BARBARA WILK

Sytuacje problemowe w nauczaniu propedeutyki rachunku prawdopodobieństwa

PRZYKŁADY

Artykuł ten przedstawia pewne propozycje - przykładowe sytuacje problemowe, mogące stać się punktami wyjścia do organizowania w klasie aktywności matematycznej uczniów - skupionej wokół problematyki probabilistycznej, ale nie do niej jedynie ograniczonej.

Rozdział 1 zawiera refleksje dotyczące dydaktycznego opracowania zagadnień związanych z doświadczeniami losowymi typu "rzuty k monetami". Wychodząc od gry, dostarczającej uczniom poprawnych intuicji ocen jakościowych rozkładu prawdopodobieństwa dla "rzutu trzema monetami" oraz inspirującej poszukiwania teoretycznego uzasadnienia dla tych intuicji, pokazuje się możliwości dydaktyczne wykorzystania dostępnego uczniom aparatu matematycznego do przedłużania zagadnienia opisu i ilustracji modeli probabilistycznych "rzutów k monetami" na dowolne $k (\geqslant 1)$.

W rozdziale 2 przedstawiona jest propozycja pewnego, nietypowego dla lekcji rachunku prawdopodobieństwa, podejścia dydaktycznego. Propozycja ta polega na stawianiu uczniów wobec wymagających losowego rozstrzygnięcia konkretnych sytuacji problemowych - zadaniem uczniów jest ocenianie różnych doświadczeń losowych pod kątem ich przydatności do danej sytuacji problemowej oraz określanie doświadczeń losowych, czyniących zadość warunkom zadanym przez tę sytuację.

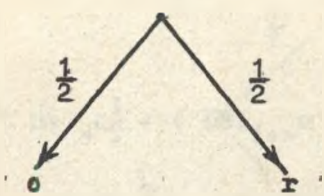
W rozdziale 3 opisany jest przykład wplatania w lekcje rachunku prawdopodobieństwa problemów z innych działów matematyki. W odpowiednio do tego celu zaaranżowanej sytuacji problemowej ukazano m.in. możliwości pobudzania uczniów do:

- weryfikowania wstępnych hipotez (w opisanym przykładzie - opartych na błędnych intuicjach równoliczności pewnych zbiorów) w drodze rozumowań dedukcyjnych;
- podejmowania prób przedłużania rozważanych problemów.

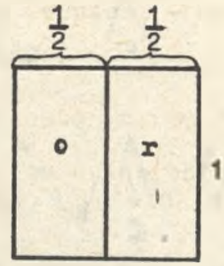
1. O TYPOWYCH DOŚWIADCZENIACH LOSOWYCH ZWIĄZANYCH Z MONETAMI

1.1 Uwagi wstępne

Graficzną reprezentacją modelu probabilistycznego "rzutu monetą" (Ω_1, p_1) może być drzewo stochastyczne (rys. 1a) lub diagram kwadratowy, w którym prawdopodobieństwo wyniku jest polem reprezentującego ten wynik prostokąta (rys. 1b) (zob. [3], np. str.111):

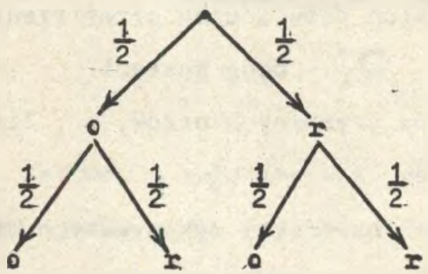


rys.1a

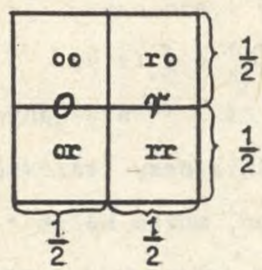


rys.1b

Aby zilustrować model probabilistyczny "dwukrotnego rzutu monetą" (Ω_2, p_2) wystarczy do powyższych ilustracji "dołożyć" graficzną reprezentację II etapu (rys.2a i 2b):



rys.2a



rys.2b

Powyższe ilustracje graficzne pozwalają zauważyć, że: rozpatrując doświadczenie typu "k-krotny rzut monetą" $(k \geqslant 1)$ będziemy mieli zawsze:

1) $$\bigwedge_k n(\Omega_{k+1}) = n(\Omega_k) \cdot 2 = 2^{k+1},$$

gdzie $n(\Omega_k)$ oznacza liczbę elementów przestrzeni Ω_k wyników "k-krotnego rzutu monetą";

2) $$\bigwedge_{k} \bigwedge_{\omega \in \Omega_k} p_k(\omega) = (\tfrac{1}{2})^k;$$

3) $$\bigwedge_{k} \bigwedge_{\omega \in \Omega_k} \bigwedge_{\varpi \in \Omega_{k+1}} p_{k+1}(\varpi) = \tfrac{1}{2} p_k(\omega)$$

gdzie p_j oznacza rozkład prawdopodobieństwa na Ω_j.

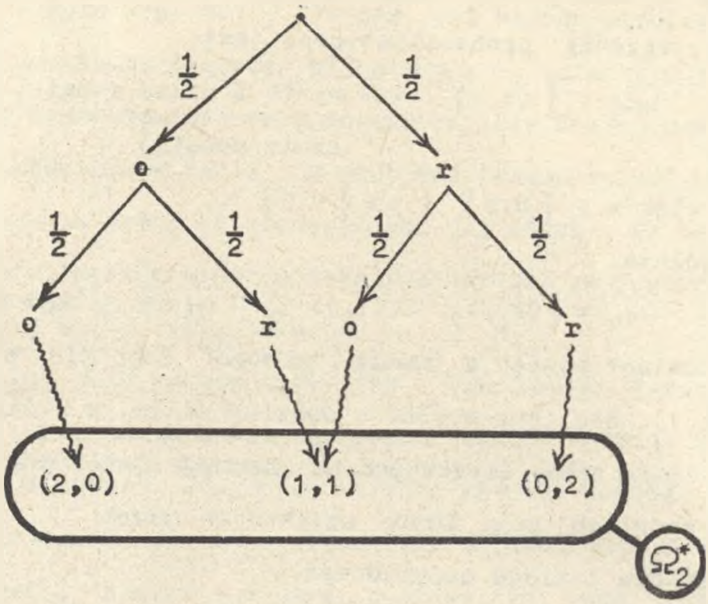
A więc: dla każdego k (Ω_k, p_k) jest modelem klasycznym - 2), liczba wyników ze wzrostem k o 1 wzrasta dwukrotnie - 1), zaś prawdopodobieństwa dwukrotnie maleją - 3).

Gdyby jednak interesować się jedynie ilościami wyrzuconych orłów i reszek, to dla takich doświadczeń przestrzenie wyników - oznaczymy je przez Ω_k^* - będą postaci:

$$\Omega_k^* = \{ (x,y): \ x \text{ - liczba uzyskanych orłów, } y \text{ - liczba uzyskanych reszek, } x + y = k \}.$$

Oczywiście przy takim spojrzeniu na efekty wykonywanych doświadczeń, można każde z nich zastąpić rzutem k monetami równocześnie. W poprzednim przypadku także można by to zrobić - tyle że monety muszą być wtedy łatwo rozróżnialne (np. o różnej nominalnej wartości) i niezbędne jest ustalenie, którą z nich uważać będziemy za pierwszą, drugą itd., a wyniki odczytuje się - zamiast: za I razem, za II razem itd. - następująco: na I monecie, na II monecie itd.

