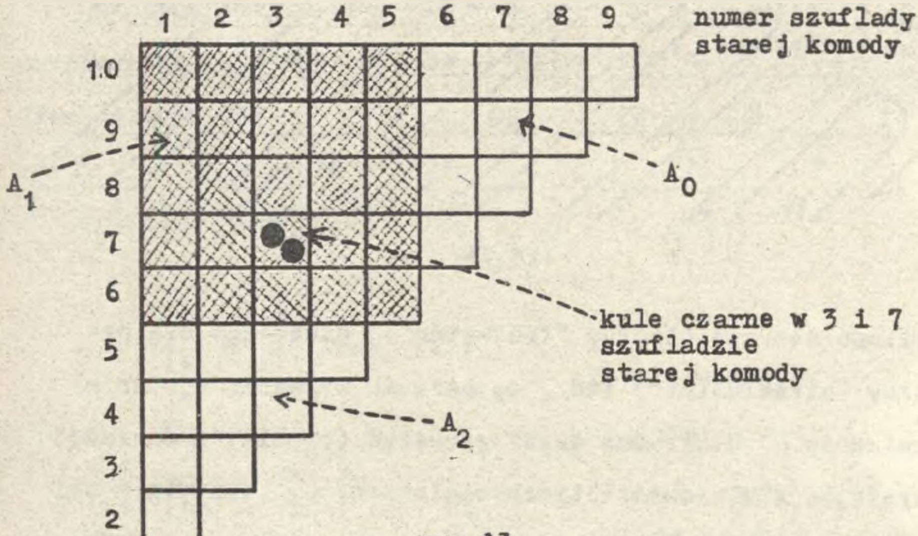


rys.12

Oznaczając przez A_j zdarzenie "wśród pięciu wylosowanych kul znajdzie się dokładnie j kul czarnych" gdzie, j=0,1,2 ("w pięciu pierwszych szufladach znajdzie się dokładnie j kul"), otrzymujemy:

$$P(A_1) = \frac{5 \cdot 5}{\binom{10}{2}} = \frac{5}{9}, \quad P(A_2) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{2}{9}, \quad P(A_0) = 1 - P(A_1 \cup A_2) = \frac{2}{9}$$

(porównaj z rysunkami 11 i 13).



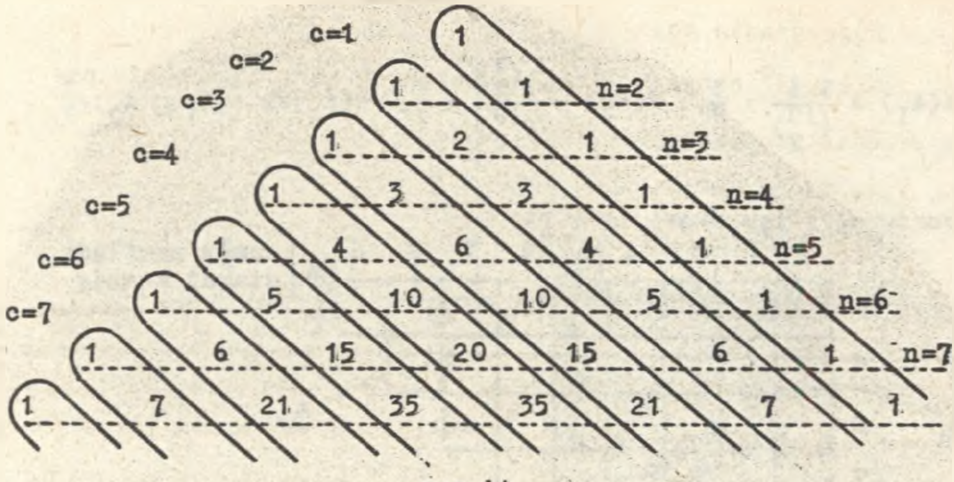
rys.13

numer szuflady starej komody

Opisana metoda w naturalny sposób daje się uogólnić na dowolne liczby n, c i k przy tradycyjnym opisie zmiana k powoduje zmianę przestrzeni. Dokończenie rozwiązania (2.b) jest teraz natychmiastowe. Wyobrażając sobie rozmieszczanie c kul w n "małych szufladach", dostajemy:

$$\overline{\overline{\Omega}} = \binom{n}{c}, \ \overline{\overline{C}}_{1,1} = \binom{n-1}{c-1}, \ \overline{\overline{C}}_{1,2} = \binom{n-2}{c-1}, \ldots, \ \overline{\overline{C}}_{1,n-c+1} = \binom{n-(n-c+1)}{c-1} = 1$$

Odkrywamy ciekawą regularność matematyczną (rys.14). Liczby $C_{1,k}$ uporządkowane od k=n-c+1 do k=1 są kolejnymi liczbami następujących ukośnych rzędów w trójkącie Pascala: pierwszego dla c-1 (same jedynki), drugiego dla c=2 (liczby naturalne),



rys.14

trzeciego dla c=3 (liczby "trójkątne"), czwartego dla c=4 (liczby "piramidalne") itd., do poziomu wyznaczonego przez odpowiednie n. Nietrudno teraz zauważyć (rys.14) i dowieść, korzystając z własności liczb wielokątnych*, że dla n-c+1 parzystego $P(A) < P(B)$ i odwrotnie w pozostałym przypadku.

