ZOFIA LESZCZYŃSKA, ZENON MOSZNER

Sur la commutativité des transformations affines

Introduction. M.J.Schwaiger a posé le problème de donner l'exemple d'un groupe $(G,\cdot)$ et de deux homomorphismes f et g du groupe additif des nombres réels $(\mathbb{R}, +)$ à $(G,\cdot)$ pour lesquels l'implication

$$/1/ \quad \bigwedge_{t\in\mathbb{R}} f(t)g(t) = g(t)f(t) \Rightarrow \bigwedge_{r,s\in\mathbb{R}} f(s)g(r) = g(r)f(s)$$

n'a pas lieu.

J.Wróblewski comme le premier a donné un tel exemple dans [4]. Il est donné dans [3] quelques considérations générales au sujet du problème ci-dessus. Nous avons démontré dans [1] que si $(G,\cdot)$ est le groupe multiplicatif des matrices carrées non-singulières d'ordre n des éléments du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes dans ce cas pour $n \leqslant 3$ l'implication (1) a lieu pour chaque deux homomorphismes f et g de $(\mathbb{R}, +)$ à $(G,\cdot)$ et pour $n \geqslant 4$ cette implication n'a pas lieu.

Ce résultat entraîne que l'implication (1) a lieu aussi pour chaque deux homomorphismes f et g de $(\mathbb{R}, +)$ au groupe des transformations affines de $\mathbb{C}^1$ ou de $\mathbb{C}^2$ avec la superposition comme l'opération.

Les considérations au sujet de l'implication (1) si $(G,\cdot)$ forme le groupe A des transformations affines de $\mathbb{C}^3$ avec la superposition comme l'opération " $\cdot$ " sont l'objet de cette note.

I. D'après l'isomorphisme du groupe A avec le groupe G multiplicatif des matrices des éléments complexes et de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour donner tous les homomorphismes de $(\mathbb{R}, +)$ à A il suffit de déterminer tous les homomorphismes de $(\mathbb{R}, +)$ à G.

On a démontré dans [2] que chaque homomorphisme f de $(\mathbb{R}, +)$ à G doit être de la forme

$$/2/ \qquad f(t) = \tilde{A}\, f_0(t)\, \tilde{A}^{-1},$$

où

$$/3/ \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & A & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

A est une matrice d'ordre 3 non- singulière et $f_0(t)$ prend une des formes:

$$/4/\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \beta_1(t) \\ 0 & 1 & 0 & \beta_2(t) \\ 0 & 0 & 1 & \beta_3(t) \end{pmatrix}; \quad {}^{*)} \qquad /5/\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \beta_1(t) \\ 0 & \varphi_3(t) & 0 & e(\varphi_3(t)-1) \\ 0 & 0 & 1 & \beta_2(t) \end{pmatrix};$$

$$/5'/\quad \begin{pmatrix} \varphi_2(t) & 0 & 0 & d(\varphi_2(t)-1) \\ 0 & 1 & 0 & \beta_2(t) \\ 0 & 0 & 1 & \beta_3(t) \end{pmatrix}; \quad /5''/\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \beta_1(t) \\ 0 & 1 & 0 & \beta_2(t) \\ 0 & 0 & \varphi_2(t) & e(\varphi_2(t)-1) \end{pmatrix};$$

$$/6/\quad \begin{pmatrix} \varphi_2(t) & 0 & 0 & d(\varphi_2(t)-1) \\ 0 & \varphi_3(t) & 0 & e(\varphi_3(t)-1) \\ 0 & 0 & 1 & \beta_3(t) \end{pmatrix}; \quad /7/\quad \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1(t) & 0 & \alpha_3(t)+\frac{d}{2}\alpha_1^2(t) \\ 0 & 1 & 0 & d\alpha_1(t) \\ 0 & 0 & \varphi_2(t) & e(\varphi_2(t)-1) \end{pmatrix};$$

$$/8/\quad \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1(t) & \frac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t) & \alpha_4(t)+\frac{e}{2}\alpha_1^2(t)+d\alpha_1(t)\alpha_2(t)+\frac{d}{6}\alpha_1^3(t) \\ 0 & 1 & \alpha_1(t) & e\alpha_1(t)+d\alpha_2(t)+\frac{d}{2}\alpha_1^2(t) \\ 0 & 0 & 1 & d\alpha_1(t) \end{pmatrix};$$