Odpowiedź na pytanie, jaki jest w przypadku k = 2 rozkład prawdopodobieństwa, sugeruje rysunek 3.



rys.3

Każdemu z wyników (0,2) i (2,0) przestrzeni Ω_2^* odpowiada jeden wynik "dwukrotnego rzutu monetą", wynikowi (1,1) - dwa różne wyniki tego doświadczenia. A więc

$$p_2^*((0,2)) = p_2^*((2,0)) = \frac{1}{4},$$

$$p_2^*((1,1)) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

czyli model **nie jest klasyczny** (co bynajmniej nie jest dla uczniów z góry oczywiste!).

Umawiamy się z uczniami, że mówiąc o **"dwukrotnym rzucie monetą"** (ogólnie: k-krotnym, $k \geqslant 1$) będziemy mieć zawsze na myśli doświadczenie polegające na obserwacji wyników 2 kolejnych (k kolejnych) "rzutów monetą", czyli doświadczenie, którego przestrzenią probabilistyczną jest:

$$\Omega_2 = \{(x,y) : x \text{ - wynik I rzutu monetą, } y \text{ - wynik II rzutu monetą}\}$$

(a więc $x \in \{o,r\}$ i $y \in \{o,r\}$).

(Ogólnie:

$$\Omega_k = \{(x_1,x_2,\dots,x_k): x_j \text{ - wynik j-tego rzutu monetą}\}).$$

Natomiast mówiąc o "rzucie 2 monetami" (ogólnie k monetami, $k \geqslant 1$), będziemy myśleć o doświadczeniu, w którym obserwujemy liczbę orłów uzyskanych na rzuconych równocześnie 2 monetach (k monetach) oraz liczbę uzyskanych reszek.

Stąd dla takiego doświadczenia:

$$\Omega_2^* = \{(x,y): x \text{ - liczba orłów, } y \text{ - liczby reszek, } x+y=k\}$$

(gdzie oczywiście $x \in \{0,1,2\}$, $y \in \{0,1,2\}$).

(Ogólnie:

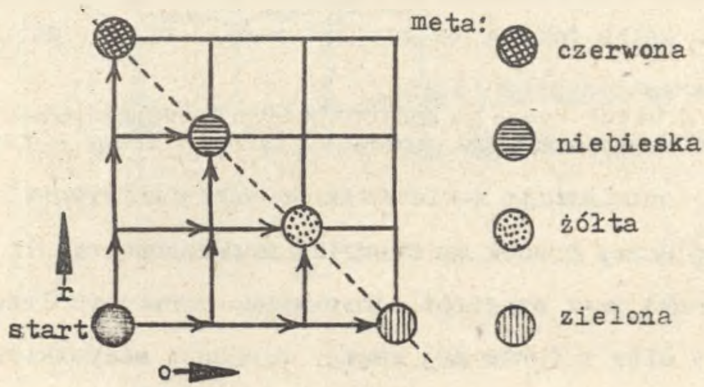
$$\Omega_k^* = \{(x,y): x \text{ - liczba orłów, } y \text{ - liczba reszek, } x+y=k\}).$$

1.2 Uwagi dydaktyczne dotyczące "rzutów k monetami".

Realizację w klasie zagadnień związanych z doświadczeniami typu "rzut k monetami", doświadczeniami, z którymi częstokroć łączą się błędne intuicje uczniów dotyczące rozkładów prawdopodobieństwa, wiązać należy - zwłaszcza w pierwszych latach nauki rachunku prawdopodobieństwa - z grami i zabawami, dostarczającymi silnej motywacji do rozważań teoretycznych. "Dlaczego on ciągle wygrywa?", "Ta gra jest niesprawiedliwa!" - protestują uczniowie częściej przegrywający; łatwo wtedy skierować ich zaangażowanie emocjonalne na tory poszukiwań racjonalnych przesłanek faktu, że gra jest "niesprawiedliwa" oraz dociekań, jak można by zmodyfikować jej reguły, by była "sprawiedliwa". Punktem wyjścia może być np. gra analogiczna do proponowanej w [1] (str. 57 - 58).

Idea tej gry jest następująca: gra 4 zawodników. Każdy z nich wybiera sobie jedno z kółek planszy (rys.4) - każdy inne. Na starcie stoi pionek. Zawodnicy kolejno rzucają monetą. Jeśli wypadnie orzeł, pionek przesuwa się o jeden odcinek drogi w prawo, jeśli reszka - w górę. Wygrywa ten, kto wybrał kółko, do którego doszedł pionek (po 3 rzutach - co łatwo zauważyć).

Błądzenie losowe pionka po planszy może się zakończyć 4 różnymi wynikami - dotarciem do któregoś z 4 kolorowych kółek linii mety (na rys.4 są to kółka w kolorach - od lewego górnego rogu planszy zaczynając: czerwone, niebieskie, żółte, zielone).



rys.4

Wybierając pola przed I rozgrywką uczniowie kierują się swoimi upodobaniami do określonych kolorów. Po pewnym czasie trwania gry zaczynają zauważać, że zdecydowanie uprzywilejowanymi są ci, którzy wybrali pola środkowe. Dyskusja: czy gra jest losowa, czy losowo-strategiczna? Co jest powodem tego, że pokrzywdzeni są uczniowie, którzy wybrali pola skrajne? - zainspirowana zostaje aktywnością uczniów w czasie zabawy. I aktywność ta w niewymuszony sposób przeniesiona zostaje na grunt teoretycznych dociekań dotyczących modelu przeprowadzanego doświadczenia losowego, uzasadniania, że nie jest on klasyczny.

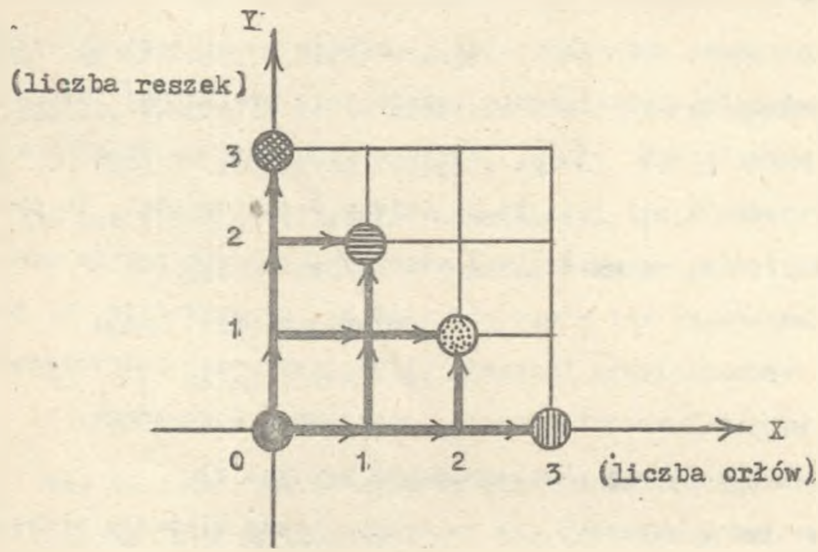
Analizując możliwości dotarcia pionka do poszczególnych pól-kółek uczniowie zauważają, że:

- do kółka czerwonego prowadzi tylko 1 droga - można by ją zakodować: rrr (albo (0,3) - 0 orłów, 3 reszki);
- do kółka niebieskiego prowadzą aż 3 różne drogi: rro, ror, orr - chociaż z punktu widzenia grających (!) są to drogi tego samego typu (bo prowadzą do tego samego kółka) - typu, który oznaczylibyśmy (1,2);
- do kółka żółtego prowadzą także 3 drogi: oor, oro, roo, - wszystkie typu (2,1);
- do kółka zielonego prowadzi tylko 1 droga - ooo (albo (3,0)).