Zadanie 4.**

Tasujemy talię kart (13 pików, 2 talie kart) i wykładamy po jednej tak długo, aż pojawi się as. Jaka jest oczekiwana liczba kart wyłożonych do momentu pojawienia się asa?

Rozwiązanie 4a.

Estymujemy wartość oczekiwaną za pomocą średniej arytmetycznej wartości odpowiedniej zmiennej losowej przyjmowanych w trakcie wielu powtórzeń doświadczenia.

---

* O ciekawych własnościach tych liczb mowa jest w [7].

** Zadania 4 i 5 pochodzą z [5].

Rozwiązanie 4b.

Niech T_n^c oznacza liczbę wyłożonych kart do momentu pojawienia się asa, jeżeli wszystkich kart jest n, a wśród nich c asów.

Wartości oczekiwane odpowiednich zmiennych losowych znajdujemy korzystając z definicji nadziei matematycznej oraz z rozwiązania 2b:

$$E(T_{52}^4) = \frac{\binom{51}{3}}{\binom{52}{4}} \cdot 1 + \frac{\binom{50}{3}}{\binom{52}{4}} \cdot 2 + \ldots + \frac{1}{\binom{52}{4}} \cdot 49,$$

$$E(T_{13}^1) = \frac{1}{13}(1+2+\ldots+13) = 7,$$

$$E(T_{104}^8) = \frac{\binom{103}{7}}{\binom{104}{8}} .1 + \frac{\binom{102}{7}}{\binom{104}{8}} \cdot 2 + \ldots + \frac{1}{\binom{104}{8}} \cdot 97.$$

Tylko w drugim przypadku rezultat jest zadowalający. Chciałoby się uchwycić ogólną, a zarazem bardziej widoczną zależność wartości $E(T_n^c)$ od liczb n i c. Aby oderwać się od przyjętego schematu, dostrzec nowe i powiązać w inny sposób elementy rozpatrywanej już sytuacji, potrzeba dużej giętkości umysłu. Decydującego pomysłu zmiany poszukiwań rozwiązania może dostarczyć kolejne zadanie.

Zadanie 5.

Rozmieszczamy losowo 2 kule w 6 "małych ponumerowanych szufladach". Niech X_1, X_2 oznaczają numery odpowiednio pierwszej i drugiej szuflady, do której trafia kula, a Y_1, Y_2, Y_3 ilość pustych szuflad przed pierwszą pełną, między dwiema pełnymi, po drugiej pełnej*. Wyznacz wartości oczekiwane tych zmiennych losowych.

Rozwiązanie zadania (jest: $E(X_1) = \frac{35}{15}$, $E(X_2) = \frac{70}{15}$) i zauważone prawidłowości (por. tabela rys.15) stają się podstawą następującego uogólnienia:

$\omega \in \Omega$	$X_1(\omega)$	$X_2(\omega)$	$Y_1(\omega)$	$Y_2(\omega)$	$Y_3(\omega)$
110000	1	2	0	0	4
101000	1	3	0	1	3
100100	1	4	0	2	2
100010	1	5	0	3	1
100001	1	6	0	4	0
011000	2	3	1	0	3
010100	2	4	1	1	2
010010	2	5	1	2	1
010001	2	6	1	3	0
001100	3	4	2	0	2
001010	3	5	2	1	1
001001	3	6	2	2	0
000110	4	5	3	0	1
000101	4	6	3	1	0
000011	5	6	4	0	0
	35	70	20	20	20

oznaczenia w pierwszej kolumnie: 0 - pusta szuflada
1 - pełna szuflada

rys.15

---

* Mowa o tych numerach i ilościach przed rozmieszczaniem kul. X_1, X_2, Y_1, Y_2 i Y_3 są wtedy zmiennymi losowymi.

Rozwiązanie 4c.

Dla tasowania i rozkładania n kart, z których c wyróżniono, przyjmujemy analogiczne oznaczenia: $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{c+1}$ odpowiednio ilości kart przed pierwszą wyróżnioną, między pierwszą a drugą wyróżnioną, ... , po ostatniej wyróżnionej.

Z symetrii wnosimy, że wszystkie średnie dotyczące tych ilości są równe i wynoszą: $\frac{n-c}{c+1}$. Zatem na pierwszą wyróżnioną kartę czekamy średnio: $\frac{n-c}{c+1} + 1 = \frac{n+1}{c+1}$. Stąd $E(T^4_{52}) = \frac{53}{5} = 10.6$ (porównaj ten wynik z rozwiązaniem 4b !)

Powyższe zadania ujawniają charakterystyczne cechy procesu heurystycznego rozwiązywania problemów i jego faz (patrz [6]). W fazie "obserwowania" następuje powiązanie wyodrębnionych składników w trakcie jego analizy z wiedzą rozwiązującego i znanymi mu sposobami działania. Różne powiązania odzwierciedlają poszczególne sposoby widzenia problemu (w metodzie algorytmicznej powiązania implikują identyfikację algorytmu). Interesująca jest faza "poszukiwania". Droga do odkrycia rozwiązania problemu wiedzie przez realizację kolejno wysuwanych planów, wypełnianie powstałych luk (narodziny dobrych pomysłów: sposób 2.b, zadanie 3 i 4) i napotkanie niepowodzeń (metoda 2.a, 4.b) oraz modyfikację (w sposobie 2.b) lub całkowitą zmianę sposobu postępowania (zadanie 5 i rozwiązanie 4.c).