$$/9/\quad \begin{pmatrix} \varphi_2(t) & 0 & 0 & d(\varphi_2(t)-1) \\ 0 & \varphi_3(t) & 0 & e(\varphi_3(t)-1) \\ & & \varphi_1(t) & f(\varphi_1(t)-1) \end{pmatrix}; \quad /10/\quad \begin{pmatrix} \varphi(t) & \varphi(t)\tilde{\alpha}_1(t) & 0 & a(\varphi(t)-1)+b\varphi(t)\tilde{\alpha}_1(t) \\ 0 & \varphi(t) & 0 & b(\varphi(t)-1) \\ 0 & \varphi(t)\tilde{\alpha}_2(t) & \varphi(t) & b(\varphi(t)-1)+b\varphi(t)\tilde{\alpha}_2(t) \end{pmatrix};$$

$$/11/\quad \begin{pmatrix} \varphi(t) & \varphi(t)\tilde{\alpha}_1(t) & \varphi(t)\tilde{\alpha}_2(t) & a(\varphi(t)-1)+b\varphi(t)\tilde{\alpha}_1(t)+c\varphi(t)\tilde{\alpha}_2(t) \\ 0 & \varphi(t) & 0 & b(\varphi(t)-1) \\ 0 & 0 & \varphi(t) & c(\varphi(t)-1) \end{pmatrix};$$

$$/12/\quad \begin{pmatrix} \varphi(t) & \varphi(t)\tilde{\alpha}_1(t) & \varphi(t)\left(\frac{1}{2}\tilde{\alpha}_1^2(t)+\alpha_2(t)\right) & a(\varphi(t)-1)+b\varphi(t)\tilde{\alpha}_1(t)+c\varphi(t)\left(\frac{1}{2}\tilde{\alpha}_1^2(t)+\alpha_2(t)\right) \\ 0 & \varphi(t) & \varphi(t)\tilde{\alpha}_1(t) & b(\varphi(t)-1)+c\varphi(t)\tilde{\alpha}_1(t) \\ 0 & 0 & \varphi(t) & c(\varphi(t)-1) \end{pmatrix};$$

---

*) Ici et dans la suite nous omettons dans les matrices la ligne dernière puisque elle doit être toujours de la forme (0 0 0 1).

$$/13/\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_1(t)\tilde{\alpha}_1(t) & 0 & d\varphi_1(t)\tilde{\alpha}_1(t)+a(\varphi_1(t)-1) \\ 0 & \varphi_1(t) & 0 & a(\varphi_1(t)-1) \\ 0 & 0 & \varphi_2(t) & b(\varphi_2(t)-1) \end{pmatrix};\quad /14/\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1(t) & 0 & \alpha_3(t)+\frac{d}{2}\alpha_1^2(t) \\ 0 & 1 & 0 & d\alpha_1(t)\ (=e\alpha_2(t)) \\ 0 & \alpha_2(t) & 1 & \alpha_4(t)+\frac{f}{2}\alpha_2^2(t) \end{pmatrix};$$

$$/15/\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha_2(t) & \alpha_3(t)+\frac{d}{2}\alpha_2^2(t) \\ 0 & 1 & 0 & \beta_2(t) \\ 0 & 0 & 1 & d\alpha_2(t) \end{pmatrix};\quad /15'/\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1(t) & 0 & \alpha_3(t)+\frac{d}{2}\alpha_1^2(t) \\ 0 & 1 & 0 & d\alpha_1(t) \\ 0 & 0 & 1 & \beta_3(t) \end{pmatrix};$$

$$/15''/\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \beta_1(t) \\ 0 & 1 & 0 & e\alpha_2(t) \\ 0 & \alpha_2(t) & 1 & \alpha_4(t)+\frac{f}{2}\alpha_2^2(t) \end{pmatrix};\quad /16/\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1(t) & -e\alpha_1(t) & \alpha_3(t)+\frac{d}{2}\alpha_1^2(t) \\ 0 & 1 & 0 & e\beta_3(t)+d\alpha_1(t) \\ 0 & 0 & 1 & \beta_3(t) \end{pmatrix};$$

