BARBARA WILK

Obiekty rzeczywistości a przedmioty teorii w propedeutyce rachunku prawdopodobieństwa

Matematyka sama w sobie - w przeciwieństwie do nauk takich jak biologia czy geografia - nie jest nauką o obiektach naszej rzeczywistości, a jej pojęcia - w przeciwieństwie do pojęć tamtych nauk - nie posiadają realnych desygnatów.

Nie ulega wątpliwości, że nauczyciel uczący np. geometrii musi właściwie rozumieć istotę różnic między obiektami świata realnego, na bazie których zapoznaje uczniów z pojęciami geometrii, a tymi drugimi właśnie, będącymi jedynie przedmiotami teorii, a więc - istniejącymi jedynie w naszej myśli, pozbawionymi materialnego bytu. Musi zdawać sobie sprawę z tego, że ucząc np. o kole, nie uczy przecież o tym konkretnym klocku z materiału logicznego Dienesa, o tym wyciętym z kartonu krążku, ani nawet o tym rysunku koła, wykonanym kredą na tablicy, czy ołówkiem w zeszycie - lecz o "przedmiocie", którego pokazać się nie da, bo jest on właściwie tylko umownym kodem - ideą pewnego zespołu własności, wyabstrahowaną cechą kształtu, oderwaną od innych cech tych rzeczywistych przedmiotów, takich jak: wielkość, grubość, kolor, rodzaj i gęstość materiału itp. I musi uczyć tak, by uczniowie od początku w taki właśnie sposób matematykę rozumieli. Nie jest to łatwe, tym bardziej, że nieporozumień przyczynia i sam język matematyki, w którym w wielu przypadkach funkcjonują nazwy przeniesione z języka potocznego na określenie pojęć matematycznych wyabstrahowanych z tych różnych ich rzeczywistych źródeł - "prototypów" (chociażby wspomniane już koło - w języku potocznym i w geometrii). W szczególności i nauczyciele, i uczniowie muszą właściwie rozumieć umowność np. padającego na lekcji geometrii i odnoszącego się do pewnego konkretu sformułowania typu "to jest koło" - właściwie, tzn. w opisanym powyżej sensie: że ma cechę, której w języku matematyki nadaliśmy nazwę koło, że jest rzeczywistym modelem tego abstrakcyjnego pojęcia, ale nie jest jego desygnatem.

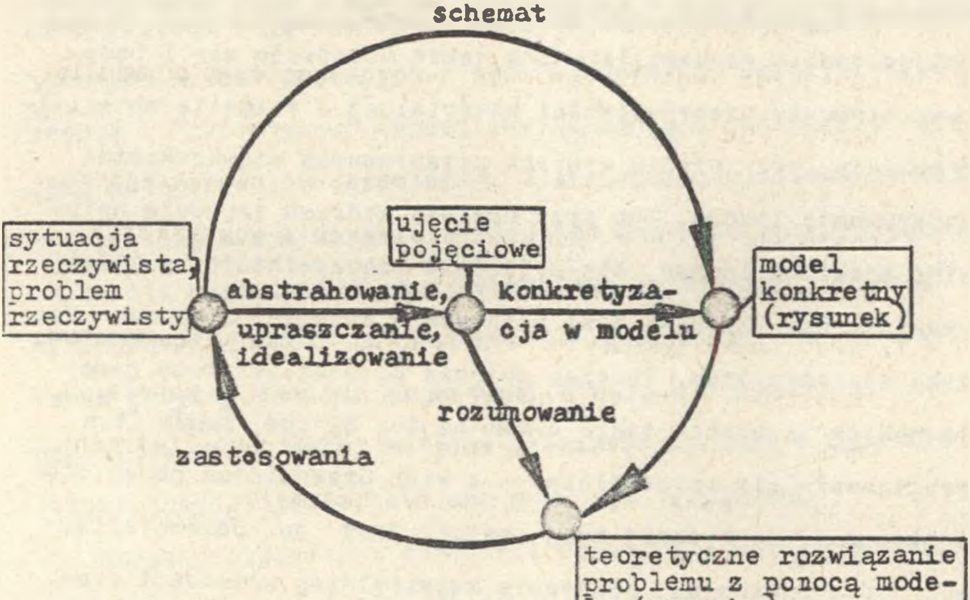
Ucząc propedeutyki geometrii bazuje się na rzeczywistych doświadczeniach uczniów, obserwowaniu przez nich konkretnych przedmiotów, rozważaniu konkretnych sytuacji, będących nośnikami problematyki natury geometrycznej i - przy właściwym podejściu do nauczania matematyki - na tej bazie uczy się schematyzowania tych rzeczywistych przedmiotów i stosunków między nimi, abstrahowania doprowadzającego do teoretycznego ujęcia pojęciowego wyjściowej sytuacji.

Podobnie na pierwszych spotkaniach uczniów z rachunkiem prawdopodobieństwa w szkole podstawowej nie zaczyna się od podania aksjomatycznych podstaw probabilistyki i od rozważań czysto teoretycznych, lecz powinno się, tak jak w przypadku geometrii, uczyć schematyzowania rzeczywistości i aksjomatyzowania wyabstrahowanej na tej drodze teorii. Tyle, że po części inną - niż w przypadku geometrii - naturę ma tu ta wyjściowa rzeczywistość. Matematyzując rzeczywistość przy tworzeniu geometrii obserwuje się i opisuje to, co jest - jest materialnie. Budując teorię probabilistyczną także obserwuje się i bada pewne elementy rzeczywistości materialnej - rozmaite materialne obiekty, przy użyciu których przeprowadza się konkretne eksperymenty losowe, lub przy udziale których zachodzą naturalne zjawiska losowe. Ale wyjściowa rzeczywistość, z której wyrasta probabilistyka,jest bogatsza i bardziej złożona - bardziej abstrakcyjnaa. Tworząc pojęcia probabilistyczne bada się bowiem i ocenia także szanse na to, by coś zaszło (tzn. zrealizowało się materialnie) - a więc przedmiotem badań staje się coś, co z samej swej natury jest już pozamaterialne, choć oceniane na podstawie materialnych własności rzeczywistych obiektów, czy szacowane na drodze powtórzeń rzeczywistych eksperymentów i zjawisk losowych.