Szczególnie ważna dla heurezy jest ocena i refleksja nad rozwiązaniem problemu. Prezentowany cykl zadań zmusza do takiej refleksji. Ukazuje jak w pewnych sytuacjach jeden opis, czy przyjęta metoda, choć teoretycznie poprawna (np. pewien algorytm zastosowany w rozwiązaniu 4.b*, nie prowadzi w sposób efektywny lub zadowalający do rozwiązania problemu, uwidacznia się konieczność eliminacji przyjętych metod oraz zachowania dużej ostrożności przy algorytmizowaniu zadań probabilistycznych. Może ono bowiem potęgować trudność w przełamywaniu schematów oraz hamować postawę twórczą, skierowaną na otrzymywanie rozwiązań jak najprostszych. Ze względu na zaznajamianie ucznia z heurystyką, kształcące jest pokazywanie różnych rozwiązań tego samego problemu (stymulowanie takich rozwiązań), zarówno tych długich i skomplikowanych, jak krótkich i prostych. Nie jest to "szafowanie strukturami", jak napisano w [36]. Krótkie rozwiązanie zadania probabilistycznego wcale nie oznacza, że znalezienie danego modelu probabilistycznego jest proste. Odkrywanie takich rozwiązań stanowi twórczą satysfakcję dla podejmującego problem. Czasami zdarza się nawet, że możliwość taką stwarzają wyobrażenia, dotyczące bardzo nieistotnych szczegółów zadania. Jako przykład może służyć gra "ponad 10" (znana z paradoksu Kawalera de Mere): "Na stół rzuca się 3 kostki do gry. Jeden z graczy zakłada się z drugim o to, czy łączna liczba wyrzuconych oczek będzie większa, czy mniejsza od 10. "W celu rozstrzygnięcia problemu, czy gra jest sprawiedliwa, wystarczy zauwa-

---

* Zastosowany sposób jest zgodny z algorytmem ("schematem etapów") do rozwiązywania typowych zadań, związanych ze zmienną losową, podanym w [9].

żyć pewną własność kostki (suma oczek na przeciwległych ściankach jest równa 7, [15], str.62).*

4.4.2 Proste zadania probabilistyczne a wyłaniające się na ich tle różnorodne problemy matematyczne

W procesie uczenia się istotna jest zasada funkcjonalnego stosunku między nową a poprzednio nabytą wiedzą. Zadania probabilistyczne, ze względu na swoją specyfikę, służą realizacji tej zasady oraz szczegółowego celu kształcenia matematycznego ("ukazywanie istoty matematyki przez integrowanie jej różnych działów" [29]).

Poniższe przykłady ilustrują, jak prosta sytuacja losowa może prowadzić do bogactwa środków matematycznych, koniecznych do rozwiązania problemów ujawniających się na jej tle.

Przykład 1. (patrz zadanie 6.11 w |31|, s.102).

Rzucamy n identycznymi monetami. Oceń czy następujące zdarzenia są niezależne:

A: wypadnie co najwyżej raz orzeł,

B: wypadną zarówno orły jak i reszki.

W podręczniku znajduje się następująca uwaga: "Trudno na razie orzec, czy zdarzenia A i B są, czy nie są niezależne.

---

* Nawet w przypadku, gdy posiadane kostki nie są zbudowane według tej zasady, możemy uczynić takie założenie, nie naruszając warunków przypadkowości wyników tego doświadczenia.

Wydaje się jednak, że na to nie powinna mieć wpływu liczba monet. Udowodnij, że tak nie jest. Rozważ n=3 i n=4".

Istotnie, okazuje się, że w pierwszym przypadku zdarzenia są niezależne, w drugim zależne. Powstały "dysonans poznawczy" (psychologiczna zasada sprzeczności) między nowymi informacjami a pewną wiedzą intuicyjną pobudza do sformułowania ogólniejszego problemu i jego rozwiązania: czy występuje jakaś regularność pomiędzy zależnością (niezależnością) tych zdarzeń, a liczbą n?

Rozwiązanie sprowadza się w efekcie do ciekawego równania z jedną niewiadomą.