$$/17/\quad\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1(t) & \alpha_2(t) & \alpha_3(t)+\frac{d}{2}\alpha_1^2(t)+\frac{f}{2}\alpha_2^2(t)+e\alpha_1(t)\alpha_2(t) \\ 0 & 1 & 0 & d\alpha_1(t)+e\alpha_2(t) \\ 0 & 0 & 1 & e\alpha_1(t)+f\alpha_2(t) \end{pmatrix},$$

où $\alpha_\nu, \beta_\mu, \tilde{\alpha}_\lambda : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ pour ν =1,2,3,4 , μ =1,2,3 et λ =1,2 ce sont des fonctions additives, c'est-à-dire remplissantes l'équation:

$$\alpha(t+u) = \alpha(t) + \alpha(u),$$

il n'existe pas dans (17) une constante k de $\mathbb{C}$ telle que $\alpha_2 \equiv k\alpha_1$ *), $\alpha_1 \not\equiv 0$, $\alpha_2 \not\equiv 0$ sauf dans (8) , $\varphi_\mu : \mathbb{R}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ pour μ=1,2,3 ce sont les fonctions exponentielles, c'est-à-dire remplissantes l'équation

$$\varphi(t+u) = \varphi(t)\varphi(u),$$

---

*) Le signe $\equiv$ designe ici et dans la suite que l'égalité a lieu pour chaque valeurs réelles des variables en considération, le signe $\not\equiv$ designe que $\equiv$ n'est pas remplie.

$\varphi_2 \neq 1$, $\varphi_3 \neq 1$ et d,e,f sont des constantes complexes.

<u>Remarque.</u> M.M. Kucharzewski a remarqué que si nous désignons par E_{ik} la matrice qui nous recevrons de la matrice unité d'ordre 4 par le changement de la ligne de numéro i et de la ligne de numéro k ,dans ce cas on a

$[5'] = E_{12}[5]E_{12}^{-1}$, $[5''] = E_{23}[5]E_{23}^{-1}$, $[15'] = E_{23}[15]E_{23}^{-1}$, $[15''] = E_{12}E_{13}[15](E_{12}E_{13})^{-1}$,

où $[v]$ désigne une matrice arbitraire de la forme (v) ,donc pour avoir tous les homomorphismes exigés nous ne devons pas prendre en considération des matrices de la forme /5'/, /5"/,/15'/,/15"/ pour f_o dans la formule /2/.

Nous démontrerons le <u>théorème</u> suivant :

<u>Si les homomorphismes f et g de $(\mathbb{R},+)$ à G sont teles que f a la forme /2/ ,où f_o est de la forme /4/-/13/ et g est arbitraire ou inversement,dans ce cas l'implication /1/ a lieu. Si au contraire f a la forme /2/ et</u>

<u>/18/ $\quad g(t) = \tilde{B}\, g_o(t)\, \tilde{B}^{-1}$,</u>

<u>où f_o et g_o prennent l'une des formes /14/-/17/ ,dans ce cas l'implication /1/ ne doit pas avoir lieu,c'est-à-dire on peut choisir les paramètres dans /2/ et /18/ d'une manière que l'implication /1/ n'est pas remplie.</u>

D'abord nous formulons le <u>lemme 1</u> suivant,démontré dans [1]:

Il n'existe pas les trois sous-groupes B_1, B_2 , B_3 du groupe $(\mathbb{R},+)$ pour lesquels

$\mathbb{R} = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ et $B_1 \neq \mathbb{R}$, $B_2 \neq \mathbb{R}$ et $B_3 \neq \mathbb{R}$.

Il en résulte que si pour les trois homomorphismes h_ν pour $\nu = 1,2,3$ de $(\mathbb{R},+)$ aux groupes G_ν arbitraires avec les éléments neutres e_ν ,on a

$$\mathbb{R} = \bigcup_{\nu=1}^{3} \{t : h_\nu(t) = e_\nu\},$$

dans ce cas $h_{\nu_0}(t) \equiv e_{\nu_0}$ pour au moins un ν_0 .