Ponieważ nie ma podstaw do uznania "wyboru" jednej z tych dróg przez pionek za bardziej prawdopodobny niż "wybór" innej (wynika to z symetrii stosowanego przyrządu losującego - monety oraz z faktu tej samej długości wszystkich dróg), to wnioski o szansach zawodników obstawiających poszczególne pola planszy są już oczywiste. Nietrudno także o ocenę ilościową tych szans - wyrażającą się ilorazem liczby dróg prowadzących do danego pola i liczby wszystkich dróg .

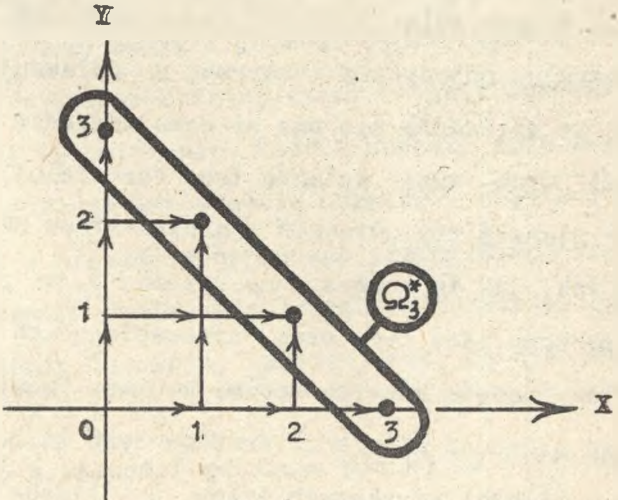
Rozpatrując pojedynczą rozgrywkę w opisanej grze łatwo zauważyć, że sprowadza się ona do doświadczenia typu "rzut 3 monetami" (zob. uwagi wstępne tego rozdziału).

Gdyby planszę gry umieścić w prostokątnym układzie współrzędnych tak, jak to pokazano na rysunku 5, to pary liczb, którymi oznaczyliśmy typy dróg doprowadzających do poszczególnych kółek (będące zarazem kodami wyników "rzutu 3 monetami") będą także oznaczać położenie środków tych kółek w układzie (gdzie x - liczba uzyskanych orłów, y - liczba reszek).



rys.5

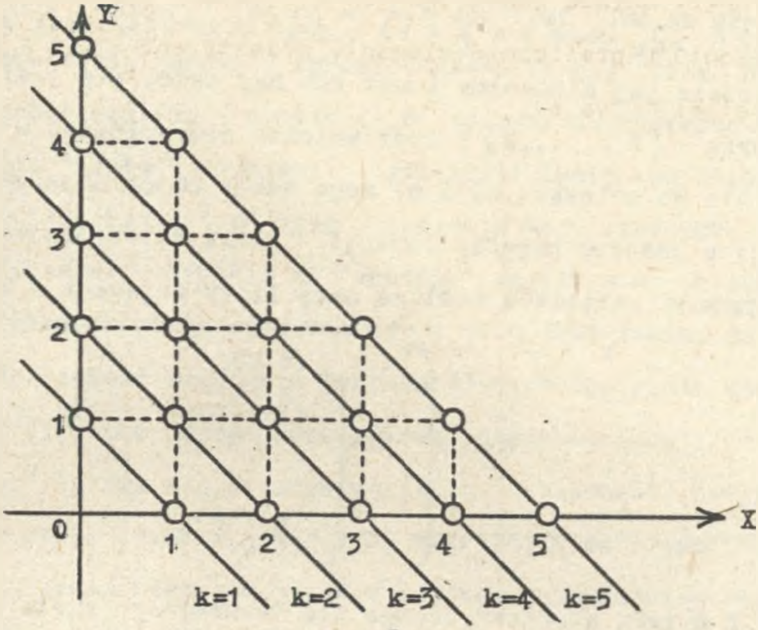
Punkty układu współrzędnych wyróżnione przez środki kółek reprezentują graficznie elementy przestrzeni Ω_3^* "rzutu 3 monetami" (rys.6).



rys.6

Z uczniami obeznanymi już z układem współrzędnych wydaje się naturalne przedłużenie zagadnienia graficznej interpretacji przestrzeni Ω_k^* "rzutu k monetami" na dowolne $k \geqslant 1$ (w przypadku k = 1 jest to po prostu "rzut monetą", to samo doświadczenie, co wyróżnione wśród "k-krotnych rzutów monetami" warunkiem k=1 - nic nie stoi na przeszkodzie, by jego wyniki kodować także inaczej: (1,0) jest w tej interpretacji kodem wyniku "wypadnie orzeł", poprzednio kodowanego: o; (0,1) - to inny niż poprzednio kod wyniku: r).

Nietrudno zauważyć, że za każdym razem elementy przestrzeni Ω_k^* reprezentowane będą przez punkty leżące na prostej o równaniu x+y=k, o współrzędnych całkowitych, większych lub równych zero a mniejszych lub równych k (rys.7):



rys.7

Tak, jak graficzne interpretacje "k-krotnych rzutów monetami" pozwoliły zauważyć, że ze wzrostem k o 1 liczba wyników wzrasta dwukrotnie (zob. uwagi wstępne w 1.1), tak i tu reprezentacja graficzna jest źródłem konstatacji, że:

a) w przypadku "rzutów k monetami" wzrost k o 1 powoduje wzrost liczby wyników także o 1;

b) $\bigwedge_{k \geqslant 1} n(\Omega_k^*) = k + 1.$

Czy te zauważone na rysunku prawidłowości mogą uczniowie "podeprzeć" wiedzą teoretyczną z innych dziedzin matematyki?

Kształcące byłoby uświadomienie im, że na przestrzeń Ω_k^* można spojrzeć np. jako na różnowartościowe odwzorowanie zbioru $\{0, 1, \ldots, k\}$ na siebie (spełniające warunek

$(x,y) \in \Omega_k^* \Longleftrightarrow x + y = k)$ - skąd oczywisty jest wniosek o liczbie jej elementów (musi ich być tyle, ile jest liczb w zbiorze $\{0,1,\ldots,k\}$) oraz wniosek sformułowany w punkcie a).