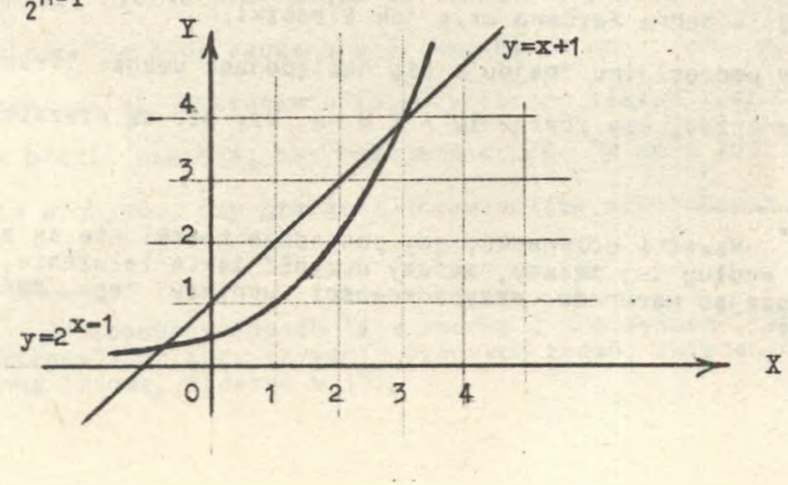
W klasycznym modelu probabilistycznym, gdzie

$\Omega = \{0,1\}^{\{1,2,...,n\}}$, otrzymujemy:

$$P(A) \,.\, P(B) = P(A \cap B) \Longleftrightarrow \frac{n+1}{2^n} \cdot \frac{2^n-2}{2^n} = \frac{n}{2^n} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{2^n}\left(\frac{(n+1)(2^n-2)}{2^n} - n\right) = 0 \Longleftrightarrow (n+1)\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) - n = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{n+1}{2^{n-1}} = 1 \Longleftrightarrow n+1 = 2^{n-1} \Longleftrightarrow n = 3. \quad \text{(rys. 16)}$$



Przykład 2.

W 4.1 opisano grę (zadanie z urną), która zainspirowała ogólny problem:

Jakie są szanse obu graczy w tej grze, jeżeli w urnie jest x kul białych i y czarnych?

Przyjmując model klasyczny:

$$\Omega = \{\{i,j\} : \quad i,j \in \{1,2,\dots,x+y\}, \quad x,y \in N - \{0\}\}$$

i oznaczenia zdarzeń:

A: wylosowane kule są tego samego koloru,

B: wylosowane kule są różnego koloru,

dostajemy

$$\overline{\overline{\Omega}} = \binom{x+y}{2}, \quad \overline{\overline{A}} = \frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2}, \quad \overline{\overline{B}} = x.y$$

oraz

$$P(A)=P(B) \Longleftrightarrow \frac{x(x-1)}{2}+\frac{y(y-1)}{2}-xy=0 \Longleftrightarrow x^2-x+y^2-y-2xy = 0.$$

Równość ostatnią wygodniej jest zastąpić postacią:

(1) $$(x-y)^2 = x + y.$$

Analogicznie zastępując znak "=" odpowiednio znakami "$<$" i "$>$" otrzymujemy:

(2) $$(x-y)^2 < x + y,$$

(3) $$(x-y)^2 > x + y.$$

Dalszy ciąg opisu rozwiązania zawiera relację z charakterystycznego fragmentu poszukiwania rozwiązania problemu przez pewnego ucznia.

"Musimy teraz znaleźć liczby naturalne spełniające warunki (1), (2) i (3). Ale jak to zrobić?... Mamy dwie niewiadome... Może podstawiać kolejno liczby naturalne?... Ależ nie, jest ich nieskończenie wiele. ... Chwileczkę, dwie niewiadome. ... Gdyby był jakiś drugi warunek. ... Aha mam! Załóżmy, że $x=y$"

W ten sposób uczeń wyróżnia następujące przypadki, otrzymując odpowiednio, szczególne rozwiązania równania (1):

1) $y=x \quad (x-x)^2=2x \Longleftrightarrow 0 = 2x$ (sprzeczność bo $x > 0$),

2) $y=2x \quad (x-2x)^2=x+2x \Longleftrightarrow x(x-3)=0 \Longleftrightarrow x=3, \quad y=6.$

Ponieważ warunek (1) jest symetryczny względem x i y, drugim rozwiązaniem będzie para (6,3)(dla $x-2y$),

3) $y=3x \quad (x-3x)^2=x+3x \Longleftrightarrow x(x-1) = 0 \Longleftrightarrow x=1, \quad y=3$

(analogicznie jak poprzednio rozwiązaniem jest także para (3,1). Uczeń przypomina sobie analizę rysunkową (rys.6). Uogólniając:

$$y=nx \quad (x-nx)^2=x+nx \Longleftrightarrow (n-1)^2x^2-(n+1)x = 0$$

$$x = 0 \vee x = \frac{n+1}{(n-1)^2} \quad \text{dla} \quad n \neq 1,$$

stawia hipotezę, że dla $n > 3$ zawsze zachodzi $n+1 < (n-1)^2$. Dowód przeprowadza indukcyjnie.

Wniosek:

$$\bigwedge_{n > 3} \frac{n+1}{(n-1)^2} \notin N$$

Powyższe rozważania naprowadzają ucznia na dalsze szczególne rozwiązania. Jego ciekawość rośnie wraz ze wzrostem analizowanych przypadków: $y=x+1$, $y=x+2$, $y=x+3$, $y=x+4$, $y=x+5$ i otrzymywanych par: (1,3), (3,6), (6,10), (10,15) oraz symetrycznych (3,1), (6,3), (10,6), (15,10). Dla dowolnego n rozwiązanie równania (1) przybiera postać:

$$y = x+n, \qquad n^2=2x + n \Longleftrightarrow x = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Zaciekawiony problemem uczeń wypisuje liczby tej postaci: 1, 3, 6, 15, 21, 28, ... A stąd już krok dzieli go od trójkąta Pascala. Dyskretnie zachęcony konstruuje ten trójkąt i identyfikuje dane liczby, odkrywając przy tym sposób ich otrzymywania (rys.17).