Nous allors de démontrer le

<u>Lemme 2.</u> Si

$$(\tilde{\varphi}(t)-1)\,[\alpha(t) - (\varphi(t)-1)] \equiv 0,$$

où α est une fonction additive et φ ,$\tilde{\varphi}$ sont des fonctions exponentielles,alors

$$\tilde{\varphi}(t) \equiv 1 \quad \text{ou} \quad \alpha(t) \equiv 0 \quad \text{et} \quad \varphi(t) \equiv 1 .$$

<u>Démonstration.</u> Supposons que $\tilde{\varphi}(t) \neq 1$ pour un t , donc $\tilde{\varphi}(-t) \neq 1$,puisque la fonction φ est exponentielles,d'où

$$\alpha(t) - (\varphi(t)-1) = 0,$$

$$\alpha(-t) - (\varphi(-t)-1) = 0 .$$

La deuxième relation nous donne

$$-\alpha(t) - \left(\frac{1}{\varphi(t)} - 1\right) = 0,$$

donc d'après la relation première

$$1 - \frac{1}{\varphi(t)} = \varphi(t) - 1 .$$

Il en résulte que $(\varphi(t)-1)^2 = 0$,alors $\varphi(t) = 1$ et de là $\alpha(t) = 0$ .Nous avons donc l'implication

$$\tilde{\varphi}(t) \neq 1 \Rightarrow \varphi(t) = 1 \text{ et } \alpha(t) = 0,$$

d'où d'après le lemme 1 nous avons la thèse.

Il en résulte le

<u>Lemme 3.</u> Si

$$(\tilde{\varphi}(t)-1)\,[\varphi(t)\alpha(t) - (\varphi(t)-1)] \equiv 0,$$

où α est une fonction additive et φ ,$\tilde{\varphi}$ sont des fonctions exponentielles,alors

$\tilde{\varphi}(t) \equiv 1$ ou $\varphi(t) \equiv 1$ et $\alpha(t) \equiv 0$.

En effet nous avons d'après la supposition faite

$$(\tilde{\varphi}(t)-1)\,\varphi(t)\left[\alpha(t)-\left(1-\frac{1}{\varphi(t)}\right)\right] \equiv 0,$$

d'où nous avons

$$(\tilde{\varphi}(t)-1)\left[\alpha(t)-\left(1-\frac{1}{\varphi(t)}\right)\right] \equiv 0,$$

puisque $\varphi(t) \not\equiv 0$ .Puisque la fonction $\frac{1}{\varphi(t)}$ est aussi exponentielle, d'après le lemme 2 nous avons la thèse.

Démonstration de la partie première du théorème.

Il suffit de démontrer que pour chaque deux matrices $\tilde{C}$ et $\tilde{D}$ non-singulières de la forme /3/ ,

/19/ $\tilde{C} f_0(t) \tilde{C}^{-1} \tilde{D}\, g_0(t) \tilde{D}^{-1} \equiv \tilde{D}\, g_0(t) \tilde{D}^{-1} \tilde{C} f_0(t) \tilde{C}^{-1}$,

pour f_0 de l'une des formes /4/- /13/ et g_0 de l'une des formes /4/- /17/ ,entraîne que

/20/ $\tilde{C} f_0(s) \tilde{C}^{-1} \tilde{D}\, g_0(r) \tilde{D}^{-1} \equiv \tilde{D}\, g_0(r) \tilde{D}^{-1} \tilde{C} f_0(s) \tilde{C}^{-1}$.

On peut écrire la condition /19/ sous la forme

/21/ $\tilde{A} f_0(t) \tilde{A}^{-1} g_0(t) \equiv g_0(t) \tilde{A} f_0(t) \tilde{A}^{-1}$,

où $\tilde{A}=\tilde{D}^{-1}\tilde{C}$ et dans ce cas /20/ a la forme

/22/ $\tilde{A} f_0(s) \tilde{A}^{-1} g_0(r) \equiv g_0(r) \tilde{A} f_0(s) \tilde{A}^{-1}$.

Pour démontrer que /19/ implique /20/ il suffit donc de montrer que /21/ implique /22/ pour chaque matrice $\tilde{A}$ non-singulière de la forme /3/ et pour f_0 l'une des formes /4/- /13/ et g_0 l'une des formes /4/- /17/ .On voit aussi qu'il suffit démontrer celà pour g_0 de la forme de numéro plus grand ou égal à celui de f_0 .

De plus nous avons déja démontré dans [1] que l'égalité des éléments dans les trois premières lignes et colonnes

dans les matrices du membre gauche et du membre droit dans /21/ entraîne l'égalité des mêmes éléments dans /22/ .
Puisque les lignes dernières des matrices dans /22/ sont égaux à $(0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 1)$, donc pour démontrer notre théorème il suffit de montrer que sont égaux les éléments dans la dernière colonne et trois premières lignes des matrices du membre gauche et du membre droit dans /22/ .