Ale do wniosków a) i b) mogą także dojść uczniowie nie znający jeszcze pojęcia funkcji - jeśli tylko odpowiednio uporządkują wszystkie możliwe pary liczb dających w sumie k:

$$k+1 \left\{ \begin{array}{l} \\ k \left\{ \begin{array}{l} (0,k) \\ (1,k-1) \\ (2,k-2) \\ \quad\vdots \\ (k-1,1) \end{array} \right. \\ \;\;\;\;\;\;\;\; (k,0) \end{array} \right.$$

Z drzewa stochastycznego dla "k-krotnego rzutu monetą" łatwo wydedukować rozkład prawdopodobieństwa na przestrzeni Ω_k.

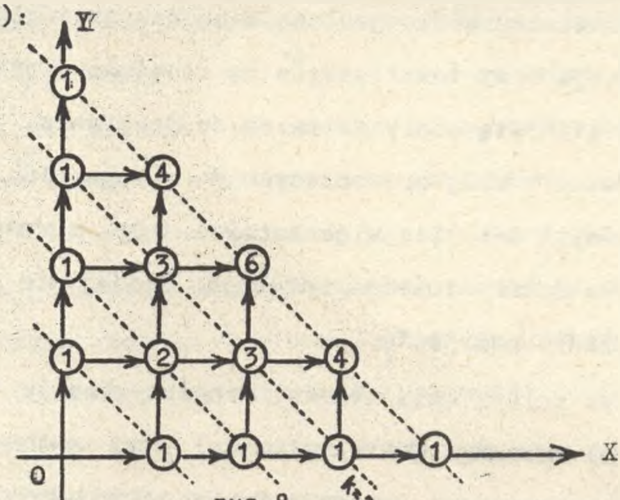
Analogicznie z ilustracji graficznej przestrzeni Ω_k^* (rys.7) możemy wydedukować rozkład prawdopodobieństwa na niej. Ustalmy dla przykładu k=3. $\Omega_3^* = \{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}$. Rozumowanie analogiczne, jak w przypadku rozważanej gry, prowadzi do wniosków, że:

- wynik (0,3) można uzyskać tylko na 1 "sposób" (gdy na wszystkich 3 monetach będzie reszka);
- wynik (1,2) można uzyskać na 3 "sposoby" (reszka na jednej spośród trzech monet);
- wynik (2,1) (orzeł na jednej z 3 monet) - także na 3 "sposoby";
- wynik (3,0) - na 1 "sposób" (gdy na wszystkich 3 monetach będzie orzeł).

...

Te różne "sposoby" (można na nie spojrzeć jako na wyniki "3-krotnego rzutu monetą") reprezentowane są graficznie przez możliwe drogi dojścia z punktu (0,0) do punktów reprezentujących wyniki "rzutu 3 monetami" - zatem zliczenie ich sprowadza się do zliczania tych dróg w układzie współrzędnych (zob. rys.8). Ponieważ wszystkie te "sposoby" są tak samo prawdopodobne (prawdopodobieństwo każdego z nich jest takie, jak prawdopodobieństwo każdego z wyników "3-krotnego rzutu monetą" - $\left(\frac{1}{2}\right)^3$), zatem prawdopodobieństwo danego wyniku "rzutu 3 monetami" wyraża się stosunkiem liczby "sposobów", na jakie można ten wynik uzyskać, do liczby wszystkich możliwych "sposobów" uzyskania któregokolwiek z wyników tego doświadczenia.

Odkrycie metody zliczania wspomnianych dróg w układzie współrzędnych (liczba dróg dojścia do danego punktu reprezentującego element przestrzeni Ω_k^* jest równa sumie liczb dróg dochodzących do punktów bezpośrednio ten punkt poprzedzających) prowadzi do odkrycia sposobu konstruowania trójkąta Pascala (rys.8):



rys.8

2. DOBÓR I OCENA DOŚWIADCZEŃ LOSOWYCH W SYTUACJACH PROBLEMOWYCH

Propozycja dydaktyczna

W [4] znajdujemy (str.41-44) szczegółową charakterystykę celów propedeutycznego kursu rachunku prawdopodobieństwa (propozycja autora). Czytamy tam m.in.:

"Podstawowym celem nauczania rachunku prawdopodobieństwa w szkole ma być rozwijanie intuicji probabilistycznych i myślenia probabilistycznego, jako nowego aspektu myślenia matematycznego".

Dla realizacji tego celu ważne jest m.in. kształcenie umiejętności:

1) dopasowywania modelu probabilistycznego do danego doświadczenia losowego - z [4]:

"Kurs rachunku prawdopodobieństwa w klasach IV - VII ma być I etapem matematyzowania towarzyszących doświadczeniom losowym sytuacji i związków ilościowych i jakościowych", "Konkretne sytuacje losowe będące przedmiotem analizy na lekcji oraz towarzyszące im stosunki ilościowe i jakościowe stanowią dobry surowiec do pokazania, jak się matematyzuje", "Każda z dróg prowadzących do modelu (lub do wykrycia jego pewnych cech), a więc zarówno droga a posteriori, jak i droga a priori, rozwija intuicje. Żadnej nie powinno się w nauczaniu pomijać",

a w tym celu i umiejętności schematyzowania, kodowania (i dekodowania) informacji (także graficznie) oraz wykorzystania posiadanej wiedzy matematycznej, poznanych środków matematycznych;

2) rozpoznawania wśród wielu doświadczeń losowych doświadczeń o "wspólnym" (izomorficznie) modelu probabilistycznym, wymyślanie innych doświadczeń (i odpowiednich przyrządów losujących) o danym modelu - z [4]:

"Jednym z ważniejszych zadań |...| jest rozwijanie zdolności wykrywania i wykorzystywania we wnioskowaniach probabilistycznych analogii w sytuacjach losowych",

w tym i umiejętności konstruowania modelu symulacyjnego danego doświadczenia losowego - z[4]:

"Kurs propedeutyczny ma rozwijać zdolności opisywania zjawisk losowych w kontekście ich prostych modeli symulacyjnych, opartych na rzutach monetami, kostkami, na losowaniach kul z urny, czy kart z potasowanej talii".

Ważnym dla dydaktyki jest pytanie: jak, poprzez jakie zadania kształcić te umiejętności w początkowym okresie nauczania probabilistyki? Wydaje się celowe stwarzanie sytuacji dydaktycznych dostarczających uczniom silniejszej motywacji do teoretycznych rozważań natury probabilistycznej, sytuacji, w których aktywności matematyczne, takie jak abstrahowanie, upraszczanie, schematyzacja, dostrzeganie analogii nie są celem działalności ucznia, ale środkiem, dzięki któremu w drodze teoretycznych rozważań rozwiąże on pewien konkretny problem. Taka wyjściowa sytuacja problemowa może zostać stworzona przez grę losową (silną pozamatematyczną motywację niesie tu chęć wygrania) albo przez zadanie - pytanie o propozycje losowych wyborów (losowań) (zob. np. [5] str. 9-10; motywacji dostarcza chęć podania jak najciekawszej, najlepszej propozycji). Można także stawiać ucznia wobec różnych propozycji losowych rozstrzygnięć w danych konkretnych sytuacjach problemowych (autentycznych czy fikcyjnych) - dając mu możliwość oceniania ich zarówno pod kątem czynienia zadość kryterium "równych szans" jak i pod względem "dawania odpowiednio dużych szans" wynikom uznawanym przez ucznia za stanowiące najsensowniejsze (z różnych punktów widzenia) rozwiązania tych sytuacji.