1

1 + 2

//

3 + 3

//

6 + 4

//

10 + 5

//

15 + 6

//

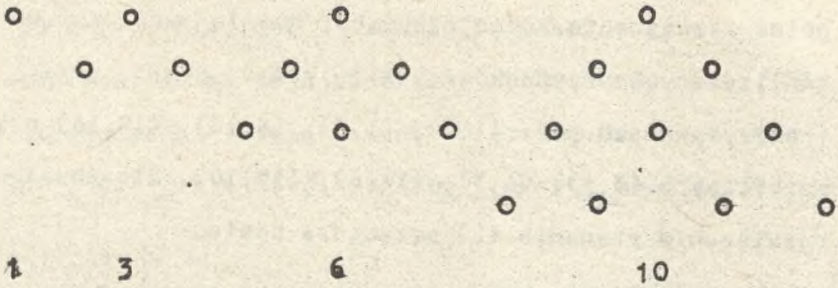
21 + 7

//

28 + ...

rys.17

Interesująca jest "interpretacja geometryczna" tych liczb (rys.18).



rys.18

Spojrzenie wstecz na przebytą drogę staje się podstawą do sformułowania przez ucznia następującego wniosku:

Przypadek $y=x+n$ dla $n \geqslant 0$ jest ogólniejszy i wyczerpujący. Zatem jedynymi rozwiązaniami równania (1) w zbiorze liczb naturalnych są pary liczb postaci:

$$\left(\frac{n(n-1)}{2}, \frac{(n+1)n}{2}\right), \quad \left(\frac{(n+1)n}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right) \quad \text{dla } n > 1.$$

Rozwiązania nierówności (2) i (3) nie sprawiają już kłopotu:

dla $n \geqslant 0$, $y=x+n$ $(x=y+n)$

(2)

$$x > \frac{n(n-1)}{2} \wedge y > \frac{n(n+1)}{2} \quad \left(x > \frac{n(n+1)}{2} \wedge y > \frac{n(n-1)}{2}\right)$$

(3)

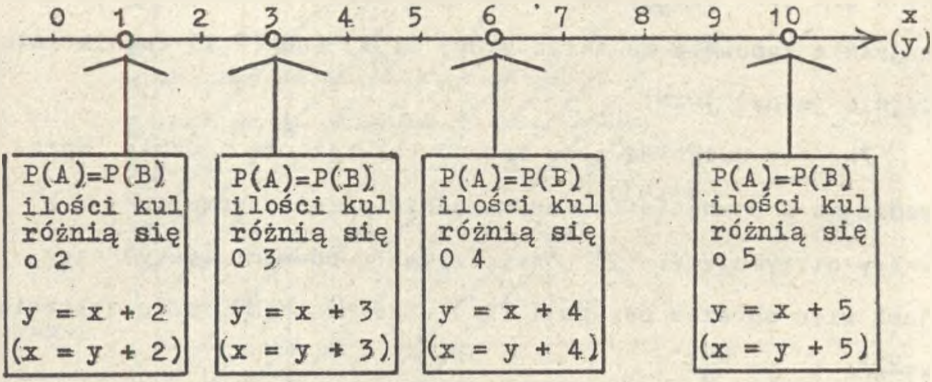
$$x < \frac{n(n-1)}{2} \wedge y < \frac{n(n+1)}{2} \quad \left(x < \frac{n(n+1)}{2} \wedge y < \frac{n(n-1)}{2}\right).$$

Otrzymany rezultat uczeń ilustruje graficznie (rys.19a, b, c).

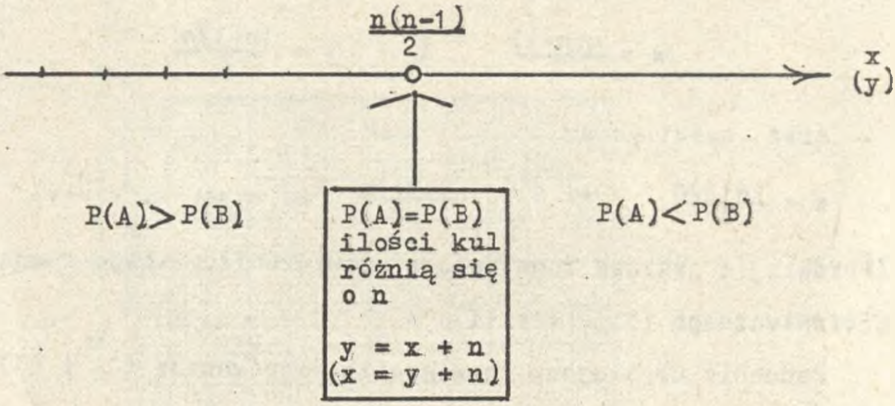
dla n=0 lub n=1

zawsze $P(A) < P(B)$

rys.19a



rys.19b



rys.19c

Powrót do konkretnej sytuacji gry z losowaniem kul i interpretacja uzyskanych wyników w języku tej sytuacji dostarcza praktycznych informacji: jeśli w urnie jest 10 kul, to niekorzystnymi dla gracza będą następujące ilości kul poszczególnych rodzajów: (5,5), (6,4), (4,6). W pozostałych przypadkach gra jest dla niego korzystna, przy czym największą szansę wygrania zapewnia mu skład urny: (1,9) lub (9,1) (wynik intuicyjnie jasny).