<u>Cas I</u> . Soit $f_o(t)$ a la forme /4/ *) ,c'est-à-dire soit $f_o(t)$ un groupe un-paramétrique des translations.
Dans ce cas $\tilde{A}\, f_o(t)\, \tilde{A}^{-1}$, pour une matrice $\tilde{A}$ arbitraire non-singulière, est aussi un groupe un-paramétrique des translations, donc

$$\tilde{A}\, f_o(t)\, \tilde{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \tilde{\beta}_1(t) \\ 0 & 1 & 0 & \tilde{\beta}_2(t) \\ 0 & 0 & 1 & \tilde{\beta}_3(t) \end{pmatrix},$$

où $\tilde{\beta}_1(t)$, $\tilde{\beta}_2(t)$, $\tilde{\beta}_3(t)$ ce sont des fonctions additives.
Si $g_o \in$ /4/ ,la relation /22/ a lieu, puisque les translations sont commutatives.

Si $g_o \in$/5/ ,la condition /21/ nous donne /pour les éléments de la dernière colonne et trois premières lignes/:

/ I.1/ $\qquad \tilde{\beta}_2(t) \equiv \varphi_3(t)\tilde{\beta}_2(t)$

et /22/ est équivalente à :

/ I.2/ $\qquad \tilde{\beta}_2(s) \equiv \varphi_3(\tau)\tilde{\beta}_2(s)$.

Il résulte de / I.1/ que $\tilde{\beta}_2(t)(\varphi_3(t)-1) \equiv 0$,

---

*) L'expresion " $\square$ a la forme (O) " nous écrivons dans la suite comme $\square \in (O)$.

d'ici d'après le lemme 1 on a $\tilde{\beta}_2(t)\equiv 0$ ou $\varphi_3(t)\equiv 1$ .Puisque dans notre cas $\varphi_3(t)\not\equiv 1$,on a $\tilde{\beta}_2(t)\equiv 0$ et de là la relation /I.2/ a lieu, c.q.f.d.

Si g_0 a les autres formes possibles,en raisonnant analogiquement nous constatons que /21/ entraîne /22/ .

Cas II. $f_0 \in$ /5/ et $g_0 \in$ /5/ ,où dans g_0 nous prenons $\tilde{\varphi}_3$, $\tilde{\beta}_1$, $\tilde{\beta}_3$, $\tilde{e}$ au lieu de φ_3 , β_1 , β_3 , e .Posons de plus dans /3/

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

La relation /21/ donne pour les éléments de la colonne dernière et les trois premières lignes *)

/II.1/ $(\varphi_3(t)-1)[\tilde{\beta}_1(t)(aw-uc)+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_3(t)-1)(xc-az)+\tilde{\beta}_3(t)(uz-xw)]y\equiv 0,$

/II.2/ $(\varphi_3(t)-1)[\tilde{\beta}_1(t)(aw-uc)+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_3(t)-1)(xc-az)+\tilde{\beta}_3(t)(uz-xw)]v-$
$$-(\varphi_3(t)-1)[\beta_1(t)u+ve(\varphi_3(t)-1)+\beta_3(t)w]\det A\equiv 0,$$

/II.3/ $(\varphi_3(t)-1)[\tilde{\beta}_1(t)(aw-uc)+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_3(t)-1)(xc-az)+\tilde{\beta}_3(t)(uz-xw)]b\equiv 0.$

Pour démontrer la relation /22/ il suffit de montrer que

/II.4/ $(\varphi_3(s)-1)[\tilde{\beta}_1(r)(aw-uc)+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_3(r)-1)(xc-az)+\tilde{\beta}_3(r)(uz-xw)]y\equiv 0,$

/II.5/ $(\varphi_3(s)-1)[\tilde{\beta}_1(r)(aw-uc)+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_3(r)-1)(xc-az)+\tilde{\beta}_3(r)(uz-xw)]v-$
$$-(\tilde{\varphi}_3(r)-1)[\beta_1(s)u+ve(\varphi_3(s)-1)+\beta_3(s)w]\det A\equiv 0,$$