O nauczaniu początkowym geometrii czytamy w [2] między innymi (podkreślenia moje):

"|...| Ważne jest |...|, aby od początku pojęcia geometryczne pojawiały się w myśli dziecka jako schematy przedmiotów, sytuacji, układów przedmiotów, różnych przestrzennych stosunków, i aby rysunek czy model przestrzenny pojawiał się jako konkretyzacja tych myśli, jako pomoc w rozwiązywaniu problemu. |...| Ale taki model, rysunek nie jest identyczny z rzeczywistością, którą ma przedstawiać, jest jej schematem, uproszczonym obrazem. Nie jest też identyczny z naszą myślą, bo jest przedmiotem materialnym. W rozwiązywaniu problemu |...| model tylko nam pomaga, pomysły nasuwane przez model ostatecznie wykorzystujemy w rozumowaniu. Ale po rozwiązaniu problemu na naszym schemacie możemy powrócić do materialnej rzeczywistości i to rozwiązanie tam zrealizować.|...|"

Skomplikowana droga rozwiązania rzeczywistego problemu natury geometrycznej zilustrowana została (także w [2]) następującym diagramem (rys.1):



rys.1

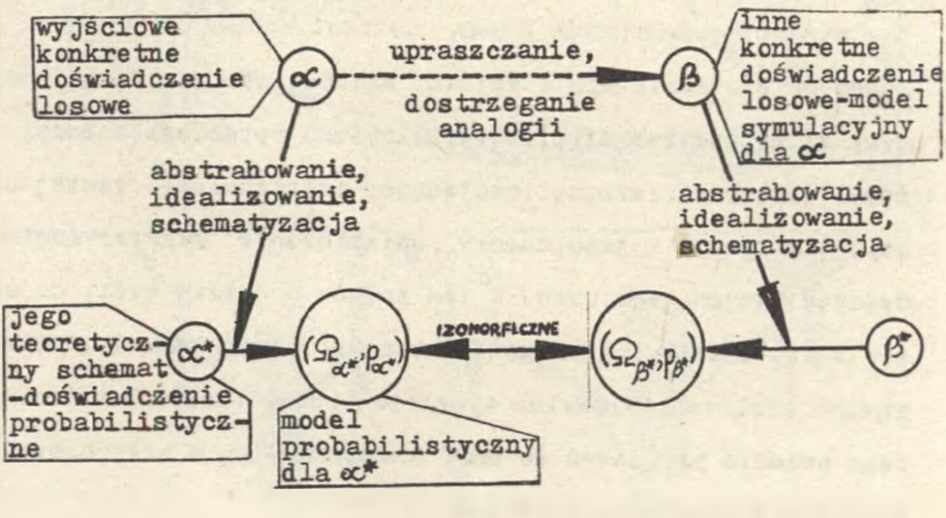
Podobnie można próbować graficznie przedstawić drogę - a raczej różne możliwe drogi - rozwiązywania problemu natury probabilistycznej, którego genezą jest rzeczywista sytuacja (rys.3), przy czym analogiczne "ogniwa" na tej drodze mają tutaj następujące znaczenie:

- s y t u a c j a   r z e c z y w i s t a ,   p r o b l e m   r z e c z y w i s t y - to problem związany z konkretnym doświadczeniem losowym (bądź z konkretnym zjawiskiem, które przy pewnych założeniach może być uznane za doświadczenie losowe), z oceną szans zajścia pewnych odpowiadających mu zdarzeń losowych;

- u j ę c i e p o j ę c i o w e - to adekwatne do rozważanego doświadczenia praktycznego doświadczenie probabilistyczne (teoretyczna idealizacja doświadczenia konkretnego, doświadczenie pomyślane, związane z wyidealizowanym generatorem rozkładu prawdopodobieństwa), o tej samej, co wyjściowe, nazwie oraz jego model probabilistyczny (Ω, p);
- m o d e l k o n k r e t n y - tu może być dwojakiego rodzaju (bo jakby z dwu różnych szczebli abstrakcji), a więc:

1/ tzw. model symulacyjny - to w dalszym ciągu doświadczenie konkretne, inne od wyjściowego, ale mające wspólny z nim (wspólny izomorficznie) model probabilistyczny (zob. schemat na rys.2 oraz przykład 3);

2/ model rysunkowy*;



rys.2

---

* Przykłady różnych modeli rysunkowych doświadczeń losowych znaleźć można w dalszej części tej pracy.

- t e o r e t y c z n e   r o z w i ą z a n i e   p r o b l e m u   z   p o m o c ą   m o d e l u   - to wyznaczenie teoretycznych ocen ilościowych szans zajścia interesujących nas w wyjściowym doświadczeniu losowym zdarzeń, czyli - ich prawdopodobieństw.