Zwróćmy uwagę na inny sposób rozwiązania zadania. Wprowadzając w równaniu (1) odpowiednie podstawienie: $u=x-y$ i $v=x+y$ otrzymujemy: (1′) $u^2=v$. Krzywa o równaniu $(x-y)^2=x+y$ jest więc obrazem paraboli (1′) w afinicznym przekształceniu $x=\frac{u+v}{2}$ i $y=\frac{u-v}{2}$.

Dla każdej pary (n,n^2) spełniającej (1′) otrzymujemy rozwiązanie (1):

$$x = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{i} \qquad y = \frac{(n-1)n}{2}$$

oraz symetryczne

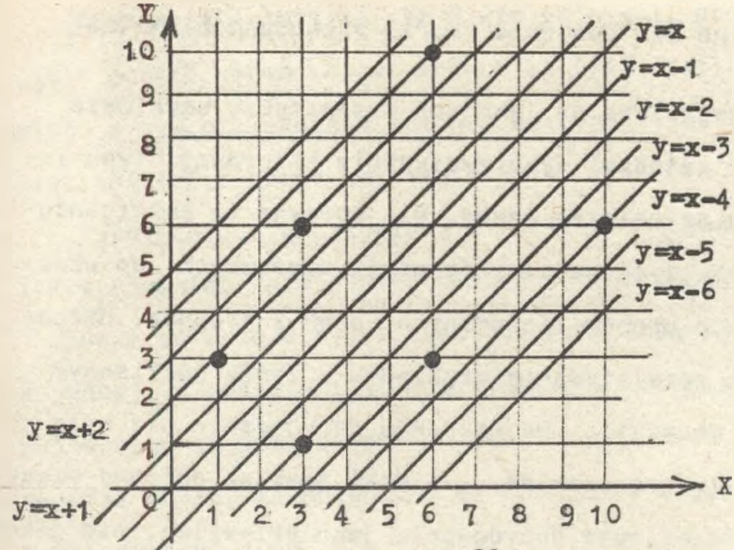
$$x = \frac{(n-1)n}{2} \qquad \text{i} \qquad y = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (\text{dla } u=y-x,\ v=x+y).$$

(Porównaj z jeszcze inną metodą rozwiązania pewnego równania diofantycznego [35], str.11).

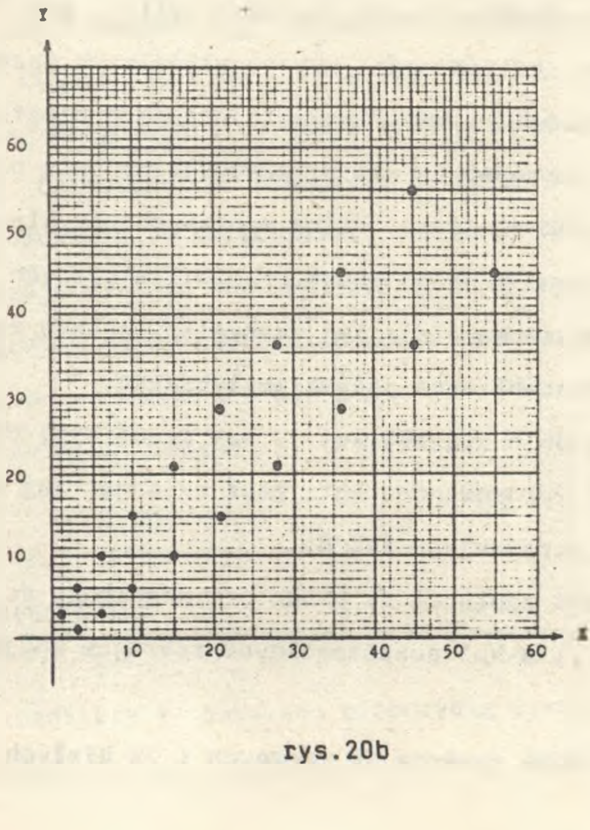
Podobnie uzyskujemy rozwiązania nierówności (2) i (3).

Uwaga 1: Interpretacja geometryczna poprzedniego sposobu rozwiązania równania (1) (rys.20a i jego modyfikacja 20b) dostarcza wyobrażenia o kształcie krzywej opisanej tym równaniem

Uwaga 2: Interesujący wynik otrzymujemy w przypadku losowania ze zwracaniem. Okazuje się, że równanie $x^2 + y^2 = xy$, które jest odpowiednikiem równania (1), nie ma rozwiązania w zbiorze liczb naturalnych. Dla jakichkolwiek x i y zachodzi $x^2 + y^2 > xy$, co oznacza, że $P(A) > P(B)$.



rys.20a



rys.20b

4.4.3 Specyficzne zastosowania teorii prawdopodobieństwa

W szkole, zwłaszcza na lekcjach matematyki, uczniowie zapoznają się z metodami wykorzystywania informacji typu logicznego, które są całkiem pewne. Nie sprzyja to rozwijaniu umiejętności wykorzystywania informacji niepewnych do właściwych wnioskowań probabilistycznych, ocen i prognoz. Utrudnia to znacznie rozwiązywanie problemów w życiu codziennym i podejmowanie decyzji. Do niedawna decydowanie nie było problematyką, ale uprawianiem... i dziś jeszcze ogromna większość decydentów pojmuje decydowanie jako przywilej, nie jako jeden z rodzajów pracy polegającej na rozwiązaniu problemów decyzyjnych (z podaniem dowodu trafności)([17], str.8).