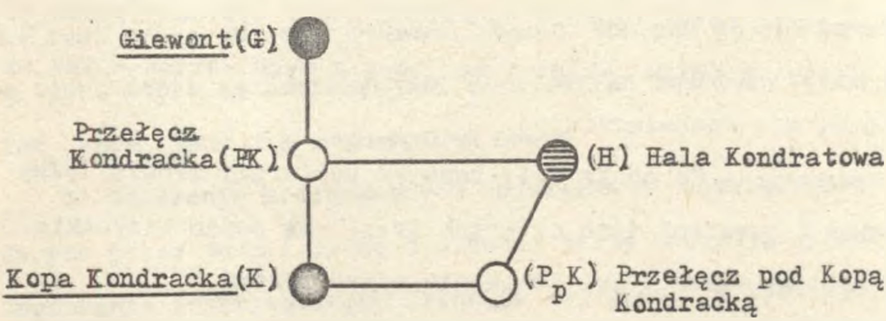
Jeden z przykładów zadań - sytuacji problemowych tego ostatniego typu, związany z zagadnieniami losowych rozmieszczeń kul w szufladach i nadający się do rozważenia z uczniami klasy co najmniej VI (lub na kółku matematycznym), przedstawiony został w [2]. Punktem wyjścia jest opis następującej sytuacji:

Klasa VIb, licząca 20 uczniów, wybiera się na wycieczkę. W skład wycieczkowego zaopatrzenia każdego ucznia ma wejść m.in. paczka z owocami (jabłka i gruszki); ustalono, że będzie ich po 3 w paczce. Agata, Olek, "Nobo" i "Gapcio" - uczniowie tej klasy - mają zakupić owoce i zrobić paczki. Jest już po lekcjach; Agata i jej koledzy nie zdążą już skontaktować się z resztą klasy. Ile owoców którego rodzaju zakupić? Jakie wykonać paczki?

Dalej podane są fragmenty - wyimaginowanej - dyskusji tej czwórki uczniów, w toku której powstają 2 propozycje losowego tworzenia paczek (jedna jest rozwiązaniem opartym na 20-krotnym powtórzeniu losowego rozmieszczenia 3 kul w 2 szufladach, druga - na rozmieszczeniu 20 kul w 4 szufladach). Dalsza część dyskusji toczy się wokół propozycji losowego rozdzielania paczek między uczniów (którego modelem jest losowe rozmieszczenie 20 kul w 20 szufladach - w tym wypadku kul numerowanych i w "małych" szufladach). Ustami "Gapcia" zostały przekazane pewne sądy oparte na błędnym rozumowaniu (dotyczącym rzekomych analogii pierwszych dwu z wymienionych rozmieszczeń) oraz na błędnych intuicjach (dotyczących rzekomej "nieklasyczności" rozkładu prawdopodobieństwa na przestrzeni wyników trzeciego z tych rozmieszczeń). Zadając uczniom w klasie pytania o to, czy "Gapcio" rzeczywiście ma rację (w I przypadku), czy istotnie jego obawy są słuszne (w II przypadku), inspirujemy ich do poszukiwania źródeł błędów. (Przykład ten jest w [2] szczegółowo zanalizowany).

A oto druga tego typu propozycja:

1) Opis sytuacji: 10-osobowa grupa turystów w schronisku na Hali Kondratowej planuje wejście na Giewont i jeden z Czerwonych Wierchów - Kopę Kondracką. (zob. rys.9).



rys.9

Nie ma tylko wśród nich zgody co do wyboru trasy tej wycieczki. A są cztery (ze względu na wyznaczone szlaki) - sensowne - możliwości; można by je zakodować następująco:

1) $H \rightarrow P_pK \rightarrow K \rightarrow PK \rightarrow G \rightarrow PK \rightarrow H$

2) $H \rightarrow PK \rightarrow G \rightarrow PK \rightarrow K \rightarrow P_pK \rightarrow H$

3) $H \rightarrow PK \rightarrow G \rightarrow PK \rightarrow K \rightarrow PK \rightarrow H$

4) $H \rightarrow PK \rightarrow K \rightarrow PK \rightarrow G \rightarrow PK \rightarrow H$

albo krócej,np. tak:

1) P_pK

2) $PK \rightarrow G \rightarrow P_pK$

3) $PK \rightarrow G \rightarrow PK$

4) $PK \rightarrow K$

(dlaczego te drugie oznaczenia tras są wystarczające?!).

2) I - jako środek inspirowania matematycznej aktywności uczniów - przykładowa (fikcyjna)'dyskusja tych turystów:

Anna proponuje, by wybrać tę trasę, za którą opowie się najwięcej osób.

Barbara protestuje: - Czy zrobienie tego, czego chce większość, jest najsprawiedliwsze? Może lepiej, by zadecydował los?! Niech każdy napisze na kartce numer wybranej przez siebie trasy, a potem wylosujemy jedną z tych kartek - tak wydaje mi się sprawiedliwiej.

Cezary: - Po co aż tyle roboty? Wystarczy zrobić tylko 4 losy z numerami tych czterech tras; na pewno wszystkie trasy będą miały w tym losowaniu równe szanse.

Dariusz: - A ja proponuję, by dla każdej trasy zrobić tyle losów, jaki jest jej numer.

Ewa: - To nie ma sensu! Jeśli już w ogóle mamy losować, to tylko spośród tras, na które są chętni. Losów możemy zrobić ile chcemy - byle tylko zachować proporcje takie, jak wśród chętnych na poszczególne trasy.

Filip: - Wy wszyscy jesteście niemądrzy. Trasy (3) i (4) trzeba od razu odrzucić - kto mi każe iść 3 razy przez tę samą przełęcz?! Róbmy tylko 2 losy - z numerami 1 i 2.

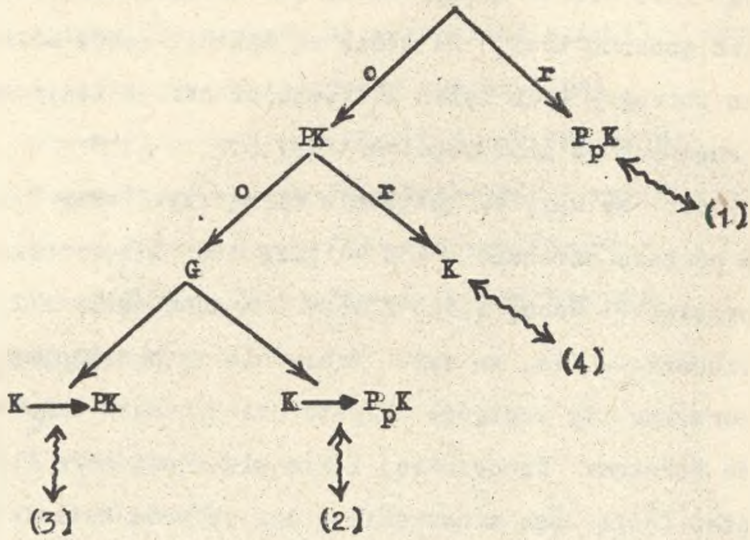
Grzegorz: - Nie, te dwie trasy nie są bynajmniej tak samo sensowne. Ze względów czysto praktycznych lepsza jest (1); do Przełęczy Kondrackiej idzie się - pod górę - przez Piekiełko (całą masę schodków!) - już ja wolę zaliczać je w drodze powrotnej, schodząc w dół. Chcecie, to losujmy. I niech zadecyduje moneta: jeżeli w dwu rzutach przynajmniej raz wypadnie reszka - idziemy "jedynką", w przeciwnym wypadku - "dwójką".