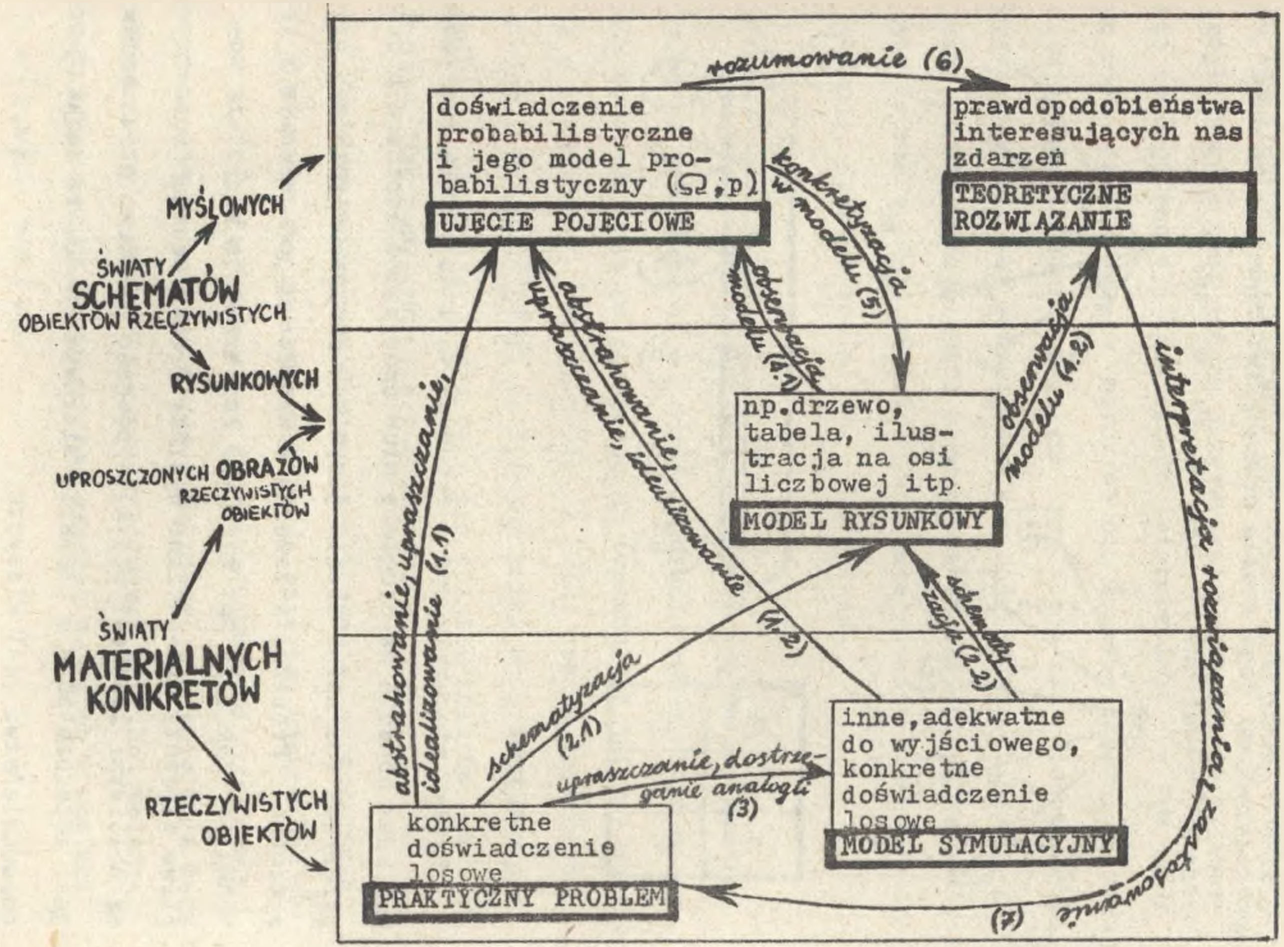
Rozważmy kilka przykładów ilustrujących różne możliwe drogi przejść od PRAKTYCZNEGO PROBLEMU natury probabilistycznej do jego TEORETYCZNEGO ROZWIĄZANIA.

Przykład 1.

Ala i Wojtek postanowili oddać w ręce przypadku sprawę rozstrzygnięcia, które z nich ma wyjść na spacer z psem. Zadecyduje rzut zwykłą kostką do gry: gdy wypadnie ścianka o parzystej liczbie oczek - idzie Ala, gdy o nieparzystej - Wojtek. Czy tak będzie sprawiedliwie, czy mają równe szanse?

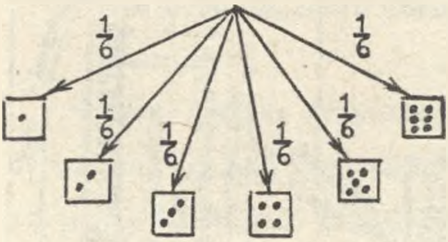
Konkretne doświadczenie losowe, to rzut kostką sześcienną, którą przygotowali Ala i Wojtek. Matematyzacja opisanej konkretnej sytuacji będzie w tym przypadku przebiegała drogą idealizowania przyrządu losującego, abstrahowania takiej cechy, jak symetria jego budowy, upraszczania poprzez zaniedbywanie innych jego cech. W ten sposób w naszej myśli pojawia się taki "idealny rzut idealną kostką" - doświadczenie probabilistyczne. Założona "idealna symetria budowy" przyrządu losującego pozwala przypisać mu model probabilistyczny o klasycznym rozkładzie prawdopodobieństwa:

$$\bigwedge_{1 \leqslant j \leqslant 6} p(\omega_j) = \frac{1}{6} \quad (\text{gdzie } \omega_j \text{ - wypadnie j oczek}).$$

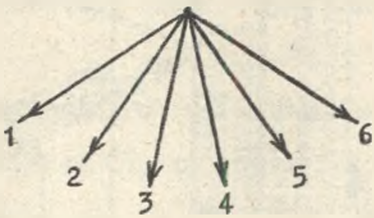

ŚWIATY
SCHEMATÓW
OBIEKTÓW RZECZYWISTYCH
MYŚLOWYCH
RYSUNKOWYCH
UPROSZCZONYCH OBRAZÓW
RZECZYWISTYCH
OBIEKTÓW
ŚWIATY
MATERIALNYCH
KONKRETÓW
RZECZYWISTYCH
OBIEKTÓW
doświadczenie probabilistyczne i jego model probabilistyczny (Ω;p)
UJĘCIE POJĘCIOWE
rozumowanie (6)
prawdopodobieństwa interesujących nas zdarzeń
TEORETYCZNE ROZWIĄZANIE
konkretyzacja w modelu (5)
obserwacja modelu (4.1)
obserwacja modelu (4.2)
np. drzewo, tabela, ilustracja na osi liczbowej itp.
MODEL RYSUNKOWY
abstrahowanie, upraszczanie, idealizowanie (1.1)
abstrahowanie, upraszczanie, idealizowanie (1.2)
schematyzacja (2.1)
schematyzacja (2.2)
upraszczanie, dostrzeganie analogii (3)
konkretne doświadczenie losowe
PRAKTYCZNY PROBLEM
inne, adekwatne do wyjściowego, konkretne doświadczenie losowe
MODEL SYMULACYJNY
interpretacja rozwiązania, zastosowanie (7)

rys. 3

To było przejście drogą (1.1) z rysunku 3. Swego rodzaju konkretyzacjami tego modelu probabilistycznego w rysunku (droga (5)) mogą być np. rys.4a, 4b, 4c, 4d:

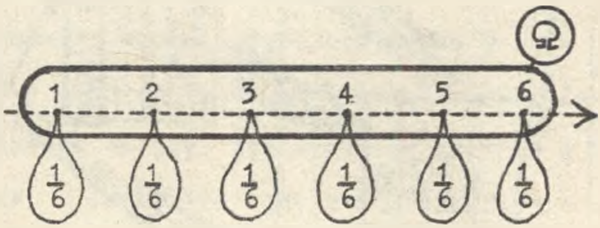


rys.4a



rys.4b

rys.4c



rys.4d

Drzewo stochastyczne z rysunków 4a i 4b różnią się kodami wyników; ponadto na drugim z nich opuszczono wartości p przy gałęziach (co można zrobić jedynie w przypadku rozkładu klasycznego). Prostokąty zawarte w kwadracie jednostkowym z rysunku 4c (zob.[3], np. str.111) reprezentują wszystkie możliwe elementy przestrzeni wyników "rzutu kostką" (oznaczone są możliwymi liczbami oczek) - równość pól tych prostokątów jest interpretacją w aspekcie miarowym faktu, że rozkład prawdopodobieństwa jest klasyczny.