/II.6/ $(\varphi_3(s)-1)[\tilde{\beta}_1(r)(aw-uc)+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_3(r)-1)(xc-az)+\tilde{\beta}_3(r)(uz-xw)]b\equiv 0.$

Nous avons d'après /21/ pour les trois premières lignes et colonnes

---

*) Nous omettrons dans la suite l'expresion " pour les éléments de la colonne dernière et les trois premières lignes".

$$(\tilde{\varphi}_3(t)-1)(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)v \equiv 0,$$
$$(\tilde{\varphi}_3(t)-1)(\varphi_3(t)-1)(xc-az)y \equiv 0,$$
$$(\tilde{\varphi}_3(t)-1)(\varphi_3(t)-1)(xc-az)b \equiv 0,$$
$$(\tilde{\varphi}_3(t)-1)(\varphi_3(t)-1)(uz-xw)v \equiv 0$$

et de plus $\tilde{\varphi}_3(t)\not\equiv 1$ et $\varphi_3(t)\not\equiv 1$. Il suffit donc de vérifier les conditions /II.4/ -/II.6/ seulement sous les suppositions que les relations susdites soient remplies. Si dans ces relations au moins un des nombres /aw-uc/v,/xc-az/y,/xc-az/b ou /uz-xw/v est différent de zéro, alors d`après le lemme 1 nous recevons $\tilde{\varphi}_3(t)\equiv 1$ ou $\varphi_3(t)\equiv 1$,ce qui est impossible. Nous avons donc

/aw-uc/v=0=/xc-az/y et /xc-az/b=0=/uz-xw/v.

Il en résulte puisque la matrice A est non-singulière (a_1) v=0 et xc-az=0 ou (a_2) u=0=v et y=0=b .

Dans le cas (a_1) les relations /II.1/ et /II.3/ prennent la forme

$$(\varphi_3(t)-1)[\tilde{\beta}_1(t)(aw-uc)+\tilde{\beta}_3(t)(uz-xw)]y \equiv 0,$$
$$(\varphi_3(t)-1)[\tilde{\beta}_1(t)(aw-uc)+\tilde{\beta}_3(t)(uz-xw)]b \equiv 0,$$

où $|y|+|b| \neq 0$. Nous avons, puisque $\varphi_3(t)\not\equiv 1$,

$$\tilde{\beta}_1(t)(aw-uc)+\tilde{\beta}_3(t)(uz-xw) \equiv 0.$$

Les relations /II.4/ et /II.6/ ont lieu dans ce cas et la relation /II.2/ prend la forme

$$(\tilde{\varphi}_3(t)-1)[\beta_1(t)u+\beta_3(t)w]\det A \equiv 0,$$

ce qui nous donne d`après $\tilde{\varphi}_3(t)\not\equiv 1$ que

$$\beta_1(t)u+\beta_3(t)w \equiv 0.$$

Dans ce cas la relation /II.5/ est remplie, c.q.f.d.

Dans le cas (a_2) les relations /II.4/ et /II.6/ ont lieu et la relation /II.2/ prend la forme

$$(\tilde{\varphi}_3(t)-1)(\varphi_3(t)-1)(xc-az)v(\tilde{e}-ve)\equiv 0\,.$$

Il en résulte d'après $\tilde{\varphi}_3(t)\not\equiv 1\not\equiv \varphi_3(t)$ et $/xc-az/v \neq 0$ que $\tilde{e} = ve$,donc la relation /II.5/ est satisfaite,q.e.d.

Dans le cas si $f_0 \in /5/$ et $g_0 \in /6/$ le raisonnement est analogue que dans le cas II.

Dans les cas si $f_0 \in /5/$ et g_0 prend l'une des formes /7/ , /15/ , /16/ on peut faire la démonstration analogiquement que dans le cas II.

<u>Cas III.</u> $f_0 \in /5/$ et $g_0 \in /6/$,où dans g_0 nous prenons $\tilde{\varphi}_2$, $\tilde{\varphi}_3$, $\tilde{\beta}_3$, $\tilde{d}$, $\tilde{e}$ au lieu de φ_2 , φ_3 , β_3 , d , e .