Kształtowanie umiejętności wyboru właściwych decyzji, optymalnych strategii i weryfikowanie prostych hipotez metodami probabilistycznymi to ważne, specyficzne cele nauczania rachunku prawdopodobieństwa. Kilka wybranych przykładów przedstawia specyficzne funkcje zadań probabilistycznych, ukazujących charakterystyczne dla tej dyscypliny proste zastosowania w różnych problemach pozamatematycznych.

W urnie znajduje się 100 kul, w tym część białych i część czarnych. Przed wylosowaniem kuli masz odgadnąć jej kolor. Jeśli trafiłeś, otrzymujesz 100 zł.

Ile chciałbyś zapłacić za prawo przystąpienia do tej gry:

a) nie wiedząc, ile kul poszczególnych rodzajów znajduje się w urnie;

b) wiedząc, że urna zawiera 50 czarnych i 50 białych kul.

Ciekawostką jest to, że wiele osób woli podejmować ryzyko jak i płacić więcej na warunkach b) ([4], str.132). A przecież w obu przypadkach średnia wygrana wynosi 50 zł (nie licząc opłaty za prawo udziału w grze).

Zachowanie się człowieka w obliczu niepewności może także ujawniać rozwiązanie następującego zadania:

Dane są dwie urny. W każdej z nich znajduje się 100 kul, w jednej 70 białych i 30 czarnych, a w drugiej odwrotnie. Wylosowano za pomocą monety jedną z urn. Masz odgadnąć, którą. Wyobraź sobie, że pozwolono Ci dodatkowo wyjąć jedną kulę z wylosowanej urny. Jak teraz, w zależności od wyniku swojego losowania, oceniłbyś prawdopodobieństwa hipotez:

h_1: wylosowano urnę z przewagą kul białych,

h_2: wylosowano urnę z przewagą kul czarnych.

Podaj przybliżone wartości tych prawdopodobieństw w procentach. Pozwolono Ci powtórzyć tę czynność jeszcze kilka razy (losowanie ze zwracaniem). Jak zmienią się Twoje oceny?

Okazuje się, że na ogół oceny te są znacznie niższe od teoretycznie otrzymanych prawdopodobieństw. Oznacza to że ludzie są mniej pewni niż być powinni, że określona hipoteza jest prawdziwa (zobacz [11], str.88).

5. ZAKOŃCZENIE

W rozdziale 4. pokazano propozycję wykorzystania zadań probabilistycznych w praktyce szkolnej. Szeroki wachlarz poruszanych problemów sprawił, że nie wszystkie funkcje zadań zostały wyczerpująco omówione i zilustrowane przykładami (świadomie pominięto funkcję kontrolującą). Uwagę starano się skoncentrować na specyficznych funkcjach zadań z rachunku prawdopodobieństwa.

Optymistyczna jest refleksja, że rozwiązywanie problemów probabilistycznych, ze względu na ich specyfikę, może dostarczać wiele korzyści każdemu z uczniów, niezależnie od tego czy będzie to przyszły matematyk, inżynier czy skrzypek. Wymieńmy najważniejsze z nich:

- sposobność ukształtowania określonych nawyków myślowych, rozwoju myślenia intuicyjnego (heurystycznego) i probabilistycznego oraz innych zdolności intelektualnych niezbędnych w procesie rozwiązywania dowolnych problemów,
- rozwój zainteresowań i motywacji zdobywania wiedzy,
- ukazanie praktycznych zastosowań probabilistyki i efektywności metod i środków matematycznych do rozwiązania różnorodnych problemów pozamatematycznych,
- szczególnego rodzaju twórcza satysfakcja z odkrywania i tworzenia pojęć matematycznych i twierdzeń oraz rozwiązywania zadań o bogatej heurystyce, wyróżniających się rzeczywistym pięknem matematycznym (porównaj [33], str.314).

Umiejętności zdobyte w trakcie rozwiązywania zadań z probabilistyki stanowią dobrą podstawę organizacji nowych wiadomości, które uczeń będzie otrzymywał w ciągu całego swojego życia.

Problem, który stanowił przedmiot niniejszej pracy, omówiony jest także - ale w innym ujęciu i marginesowo - w pracy [32].