Rozważane zadanie jest na tyle proste, że znalezienie jego teoretycznego rozwiązania nie wymaga graficznej konkretyzacji. Dobrze jest jednak przyzwyczajać uczniów do stosowania różnego rodzaju graficznych interpretacji - w tym także do poszukiwania nowych, bardziej dla uczniów dogodnych, przejrzystszych, ekonomiczniejszych - co staje się nieocenione w przypadku bardziej skomplikowanych doświadczeń losowych, a jest częścią umiejętności bardzo ważnej dla całego matematycznego (i nie tylko!) kształcenia - umiejętności kodowania informacji, przetwarzania ich, dekodowania.

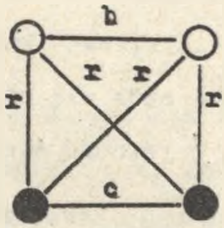
Przykład 2.

Rozważmy wyjściową sytuację analogiczną do poprzedniej, tyle że tym razem o jej rozstrzygnięciu zadecydować ma wynik doświadczenia polegającego na losowaniu 2 kulek z woreczka o zawartości: 2 kulki białe, 2 kulki czarne (nierozróżnialne w dotyku); jeśli wylosowane kulki będą tego samego koloru - idzie Ala, jeśli będą się różniły kolorem - Wojtek. Pytamy, jak poprzednio, o równość szans.

Idąc drogą abstrahowania, idealizowania, upraszczania (1.1) dochodzimy do, adekwatnego do opisanej konkretnej sytuacji, pojęcia doświadczenia probabilistycznego o trzech możliwych wynikach: b - obie kule będą białe, c - obie kule będą czarne, r - kule będą w różnych kolorach oraz do teoretycznego ujęcia interesujących nas zdarzeń losowych w postaci:

$A = \{b, c\}$, $W = \{r\}$.

Rozwiązując zadanie tego typu uczniowie (a zdarza się, że i studenci), częstokroć bez jakiejkolwiek analizy, odpowiadają, że szanse są równe - bo tyle samo jest kul białych i czarnych (zob. [5], §8). Bywają i inni, którzy - przeprowadziwszy analizę w rodzaju powyższej - stwierdzają: P(A)=2P(W), bo zdarzeniu A sprzyja 2 razy więcej wyników. Ani jedni, ani drudzy nie wzięli pod uwagę drugiego elementu modelu probabilistycznego, a mianowicie funkcji p (zresztą pierwsi z opisanych nie zainteresowali się także przestrzenią Ω ; drudzy utknęli w drodze (1.1) na jej wyznaczeniu). Na ogół określenie funkcji p w tym przypadku sprawia uczniom kłopot, nasuwają im się błędne intuicje (rozkład klasyczny). Tymczasem bardzo łatwo można dojść do tego określenia drogą schematyzacji (droga (2.1)) opisanego doświadczenia w modelu rysunkowym (rys.5) i obserwacji tego modelu (droga (4.1)).



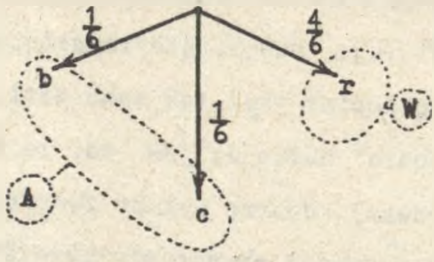
rys.5

Wyznaczony model probabilistyczny:

$\Omega = \{b, c, r\}$, p

ω	b	c	r
$p(\omega)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$

można skonkretyzować (droga (5)) na drzewie stochastycznym (rys.6):



rys.6

Opierając się na zakodowanych na tym drzewie informacjach dochodzimy na drodze rozumowania (drogi (4.2) i (6)) do rozwiązania teoretycznego (niezgodnego z pierwotnymi intuicjami wielu uczniów!) postaci $P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$, $P(W) = \frac{2}{3}$.

Interpretując uzyskane rezultaty w wyjściowej sytuacji (droga (7)) otrzymujemy wniosek: szanse Ali na spacer z psem są dwukrotnie mniejsze, niż szanse Wojtka.

Przykład 3 (zob. także [4], str.28-30).

Rozważmy doświadczenie losowe związane z sytuacją, w której łakomczuch Wojtek zastanawia się nad szansami na to, że w bułce, którą wybrał, będzie więcej rodzynków, niż w tej, którą zostawił Ali (mamy Ali i Wojtka wsypała do ciasta 3 rodzynki i zrobiła z niego 2 bułeczki).