La relation /21/ donne

/III.1/ $$(\varphi_3(t)-1)[(\tilde{\varphi}_2(t)-1)(aw-uc)\tilde{d}+(\tilde{\varphi}_3(t)-1)(xc-az)\tilde{e}+\tilde{\beta}_3(t)(uz-xw)]y-$$
$$-(\tilde{\varphi}_2(t)-1)[x\beta_1(t)+ye(\varphi_3(t)-1)+z\beta_3(t)]\det A\equiv 0,$$

/III.2/ $$(\varphi_3(t)-1)[(\tilde{\varphi}_2(t)-1)(aw-uc)\tilde{d}+(\tilde{\varphi}_3(t)-1)(xc-az)\tilde{e}+\tilde{\beta}_3(t)(uz-xw)]v-$$
$$-(\tilde{\varphi}_3(t)-1)[u\beta_1(t)+ve(\varphi_3(t)-1)+w\beta_3(t)]\det A\equiv 0,$$

/III.3/ $$(\varphi_3(t)-1)[(\tilde{\varphi}_2(t)-1)(aw-uc)\tilde{d}+(\tilde{\varphi}_3(t)-1)(xc-az)\tilde{e}+\tilde{\beta}_3(t)(uz-xw)]b\equiv 0.$$

Pour démontrer /22/ il suffit de montrer que

/III.4/ $$(\varphi_3(s)-1)[(\tilde{\varphi}_2(r)-1)(aw-uc)\tilde{d}+(\tilde{\varphi}_3(r)-1)(xc-az)\tilde{e}+\tilde{\beta}_3(r)(uz-xw)]y-$$
$$(\tilde{\varphi}_2(r)-1)[x\beta_1(s)+ye(\varphi_3(s)-1)+z\beta_3(s)]\det A\equiv 0,$$

/III.5/ $$(\varphi_3(s)-1)[(\tilde{\varphi}_2(r)-1)(aw-uc)\tilde{d}+(\tilde{\varphi}_3(r)-1)(xc-az)\tilde{e}+\tilde{\beta}_3(r)(uz-xw)]v-$$
$$-(\tilde{\varphi}_3(r)-1)[u\beta_1(s)+ve(\varphi_3(s)-1)+w\beta_3(s)]\det A\equiv 0,$$

/III.6/ $$(\varphi_3(s)-1)[(\tilde{\varphi}_2(r)-1)(aw-uc)\tilde{d}+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_3(r)-1)(xc-az)+\tilde{\beta}_3(r)(uz-xw)]b\equiv 0.$$

D'après /21/ pour les trois premières colonnes et lignes nous avons *)

---

*) Nous omettrons dans la suite l'expression "pour les trois premières colonnes et lignes".

/III.7/ $(\tilde{\varphi}_2(t)-\tilde{\varphi}_3(t))(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)v \equiv 0,$

$$(\tilde{\varphi}_2(t)-\tilde{\varphi}_3(t))(\varphi_3(t)-1)(xc-az)y \equiv 0,$$
$$(\tilde{\varphi}_2(t)-1)\ (\varphi_3(t)-1)(aw-uc)b \equiv 0,$$
$$(\tilde{\varphi}_2(t)-1)\ (\varphi_3(t)-1)(uz-xw)y \equiv 0,$$
$$(\tilde{\varphi}_3(t)-1)\ (\varphi_3(t)-1)(xc-az)b \equiv 0,$$
$$(\tilde{\varphi}_3(t)-1)\ (\varphi_3(t)-1)(uz-xw)v \equiv 0,$$

où $\tilde{\varphi}_2(t) \not\equiv 1 \not\equiv \tilde{\varphi}_3(t)$ et $\varphi_3(t) \not\equiv 1$. Il suffit donc de vérifier les conditions /III.4/-/III.6/ seulement sous ces suppositions.

Nous recevons des /III.7/ en raisonnant comme dans le cas II

(a_1) a=0=c et v=0=y ou (a_2) x=0=z et b=0=v ou (a_3) b=0=y et w=0=u ou (a_4) b=0=xw-uz et $\tilde{\varphi}_2(t) \equiv \tilde{\varphi}_3(t)$.