LITERATURA

[1] Bruner J.S., Proces kształcenia, PWN Warszawa 1964,

[2] Dyrszlag Z., O poziomach rozumienia pojęć matematycznych, Zeszyty Naukowe WSP w Opolu, seria B,Studia i Monografie Nr 32 Opole 1972,

[3] Bruno de Finetti, Sztuka widzenia w matematyce, PWN Warszawa 1983,

[4] Freund J.E., Podstawy nowoczesnej statystyki, PWE Warszawa 1968.,

[5] Glaymann M., Ou le premier n´est pas toujours le premier..., Hasardons - nous, Brochure de l´Association des Professeurs de Mathematiques de l´Enseignement Public N°17,

[6] Góralski A., Twórcze rozwiązywanie zadań, PWN Warszawa 1980,

[7] Jeleński Sz., Śladami Pitagorasa. Rozrywki matematyczne, WSiP Warszawa 1974,

[8] Johnson H.C., An approach to probability, INT.J.MATH. EDUC.SCI.TECHNOL. 1982, vol 13, No 5, 513-517,

[9] Kąkol H., O rozwiązywaniu zadań z rachunku prawdopodobieństwa, Matematyka nr 5 1982,

[10] Kozielecki J., Zagadnienia psychologii myślenia, PWN Warszawa 1966,

[11] Kozielecki J., Rozwiązywanie problemów, PZWS Warszawa 1969,

[12] Krygowska Z., Zarys dydaktyki cz.1, WSiP Warszawa 1977,

[13] Krygowska Z., Zarys dydaktyki cz.3, WSiP Warszawa 1980,

[14] Krygowska Z., Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich - referat wygłoszony na Kongresie Matematyków w Warszawie w 1983 - maszynopis.

[15] Kurno O., Osnowy tieorii szansow i wierojatnostiej, Izdatielstwo "Nauka" Moskwa 1970.

[16] Legutko M., Uwagi o roli zadań w klasach początkowych, Oświata i Wychowanie 1977, wersja C nr,9.

[17] Mazur M., Cybernetyka i charakter, PIW Warszawa 1979.

[18] Moore D.S., Analiza statystyczna danych doświadczalnych, Matematyka Współczesna, praca zbiorowa pod redakcją L.A. Steena, WNT Warszawa 1983,

[19] Neapolitański S., Zarys dydaktyki matematyki, PZWS Warszawa 1958,

[20] Neymann J., Zasady rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matemmatycznej, PWN Warszawa 1969,

[21] Okoń W., Zarys dydaktyki ogólnej, PZWS Warszawa 1968,

[22] Olecka A., Aktualne tendencje dydaktyki rachunku prawdopodobieństwa, Oświata i Wychowanie wersja C nr 11,12 1981,

[23] Olecka A., Pewna koncepcja strukturalizacji nauczania początków rachunku prawdopodobieństwa, Roczniki PTN seria V Dydaktyka Matematyki 3, PWN Warszawa 1984,

[24] Płocki A., Rachunek prawdopodobieństwa dla nauczycieli, PWN Warszawa 1981,

[25] Płocki A., Kurs propedeutyczny rachunku prawdopodobieństwa a kształcenie matematyczne, Oświata i Wychowanie, wersja B, nr 8 1983,

[26] Płocki A., Klasyczne paradoksy probabilistyczne a odkrywanie pojęć i twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa w kursie propedeutycznym, Oświata i Wychowanie wersja B nr 8 1983,

[27] Płocki A., Matematyczne aktywności na drodze od realnego świata do świata pojęć probabilistycznych, Oświata i Wychowanie wersja B nr 10 1983,

[28] Płocki A., Pojęcie prawdopodobieństwa jako synteza różnych aspektów, Oświata i Wychowanie wersja B nr 13 1983,

[29] Płocki A., Idea fuzjonizmu w nauczaniu probabilistyki, Oświata i Wychowanie wersja B nr 18 1983,

[30] Płocki A., Konkretny eksperyment i proces wstępnej matematyzacji w propedeutyce probabilistyki, Roczniki PTN seria V Dydaktyka Matematyki PWN Warszawa 1984,

[31] Płocki A., Rachunek prawdopodobieństwa dla szkoły średniej, WSiP Warszawa 1983,

[32] Płocki A., Zadania probabilistyczne jako element kształcenia matematycznego, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1985,

[33] Polya G., Odkrycie matematyczne, WN-T Warszawa 1975,

[34] Puchalska Z., Gra losowa jako źródło inspiracji i motywacji do wprowadzenia nadziei matematycznej, Oświata i Wychowanie wersja B nr 18 1983,

[35] Richards I., Teoria liczb, Matematyka Współczesna pod redakcją L.A.Steena, WNT Warszawa 1983,

[36] Stachowski E., Uwagi metodyczne o nadużywaniu pewnych struktur w nauczaniu rachunku prawdopodobieństwa, Oświata i Wychowanie wersja B nr 18 1983,

[37] Stojanow J., Mirazczijski I., Ignatow C., Tanuszew M., Zbiór zadań z rachunku prawdopodobieństwa, PWN Warszawa 1982,

[38] Treliński G., Stosowanie matematyki jako problem dydaktyki matematyki, Wydawnictwo Naukowe WSP Kraków 1982,

[39] Tomaszewski T., Z pogranicza psychologii i pedagogiki, PZWS Warszawa 1970,

[40] Wełna B., Działania na zdarzeniach, Oświata i Wychowanie wersja C nr 12, 13 1980.