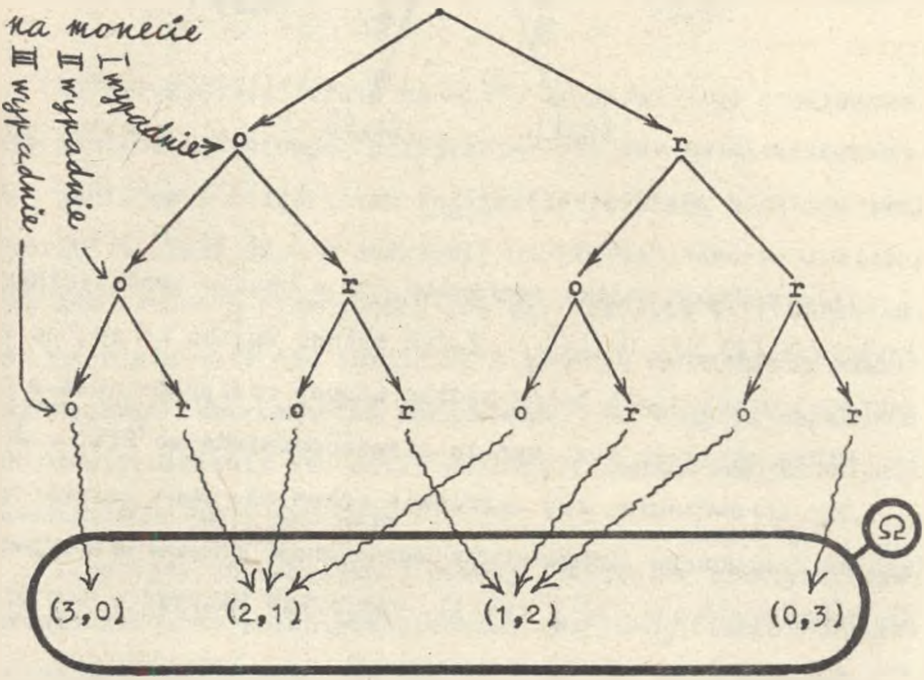
Przejście drogą (1.1) jest - jak poprzednio - nietrudne do pewnego momentu, a mianowicie do wyznaczenia Ω :

liczba rodzynków w I bułce	0	1	2	3
liczba rodzynków w II bułce	3	2	1	0

Ale przy określaniu rozkładu prawdopodobieństwa znowu zdarzają się błędne intuicje, sugerujące zapostulowanie rozkładu klasycznego (bo przecież jest tak samo możliwe, że dany rodzynek "wybrał sobie" bułkę I, jak to, że "wybrał" II - argumentują uczniowie). Dobrze byłoby zweryfikować słuszność takich podejrzeń w drodze eksperymentowania. Ale powtarzanie doświadczenia polegającego na pieczeniu bułek po losowym rozdzieleniu między nie rodzynków, wsypanych do wyrabianego ciasta - nie jest wyjściem najekonomiczniejszym. I tu rodzi się pomysł zastąpienia tego doświadczenia innym, o analogicznym przebiegu. Wyszukanie takiego doświadczenia wymaga od umysłu wysiłku upraszczania wyjściowej sytuacji, odrywania cech dla niej najistotniejszych, dostrzeżenia analogii tych istotnych cech z istotnymi cechami konkretnego doświadczenia losowego (droga (3)).

Modelem symulacyjnym dla rozważanego w tym przykładzie doświadczenia może być np. rzut trzema nierozróżnialnymi monetami i obserwacja liczby wrzuconych orłów (rodzynków, które trafiły do I bułki) i reszek (rodzynków w II bułce). "Symetria budowy" monety jest odpowiednikiem "symetryczności" sytuacji przy "wyborze" bułki przez rodzynek (obie bułki mają w nim równe szanse).

Powtarzając wielokrotnie to nowe doświadczenie losowe (czyli symulując doświadczenie wyjściowe) możemy estymować prawdopodobieństwa interesujących nas zdarzeń, podając ich ocenę jakościową. By jednak podać ocenę ilościową, trzeba wyznaczyć model probabilistyczny. Przedstawiając schematycznie rozważane doświadczenie (droga (2.1)) otrzymujemy np. taki model rysunkowy (rys.7):



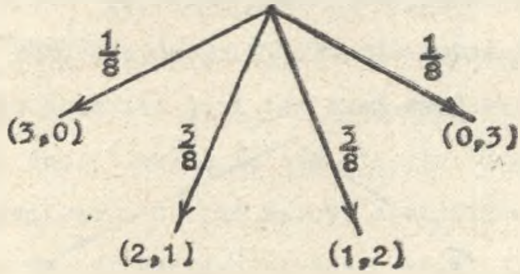
rys.7

Z rysunku tego odczytujemy (droga (4.1)), że

p

ω	(3,0)	(2,1)	(1,2)	(0,3)
p(ω)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

co można zilustrować na odpowiadającym takiemu modelowi probabilistycznemu (droga (5)) drzewie stochastycznym (rys.8):



rys.8

Interesujące Wojtka zdarzenie, to w ujęciu teoretycznym zbiór $W = \{(3,0),\ (2,1)\}$. Zatem szanse Wojtka na to, że w wybranej przez niego bułce będzie więcej rodzynków, niż w bułce, którą zostawił Ali, wyraża prawdopodobieństwo $P(W) = \frac{1}{2}$.

Dla sprawdzenia, czy uczniowie rozumieją sens uzyskanego wyniku liczbowego (interpretacja teoretycznego rozwiązania w wyjściowej sytuacji - droga (7) z rys.3), warto ich zapytać w tym miejscu np:

- jakie są szanse Ali na to, że w jej bułce będzie więcej rodzynków, niż w bułce Wojtka;
- czy Wojtek, wybierając bułkę jako pierwszy, zwiększa swoje szanse na to, że więcej rodzynków będzie w jego bułce.

Na pytania te (zwłaszcza drugie z nich) stosunkowo często - i to właśnie wbrew uzyskanemu wynikowi - uczniowie odpowiadają błędnie.

Uwaga: Wraz ze wzrostem liczby monet (rodzynków) rysunek (odpowiednik rys.7) staje się coraz bardziej nieprzejrzysty. A to dostarcza bodźca do przejścia na drogę innego postępowania: rozumowania poprzez wykorzystanie analogii tych przypadków z przypadkiem rozważanym lub poszukiwania innego rodzaju modelu rysunkowego i oparcia na nim rozumowania.

O NIEBEZPIECZEŃSTWACH MIESZANIA PRZEDMIOTÓW TEORII Z RZECZYWISTYMI OBIEKTAMI W NAUCZANIU RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Na przykładzie "rzutu monetą", najprostszego doświadczenia probabilistycznego, przyjrzyjmy się pewnym kontrowersyjnym zabiegom i rozważaniom przytrafiającym się niekiedy tym, którzy związani są - w praktyce, czy tylko w teorii - z nauczaniem rachunku prawdopodobieństwa. Zabiegom i rozważaniom zdającym się wyraźnie świadczyć o myleniu doświadczenia probabilistycznego z doświadczeniem rzeczywistym oraz mogącym prowadzić do nierozróżniania ich przez uczniów i utożsamiania przez nich prawdopodobieństwa z częstością.