Halina: - Niech będzie moneta, ale wybierajmy ze wszystkich tras. Zobaczcie jaką ja mam propozycję (rys. 10):

Irena: - E, wiecie co? Najlepiej będzie jak zadecyduje przewodnik.

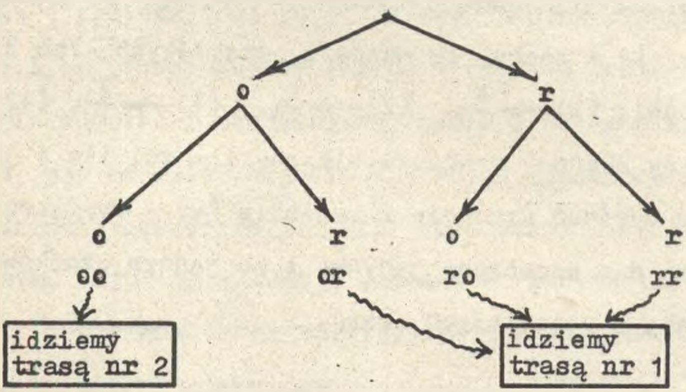
Proponujemy uczniom zastanowienie się kolejno nad wszystkimi tymi propozycjami, przeanalizowanie ich pod kątem "losowości", a tych, które są propozycjami doświadczeń losowych - pod kątem szans, jakie dają poszczególnym trasom.

3) Omówienie proponowanych rozwiązań w rozwiązaniach podanych przez Annę i Irenę o wyborze trasy decydują wyłącznie upodobania poszczególnych członków tej grupy. W sytuacji proponowanej przez Annę liczy się tylko zdanie osób preferujących



rys.10

tę trasę, która odpowiada największej liczbie członków grupy. Propozycja Ireny skazuje całą grupę na poddanie się decyzji przewodnika. W obu przypadkach ci, którzy mają upodobania odmienne, nie mają żadnych szans. Są to propozycje wyboru przez głosowanie. Znając decyzje poszczególnych osób wiemy, która trasa zostanie wybrana. Natomiast w propozycjach związanych z losami znajomość liczb losów o poszczególnych numerach tras nie daje nam pewności, która trasa zostanie wybrana; podobnie przedstawia się sytuacja w przypadku proponowanych rozwiązań przy użyciu monety. Te propozycje są propozycjami wyboru przez losowanie - i te nas (z punktu widzenia probabilistyki) interesują. Propozycje Filipa i Grzegorza są wprawdzie propozycjami wyborów losowych (losowań), ale nie są to losowania spośród podanych 4 możliwości, lecz tylko spośród 2: P_pK, $PK \longrightarrow G \longrightarrow P_pK$. Narzuca się tu pytanie, czy w propozycjach obydwu chłopców obie te trasy mają takie same szanse. U Filipa - tak, bo wyciągnięcie losu z numerem 1 jest tak samo możliwe jak wyciągnięcie drugiego z tych losów (z nr 2). Grzegorz chciał dać większe szanse trasie nr 1, bo ją uznał za odpowiedniejszą. Analiza schematu rysunkowego odpowiadającego propozycji Grzegorza (rys. 11) pokazuje nam, że mu się to udało: trasa nr 1 ma w takim losowaniu większe szan-



rys.11

se (i to trzykrotnie), niż trasa nr 2. Pozostały propozycje: Barbary, Cezarego, Dariusza, Ewy i Haliny. Wszystkie one są także propozycjami wyborów losowych. Losowanie proponowane przez Cezarego ma model probabilistyczny o 4-elementowej przestrzeni i klasycznym rozkładzie prawdopodobieństwa; proponowane przez Dariusza - ma także 4-elementową przestrzeń probabilistyczną, ale rozkład prawdopodobieństwa jest następujący:

$$(1) \longrightarrow \frac{1}{10}, \quad (2) \longrightarrow \frac{2}{10}, \quad (3) \longrightarrow \frac{3}{10}, \quad (4) \longrightarrow \frac{4}{10};$$

wreszcie propozycja Haliny - to losowanie o modelu:

$$(1) \longrightarrow \frac{1}{2}, \quad (2) \longrightarrow \frac{1}{8}, \quad (3) \longrightarrow \frac{1}{8}, \quad (4) \longrightarrow \frac{1}{4}$$

(zob. rys.10)

4) Uwagi końcowe: po przedyskutowaniu z uczniami wszystkich propozycji informujemy ich, że turyści zdecydowali się ostatecznie na rozwiązanie proponowane przez Barbarę i Ewę (jak nietrudno zauważyć, obydwie te propozycje - losowania - mają ten sam model probabilistyczny) i że np. za trasą nr 1 opowiedziały się 4 osoby, za każdą z pozostałych - po 2 (co implikuje model: $(1) \longrightarrow \frac{4}{10}$, $(2) \longrightarrow \frac{2}{10}$, $(3) \longrightarrow \frac{2}{10}$, $(4) \longrightarrow \frac{2}{10}$). Pytamy uczniów o model probabilistyczny i o to, ile i jakich losów trzeba wykonać (zgodnie z sugestią Ewy - wystarczy 5 losów, w tym: dwa oznaczone jedynką i po jednym oznakowanym numerem każdej z pozostałych tras).

3. "CZY ZAWSZE LICZB PARZYSTYCH JEST TYLE SAMO, CO NIEPARZYSTYCH?"

Propozycja dydaktyczna

Nie chodzi oczywiście o kwestionowanie równoliczności zbiorów N_p i N_{np}. Pretekstem do postawienia takiego kontrowersyjnego pytania stały się błędne intuicje studentów rozwiązujących proste zadanie kombinatoryczne: "Ile jest liczb czterocyfrowych, w których nie powtarza się żadna cyfra?" Na pytanie: "jak się wam wydaje - wśród nich więcej jest parzystych, czy nieparzystych?" (uznając je najwidoczniej za co najmniej dziwaczne) odpowiedzieli bez wahania: "Jest ich po tyle samo. Przecież zawsze parzystych jest tyle samo, co nieparzystych". (!) Ponieważ rozważania, do jakich prowokuje to proste zadanie, wydają się ciekawe, proponujemy - jako inspirującą uczniów do podobnybh rozważań - następującą sytuację:

1) Opis sytuacji - Nauczyciel proponuje uczniom następującą rozgrywkę - losowanie: Za pomocą butelki z wydłużoną szyjką*, zawierającej 10 jednakowych kulek oznaczonych cyframi: 0,1,...,9 wylosujemy liczbę 2-cyfrową (potrząsamy kilkakrotnie butelką i odczytujemy cyfry 2 dolnych kulek; w przypadku, gdy na dole znajdzie się kulka oznaczona zerem, doświadczenie powtarzamy). Jeśli wylosowana liczba będzie parzysta, najbliższą lekcję matematyki poświęcimy na klasówkę, jeśli nieparzysta - na rozwiązywanie ciekawych, a nawet zabawnych zagadek matematycznych.