Zacznijmy od rozważenia pewnej sytuacji z praktyki nauczania rachunku prawdopodobieństwa. Na lekcji rachunku prawdopodobieństwa prowadzący dokonuje serii rzutów monetą, uczniowie zaś zliczają, ile razy w przeprowadzonej serii rzutów wypadł orzeł, a ile - reszka. Po 16 rzutach liczby uzyskanych orłów i reszek zrównały się, w związku z czym eksperymentowanie zostało przerwane i wieńczone radosnym wnioskiem: "jak widać, w rzucie monetą prawdopodobieństwo uzyskania orła jest równe prawdopodobieństwu uzyskania reszki". I tylko pozornie całe zło powyższego zabiegu tkwi w zbyt małej - do wyciągania jakichkolwiek wniosków - liczbie przeprowadzonych rzutów oraz przerwaniu eksperymentowania w momencie uzyskania tej samej liczby orłów, co reszek. Na ile bowiem poprawiłaby się sytuacja, gdyby rzucano tą monetą chociażby i ... 500 razy? Znane są z praktyki szkolnej, związane z takimi dłuższymi eksperymentowaniami, niestety także nie najszczęśliwsze zabiegi (czy raczej "wybiegi") w rodzaju: "sami widzicie, że gdybyśmy rzucali bardzo dużo (tzn. - ?) razy, to w końcu dostaniemy tyle samo orłów, co reszek" (?!), czy: "widać, że cały czas mamy prawie tyle samo orłów, co reszek" z wnioskiem: "a więc możemy powiedzieć, że w rzucie monetą prawdopodobieństwo wyrzucenia orła jest równe prawdopodobieństwu uzyskania reszki".

Nie zadowala nas także propozycja przedstawiona w jednym z podręczników dla klasy VI ([1], str.226, przykład 33). Oto fragmenty z tego podręcznika (podkreślam kontrowersyjne wnioski):

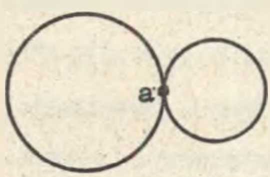
"Przypuśćmy, że na 500 rzutów monetą (np. 2 zł) otrzymaliśmy 252 razy reszkę i 248 razy orła. Częstość pojawienia się reszki |...| wynosi $\frac{252}{500} = 0{,}504$. Częstość zaś pojawienia się orła wynosi $\frac{248}{500} = 0{,}496$. Te wyniki pozwalają przypuszczać, że i przy dalszym rzucaniu monetą (np. 1000 razy) częstość pojawienia się reszki będzie w przybliżeniu równa częstości pojawienia się orła. **Mówimy wówczas, że zdarzenia $\{r\}$ i $\{o\}$ są jednakowo prawdopodobne**".

"|...| Tym razem częstość pojawienia się reszki wynosi $\frac{194}{500} = 0{,}388$, zaś częstość pojawienia się orła wynosi $\frac{206}{500} = 0{,}612$. Nie mamy teraz podstaw do przypuszczenia, że po zwiększeniu liczby rzutów, np. do 1000 częstość poja-

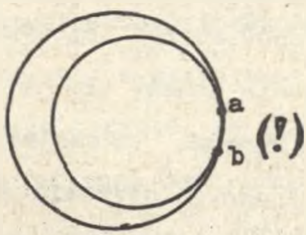
wienia się reszki będzie równa częstości pojawienia się orła. Wyrażamy to mówiąc, że zdarzenia {r} i {o} nie są jednakowo prawdopodobne".
"A do jakich przypuszczeń podstawą będą np. częstości 0,568 i 0,432?" - zapyta uczeń (i - co wtedy?!).

Ale zacytowany tekst budzi jeszcze inne, dużo poważniejsze zastrzeżenia. Z podkreślonych uwag wynika jednoznacznie wniosek: w rzucie monetą prawdopodobieństwa zdarzeń {o} i {r} zależą od monety, którą to doświadczenie wykonujemy - mogą być równe, ale mogą być i różne (!).

Takie postawienie sprawy jest w pewnym sensie analogiczne do sytuacji, w której - nauczając geometrii - twierdzilibyśmy np., że częścią wspólną 2 okręgów może być punkt, ale może być i łuk - a przecież zdarza się, że zaskoczy nauczyciela takim stwierdzeniem uczeń utożsamiający konkrety świata materialnego z wyabstrahowanymi z nich pojęciami matematycznymi, popierając swój sąd rysunkami w rodzaju poniższych (rys.9a i rys.9b):



rys.9a



rys.9b

Tak jak np. prowadzona przez prekursorów geometrii obserwacja rysowanych kresek, kawałków drutu, krawędzi blatu stołu, śladów stóp osoby idącej najkrótszą drogą na dany cel itp. doprowadziła - na drodze abstrahowania od niektórych cech (takich jak grubość czy kolor) tych konkretnych przedmiotów do powstania teoretycznego pojęcia odcinka, tak obserwacja konkretnych monet i rzutów nimi doprowadziła do wyabstrahowania teoretycznego doświadczenia o modelu klasycznym:

ω	O	T
$p(\omega)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

-doświadczenia probabilistycznego, któremu nadano także nazwę "rzut monetą", teoretycznego schematu konkretnych doświadczeń losowych, przeprowadzanych przy użyciu konkretnych monet. Oceny (jakościowej i wynikającej z niej ilościowej) rozkładu prawdopodobieństwa p w "rzucie monetą" dokonać można a priori, obserwując własności fizyczne konkretnych monet i uznając jedne z nich, wspólne dla wszystkich monet, za istotne (jak "symetria" budowy, jednorodność materiału), inne zaś za mające tak niewielki wpływ na wynik przeprowadzanych przy ich użyciu doświadczeń losowych (jak np. kształt rysunku na danej stronie monety czy jej wielkość), że decydujemy się od nich abstrahować. Dokonujemy w ten sposób w myśli idealizacji tych oglądanych przedmiotów i idealizacji związanych z nimi konkretnych doświadczeń losowych - w naszej myśli powstaje ich wyidealizowany schemat, o narzuconym przez przeprowadzony proces abstrahowania rozkładzie prawdopodobieństwa. (Eksperymentowanie różnymi konkretnymi monetami daje nam podstawy do uznania, że przypisana "idealnemu" doświadczeniu o dwuelementowej przestrzeni wyników i klasycznym rozkładzie prawdopodobieństwa nazwa "rzut monetą" jest adekwatna, gdyż model ten w zadowalającym stopniu przystaje do konkretnych rzutów monetami - ale jest to już zagadnienie wykraczające poza zakres propedeutyki rachunku prawdopodobieństwa).

W przypadkach doświadczeń losowych takich, jak rzut monetą, czy zwykłą kostką do gry, dla których poprawne odpowiedniki teoretyczne narzucają się stosunkowo naturalnie, lepiej w nauczaniu zrezygnować z eksperymentowania, a rozważania związane z oceną prawdopodobieństw zdarzeń przeprowadzać od razu w tym teoretycznym modelu (ewentualnie z pomocą modelu rysunkowego), a nie na podstawie obserwacji częstości tych zdarzeń.

Eksperymentowanie może tu jedynie zaciemnić obraz modelu probabilistycznego i powodować utożsamianie przez uczniów elementów teorii z elementami rzeczywistości oraz wyrobić przekonanie o niezbędności żmudnego eksperymentowania dla formułowania jakichkolwiek wniosków natury probabilistycznej. Nakłanianie uczniów do eksperymentowania w przypadkach takich bardzo prostych doświadczeń może sprawić, że potem na pytanie o prawdopodobieństwa wyników jakiegoś doświadczenia losowego uczniowie ci reagować będą odpowiedzią - schematem: trzeba wziąć ten przyrząd i powtórzyć to doświadczenie wiele razy a potem wyznaczyć częstości wyników.

Inna jest oczywiście sytuacja w przypadku dośw adczeń losowych, które nie mają teoretycznych odpowiedników - doświadczeń probabilistycznych o takich samych nazwach (np. podrzucanie pudełkiem zapałek) i dla których a priori nie narzuca nam się żaden model - z braku łatwo matematyzowalnych cech przyrządu losującego (np. gdy przyrządem takim będzie wspomniane pudełko zapałek). Wtedy rozważania dotyczące modelu prowadzić będziemy na podstawie zgromadzonych danych statystycznych, na podstawie wyznaczonych częstości; będą to wnioski o charakterze ocen jakościowych, dotyczące pewnych cech rozkładu prawdopodobieństwa, jego jakościowa estymacja (w początkowym okresie nauki rachunku prawdopodobieństwa o takie tylko oceny w tego typu przypadkach nam chodzi).

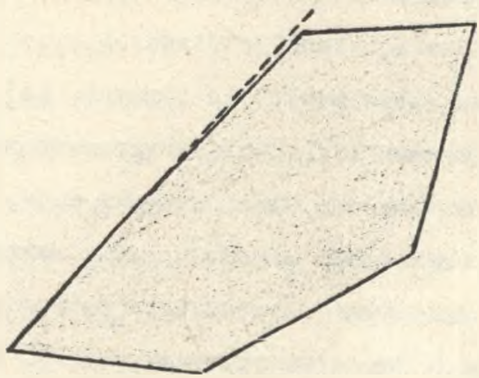
Cenniejszą (od opisanej tu) funkcję pełni w nauczaniu eksperymentowanie w przypadku prób dopasowywania przez uczniów do rozważanego przez nich doświadczenia losowego złego - skutkiem przeoczenia pewnych przesłanek - apriorycznego modelu probabilistycznego. Uzyskując wówczas w wyniku wielokrotnych powtórzeń doświadczenia efekty w sposób istotny niezgodne z pierwotną intuicją ucznia, budzimy w nim niepokój twórczy, uruchamiając aktywność intelektualną, nakierunkowaną na zweryfikowanie przyjętych a priori założeń o rozkładzie prawdopodobieństwa.

Wracając do cytowanego tekstu podręcznika, stwierdzamy ostatecznie:

1/ można powiedzieć, że w serii rzutów tą monetą uzyskaliśmy takie czy inne częstości pojawiania się orła czy reszki, ale nie można (!) mówić o prawdopodobieństwie dla tej właśnie monety, jako o czymś odmiennym od prawdopodobieństwa dla "rzutu monetą" jako pewnego typu doświadczenia:

2/ nie można zatem mówić, że zdarzenia $\{o\}$ i $\{r\}$ są dla jednej monety jednakowo, a dla innej niejednakowo prawdopodobne (!); dla różnych monet mogą się różnić częstości danego wyniku (które obliczamy po wykonaniu serii rzutów), ale prawdopodobieństwa, które są liczbową oceną szans na uzyskanie danego wyniku (szans - które są istotne tylko przed wykonaniem rzutu), to elementy wspólne dla wszystkich losowych doświadczeń podpadających pod typ "rzut monetą";

3/ po zapostulowaniu - w drodze abstrahowania, upraszczania, idealizowania - teoretycznego schematu doświadczalnego typu "rzut monetą", o klasycznym rozkładzie prawdopodobieństwa, nie można mówić, że dla jakiejś monety zdarzenia $\{o\}$ i $\{r\}$ w rzucie nie są jednakowo prawdopodobne; można jedynie - na podstawie uzyskanych dla niej w wyniku wielokrotnego eksperymentowania częstości - powiedzieć, że zbyt się one różnią, by monecie tej móc przypisać model probabilistyczny "rzutu monetą", o jakim myślimy w teorii, by rzut tą monetą można było uznać za konkretny model rozważanego doświadczenia probabilistycznego (tak jak np. niedokładnie wykonany rysunek (rys.10) sześciokąta uznany zostanie raczej za model siedmiokąta, gdyż jego cechy lepiej odpowiadają tej drugiej figurze geometrycznej) - z uczniami możemy się umówić, że takie monety, o dodatkowych, specyficznych właściwościach (jak np. jakaś



rys.10

niejednorodność materiału), nie rzucających się w oczy, a jednak niebagatelnych z punktu widzenia przebiegu rzeczywistego doświadczenia będziemy np. określać krótko mianem "fałszywych" i że nie będą nas one interesować, że nie będziemy się zajmować poszukiwaniem adekwatnych dla nich modeli probabilistycznych.