WERSJA I: wylosowana liczba parzysta ⟶ klasówka
wylosowana liczba nieparzysta ⟶ zagadki

Możemy zresztą zmienić reguły:

WERSJA II: wylosowana liczba parzysta ⟶ zagadki
wylosowana liczba nieparzysta ⟶ klasówka

Zastanówcie się, którą wersję wolicie.

2) Analiza dydaktyczna tej sytuacji: Żeby odpowiedzieć na pytanie, która wersja daje większe szanse zagadkom (którą

---

* Są takie w zestawie pomocy do nauczania rachunku prawdopodobieństwa opracowanym przez Z. Semadeniego i A. Olecką.

bardziej opłaca się uczniom wybrać), trzeba zastanowić się nad tym:

- ile jest wszystkich wyników proponowanego losowania (a najpierw zauważyć, że będą nimi liczby dwucyfrowe o nie powtarzających się cyfrach),
- czy wszystkie wyniki są jednakowo prawdopodobne (tu odpowiedź jest prosta: klasyczny rozkład prawdopodobieństwa jest zagwarantowany sposobem losowania)
- ile wśród tych wyników sprzyja zdarzeniom:

  A: wylosowana liczba będzie parzysta,

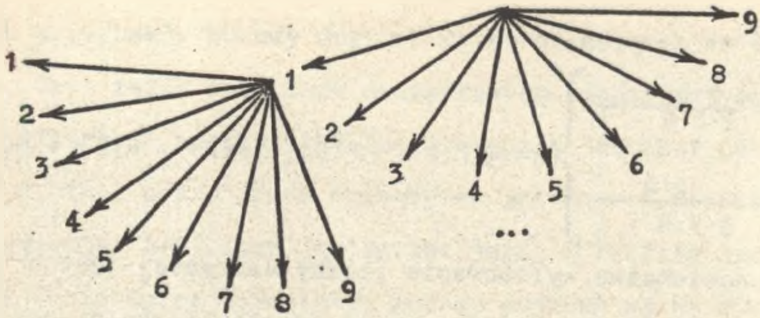
  B: wylosowana liczba będzie nieparzysta.

Skoro model jest klasyczny, zadanie sprowadza się do wyznaczenia liczb: $n(A)$, $n(B)$, $n(\Omega)$.

Warto zapisać, jakimi zbiorami są zdarzenia A i B. Samo to zapisywanie - przekład warunków podanych słownie na język symboliczny, jest dla uczniów kształcące, zmuszające do dyscypliny myślowej (by nie opuścić żadnego warunku), do poszukiwania najekonomiczniejszej formy zapisu (symbolicznego kodu werbalnych informacji). Można zakodować A i B np. tak:

$$A = \{(x,y) : x \in \{1,2,\dots,9\},\ \ y \in \{0,2,4,6,8\},\ \ x \neq y\},$$
$$B = \{(x,y) : x \in \{1,2,\dots,9\},\ \ y \in \{1,3,5,7,9\},\ \ x \neq y\},$$

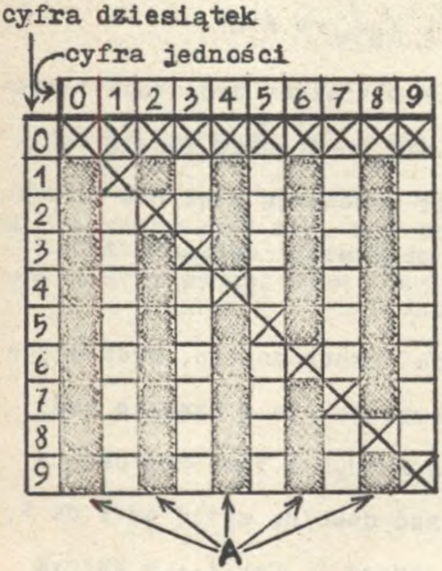
I tu "na oko" wydawać się może, że A ma tyle samo elementów, co B. Zanim jednak przejdziemy do sprawdzenia, czy istotnie $n(A) = n(B)$, zinterpretujemy Ω graficznie. Można to próbować zrobić na drzewie (rys. 12), ale robi się ono nieczytelne:



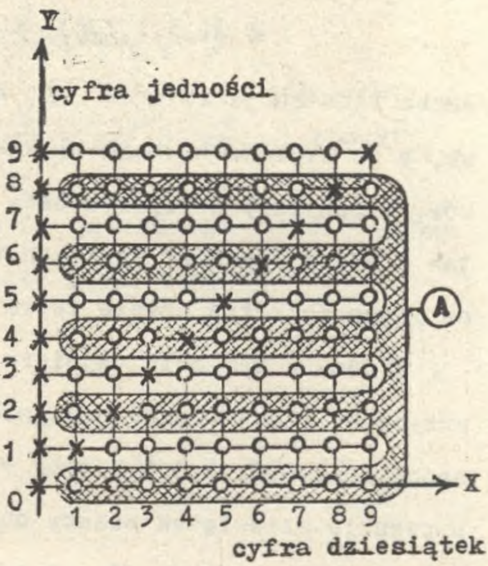
rys.12

Lepsza jest w tym wypadku tabelka kartezjańska (rys.13), czy układ współrzędnych (rys.14). Krzyżykami zaznaczono kratki tabelki kartezjańskiej i punkty w układzie współrzędnych reprezentujące pary: (0,x) oraz (x,x), gdzie $x \in \{0,1,\ldots,9\}$ (elementy nie należące do Ω).

Widać z rysunków, że n(A) = 9+4•8, n(B) = 5•8; przekształcając, otrzymamy: n(A) = 5•8+1.



rys.13



rys.14

Zatem

$$\left.\begin{array}{l} P(A) = \dfrac{5\cdot 8 + 1}{2\cdot 5\cdot 8 + 1} \\[2ex] P(B) = \dfrac{5\cdot 8}{2\cdot 5\cdot 8 + 1} \end{array}\right\} \Longrightarrow P(A) > P(B); \quad P(A) = P(B) + \frac{1}{81}.$$

Prawdopodobieństwo wylosowania liczby parzystej jest o $\frac{1}{81}$ większe od prawdopodobieństwa wylosowania liczby nieparzystej - zatem bardziej opłaca się uczniom wybrać wersję II gry.

Ale nasuwa się teraz pytanie: czy - i na ile - zmieniłaby się sytuacja, gdyby losować w ten sam sposób liczby 3-cyfrowe? Wtedy

$$A = \{(x,y,z):\ x \in \{1,2,\ldots,9\},\ y \in \{0,1,\ldots,9\},$$
$$z \in \{0,2,4,6,8\},\ x \neq y \neq z,\ x \neq z\},$$
$$B = \{(x,y,z):\ x \in \{1,2,\ldots,9\},\ y \in \{0,1,\ldots,9\},$$
$$z \in \{1,3,5,7,9\},\ x \neq y \neq z,\ x \neq z\}.$$

Teraz ilustracja zbiorów Ω, A, B musiałaby być trójwymiarowa, a ze względu na dużo większą niż poprzednio liczbę wyników, straciłaby przejrzystość. Nie pozostaje więc nic innego, jak z drogi rozważań opartych na obserwacji modelu przejść na drogę rozważań czysto teoretycznych.

Wróćmy w tym celu najpierw do poprzedniego, prostszego, przypadku. Żeby liczba była nieparzysta, to w rzędzie jedności musi być: 1,3,5,7 albo 9. W każdym z tych przypadków w rzędzie dziesiątek możemy dopisać dowolną cyfrę od 1 do 9, byle tylko różną od cyfry rzędu jedności. Czyli - w każdym z tych przypadków możemy dopisać cyfrę dziesiątek na 8 sposobów. Jest zatem $5\cdot8$ liczb dwucyfrowych nieparzystych o różnych cyfrach. A parzystych? Jak w rzędzie jedności postawimy 2,4,6,8, to z cyfrą rzędu dziesiątek jest jak poprzednio - a więc mamy już $4\cdot8$ liczb. Natomiast jeśli w rzędzie jedności będzie 0, to cyfrę dziesiątek możemy dopisać aż na 9 sposobów. Stąd wszystkich liczb dwucyfrowych parzystych o różnych cyfrach jest $4\cdot8 + 9 = 5\cdot8 + 1$. Trzycyfrowe nieparzyste: - jest ich $5\cdot8\cdot8$ - ostatnią cyfrę można wybrać na 5 sposobów, pierwszą na 8 (tak, jak poprzednio), a środkową także na 8 (może to być którakolwiek z cyfr: 0,1,...,9, byle różna od pierwszej i ostatniej. Trzycyfrowe parzyste: - jest ich $4\cdot8\cdot8$ (gdy ostatnią cyfrą jest 2,4,6 lub 8) oraz $1\cdot9\cdot8$ (gdy ostatnią jest 0), czyli $5\cdot8\cdot8 + 8$.

Zatem

$$P(B) = \frac{5\cdot8\cdot8}{2\cdot5\cdot8\cdot8 + 8},$$

$$P(A)=\frac{5\cdot8\cdot8 + 8}{2\cdot5\cdot8\cdot8 + 8}=P(B)+\frac{\cancel{8}^{1}}{2\cdot5\cdot8\cdot\cancel{8}_{1}+\cancel{8}_{1}}=P(B)+\frac{1}{81} \quad \text{- znowu!}$$

Warto zastanowić się, czy jest to prawidłowość, która zachowa się wraz z wydłużaniem ciągu cyfr (zob. tabela).

(1)	nieparzyste (2)	parzyste (3)	(4)
4-cyfrowe	(IV)(I) $\downarrow\swarrow$ $5\cdot8\cdot8\cdot7$	$4\cdot8\cdot8\cdot7+1\cdot9\cdot8\cdot7=$ $=5\cdot8\cdot8\cdot7+8\cdot7$	P(A) > P(B) o $\frac{\cancel{8\cdot7}^{1}}{2\cdot5\cdot8\cdot\underset{1}{\cancel{8\cdot7}}+\underset{1}{\cancel{8\cdot7}}}=$ $=\frac{1}{81}$
5-cyfrowe	(V)(I) $\downarrow\swarrow$ $5\cdot8\cdot8\cdot7\cdot6$	$4\cdot8\cdot8\cdot7\cdot6+1\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6=$ $=5\cdot8\cdot8\cdot7\cdot6+8\cdot7\cdot6$	P(A) > P(B) o $\frac{\cancel{8\cdot7\cdot6}^{1}}{2\cdot5\cdot8\cdot\underset{1}{\cancel{8\cdot7\cdot6}}+\underset{1}{\cancel{8\cdot7\cdot6}}}=$ $=\frac{1}{81}$
6-cyfrowe	(VI)(I) $\downarrow\swarrow$ $5\cdot8\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5$	$4\cdot8\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5+1\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5=$ $=5\cdot8\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5+8\cdot7\cdot6\cdot5$	P(A) > P(B) o $\frac{\cancel{8\cdot7\cdot6\cdot5}^{1}}{2\cdot5\cdot8\cdot\underset{1}{\cancel{8\cdot7\cdot6\cdot5}}+\underset{1}{\cancel{8\cdot7\cdot6\cdot5}}}=$ $=\frac{1}{81}$
7-cyfr.	analogicznie*		
8-cyfr.			
9-cyfr.	(jest ich tyle samo)		
10-cyfr.			

Nasuwa się jeszcze jedno pytanie: czy jeśli zrezygnujemy z założenia "różności" cyfr, to prawdopodobieństwa P(A) i P(B) się zrównają?

* "Dłuższe" liczby o nie powtarzających się cyfrach nie istnieją.

Wszystkich liczb k-cyfrowych nieparzystych jest:

$$\overset{(k)}{5}\cdot\overset{(I)}{9}\cdot\underbrace{10\cdot\ldots\cdot10}_{k-2 \text{ czynniki}},$$

wszystkich k-cyfrowych parzystych - oczywiście tyle samo.

Warto jeszcze na zakończenie zauważyć, że na każdą k-cyfrową liczbę można spojrzeć jako na odwzorowanie zbioru $\{1,2,\ldots,k\}$ w zbiór $\{0,1,\ldots,9\}$; w przypadku liczb o nie powtarzających się cyfrach, są to funkcje różnowartościowe, spełniające warunek $f(1) \neq 0$.

Będące punktem wyjścia stosunkowo banalne zadanie kombinatoryczne stało się inspiracją do ukazania możliwych dróg jego przedłużania (dając możliwość wprawiania w ten sposób uczniów w stawianie sobie samym nowych, dodatkowych pytań - problemów), do szukania innych interpretacji postawionego problemu (zamiast o liczbach, można mówić o współrzędnych punktów, czy o funkcjach), do dostrzeżenia przez uczniów związków między pojęciami różnych działów matematyki.

LITERATURA

[1] Chrzan-Feluch B. i W. Zawadowski, Matematyka 4, WSiP, W-wa, 1978.

[2] Legutko B., Ocena jakościowa prawdopodobieństwa. Przykłady wnioskowań a priori, Oświata i Wychowanie, 11/12 (1981)

[3] Olecka A., Pewna koncepcja strukturalizacji nauczania początków rachunku prawdopodobieństwa, Dydaktyka Matematyki, tom 3, roczniki PTM, seria V, PWN, W-wa, 1984.

[4] Płocki A., Propedeutyka rachunku prawdopodobieństwa w klasach IV - VII (zarys dydaktyki), Wydawnictwo IKN im. Wł. Spasowskiego w Warszawie, W-wa, 1983.

[5] Siwek H., Treliński G. i Wachnicki E., Matematyka 7, WSiP W-wa, 1981.