Punktem wyjścia do prowadzenia w klasie rozważań natury probabilistycznej, bazujących na doświadczeniach losowych związanych z monetami, mogłaby być dyskusja zainspirowana np. początkowym fragmentem zaproponowanej w [4] (str.56-58) listy pytań - problemów:

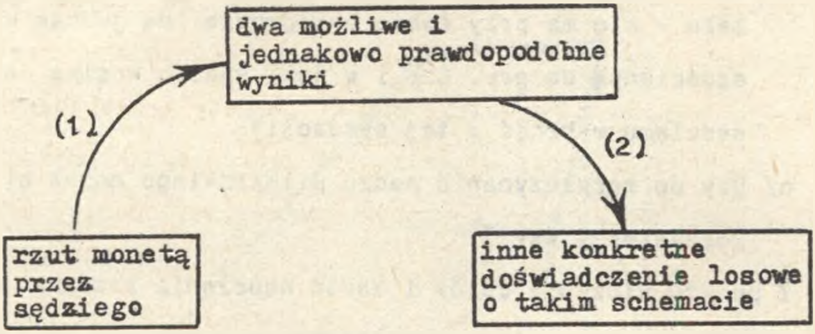
"a/ Przed rozpoczęciem meczu piłkarskiego sędzia podrzuca do góry monetę. Dlaczego on to robi? Czy jest to jakiś przesąd?

b/ Sędzia jest już na boisku, ale - jak się nagle okazało - nie ma przy sobie ani grosza. Ma jednak kostkę sześcienną do gry. Czy i w jaki sposób kostka pozwoli sędziemu wybrnąć z tej sytuacji?

c/ Czy do rozpoczynania meczu piłkarskiego można by wykorzystać 4 asy?"

Z punktu widzenia celów i zadań nauczania rachunku prawdopodobieństwa ważne jest wykształcenie u uczniów umiejętności wyznaczania modeli probabilistycznych dla rozmaitych doświadczeń losowych. Ważne jest jednak także i to, by uczniowie umieli rozpoznawać wśród wielu doświadczeń losowych doświadczenia o "wspólnym" (izomorficznie) modelu oraz by do danego modelu probabilistycznego potrafili dopasować odpowiednie doświadczenie losowe, odpowiedni przyrząd losujący (czyli - by potrafili skonkretyzować ten model probabilistyczny w różnych rzeczywistych modelach).

Pytania o to, czym sędzia może zastąpić monetę, czy nadają się do tego karty, kostka, zapałki itd. - i jak ich wtedy użyć, chociaż są pytaniami bezpośrednio o konkretne doświadczenia, konkretne przyrządy, to jednak wymagają od ucznia - niewerbalizowanych wprawdzie - rozważań wokół modeli probabilistycznych. Rozumowanie ucznia, jego poszukiwania przebiegają według schematu (rys.11):



rys.11

(1) - to droga dostrzegania i odrywania istotnych cech wyjściowego konkretnego doświadczenia losowego, idealizowania, schematyzowania, zakończona zinterioryzowaną konkluzją dotyczącą cech jego teoretycznego odpowiednika - doświadczenia probabilistycznego - wyrażonych w modelu probabilistycznym;

(2) - to droga poszukiwania innego doświadczenia losowego, czyniącego zadość warunkom wyabstrahowanego na drodze (1) modelu probabilistycznego.

Gdy pytamy uczniów, czy sposób losowania piłki przed meczem za pomocą monety daje obydwu drużynom jednakowe szanse na jej uzyskanie, zdecydowana większość uczniów odpowiada bez wahania: "tak, oczywiście". Dlaczego? - "bo moneta ma 2 strony, może upaść na ziemię albo jedną, albo drugą stroną". Przytoczona wypowiedź uczniów jest formalnie poprawna - w znaczeniu: prawdziwa jest implikacja, którą się posługują - mająca postać: "moneta ma 2 strony, może upaść na ziemię albo jedną, albo drugą stroną" (prawda), z tego wynika, że "obydwa wyniki rzutu monetą, są jednakowo prawdopodobne" (prawda w przyjmowanym - w związku z "symetrią budowy" monety - klasycznym modelu). A jednak powinna w nas zasiać ziarno dydaktycznego niepokoju. Może bowiem kryć za sobą rozumowanie, oparte na błędnym utożsamianiu faktu, że każdy z dwu możliwych wyników stanowi połowę wszystkich wyników z faktem równego rozkładu prawdopodobieństw, co powoduje częstokroć tendencję do bezkrytycznego przypisywania każdemu doświadczeniu o dwu wynikach klasycznego modelu probabilistycznego oraz przedłużenie tej tendencji na dowolne doświadczenie losowe o k wynikach. Pytając uczniów, czy sędzia mogłby zamiast monetą posłużyć się pinezką, zauważamy najczęściej brak takiego jak poprzednio pełnego przekonania, brak jednomyślności; część uczniów ma wątpliwości, chociaż początkowo nie wszyscy z nich uświadamiają sobie w pełni ich źródło - ale indagowani, przyznają się, że tym, co budzi ich niepokój, jest "inna niż monety budowa". Mamy oczywiście doskonałą okazję - motywację do sprawdzenia (na drodze eksperymantowania), czy słusznie zauważoną istotną "asymetrię" budowy uznaliśmy za podstawę do kwestionowania klasyczności modelu probabilistycznego doświadczenia losowego takiego typu. Ale to nie oznacza jeszcze zażegnania wspomnianych powyżej niebezpieczeństw. Ogromną wartość dydaktyczną mają w tej sytuacji zadania probabilistyczne dotyczące doświadczeń o skończonych przestrzeniach wyników i nieklasycznych rozkładach prawdopodobieństwa, ale związanych z takimi "porządnymi" generatorami rozkładów klasycznych jak monety czy zwykłe kostki do gry.

LITERATURA

[1] T. Dąbrowska i J. Przyjemski, Matematyka 6, WSiP, W-wa, 1980.

[2] Z. Krygowska i B. Nowecki, Geometria, Oświata i Wychowanie, 13, 14(1975) i 15(1975).

[3] A. Olecka, Pewna koncepcja strukturalizacji nauczania początków rachunku prawdopodobieństwa', Dydaktyka Matematyki, tom 3, Roczniki PTM, seria V, PWN, W-wa, 1984.

[4] A. Płocki, Propedeutyka rachunku prawdopodobieństwa w klasach IV-VII (zarys dydaktyki), Wydawnictwo IKN im. Wł. Spasowskiego w Warszawie, W-wa, 1983.

[5] A. Płocki, Zadania probabilistyczne jako element kształcenia matematycznego, Wydawnictwo Naukowe WSP w Krakowie, Kraków, 1985.