En raisonnant comme dans le cas II nous recevons dans les trois premiers cas que les relations /III.4/-/III.6/ sont remplies. Dans le cas (a_4) la relation /III.6/ a lieu et les relations /III.1/ et /III.2/ prennent la forme:

$$(\tilde{\varphi}_2(t)-1)[(\varphi_3(t)-1)k\cdot y - (x\beta_1(t)+z\beta_3(t))\det A] \equiv 0$$
$$(\tilde{\varphi}_2(t)-1)[(\varphi_3(t)-1)k\cdot v - (u\beta_1(t)+w\beta_3(t))\det A] \equiv 0,$$

où $k=\tilde{d}/aw-uc/+\tilde{e}/xc-az/-e\cdot\det A$ et $\tilde{\varphi}_2(t) \not\equiv 1$ et $\varphi_3(t) \not\equiv 1$. Au moins un des nombres y ou v est different de zéro, puisque la matrice A est non-singulière et xw-uz=0. Prenons que $y \neq 0$, donc si $k \neq 0$ d'après le lemme 3 nous avons $\tilde{\varphi}_2(t) \equiv 1$ ou $\varphi_3(t) \equiv 1$ et $x\beta_1(t) + z\beta_3(t) \equiv 0$, contrairement à la supposition faite. Il en résulte que $k=0$ et dans ce cas les relations /III.1/ et /III.2/ prennent la forme

$$(\tilde{\varphi}_2(t)-1)(x\beta_1(t)+z\beta_3(t))\det A\equiv 0,$$

d'où, d'après le lemme 1, nous avons $x\beta_1(t)+z\beta_3(t)\equiv 0$.

Les relations /III.4/ et /III.5/ ont donc lieu et la démonstration dans le cas III est finie.

<u>Cas IV.</u> Si $f_0\in/5/$ et $g_0\in/8/$ dans ce cas d'après /21/ nous avons

/IV.1/ $\alpha_1(t)(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)b\equiv 0,$

/IV.2/ $\alpha_1(t)(\varphi_3(t)-1)(xc-az)b+(\frac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t))(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)b\equiv 0,$

/IV.3/ $\alpha_1(t)(\varphi_3(t)-1)[b(xc-az)+v(uc-aw)]\equiv 0,$

/IV.4/ $(\varphi_3(t)-1)[\alpha_1(t)(y(aw-uc)+v(az-xc))+(\frac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t))(az-xc)b]\equiv 0,$

/IV.5/ $(\varphi_3(t)-1)[\alpha_1(t)(v(xc-az)+b(xw-uz))+(\frac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t))(aw-uc)v]\equiv 0,$

/IV.6/ $\alpha_1(t)(\varphi_3(t)-1)[y(xc-az)+v(xw-uz)]+$

$$+(\tfrac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t))(\varphi_3(t)-1)[y(aw-uc)+b(xw-uz)]\equiv 0.$$

Puisque $\alpha_1(t)\not\equiv 0\not\equiv\alpha_2(t)$ et $\varphi_3(t)\not\equiv 1$, il résulte de /IV.1/ et /IV.2/ que $b=0$ ou $a=0=c$. Pour $b=0$ la relation /IV.3/ donne $v/aw-uc/=0$. De là nous avons les cas suivants ; $b=0=v$ ou $b=0=aw-uc$. Dans le cas premier la relation /IV.4/ prend la forme:

$$\alpha_1(t)(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)y\equiv 0.$$

Puisque la matrice A est non-singulière et $\alpha_1(t)\not\equiv 0\not\equiv\alpha_2(t)$ et $\varphi_3(t)\not\equiv 1$ cette relation ne peut pas avoir lieu.

Dans le cas deuxième la relation /IV.4/ donne

$$\alpha_1(t)(\varphi_3(t)-1)(az-xc)v\equiv 0,$$

ce qui ne peut pas aussi avoir lieu.

Il en résulte que $b \neq 0$,donc $a=0=c$ .Dans ce cas la relation /IV.5/ prend la forme

$$\alpha_1(t)(\varphi_3(t)-1)(xw-uz)b \equiv 0$$

et aussi ne peut pas avoir lieu.

Il résulte de nos considérations que dans le cas IV les relations /21/ ne peuvent pas avoir lieu,ce qui finit la démonstration.

Cas V. $f_0 \in$ /5/ et $g_0 \in$ /9/ et nous prenons dans g_0 les $\tilde{\varphi}_2$, $\tilde{\varphi}_3$, $\tilde{\varphi}_1$, $\tilde{e}$ au lieu des φ_2 , φ_3 , φ_1 , e .

Les relations /21/ nous donnent

/V.1/ $$\{d(\tilde{\varphi}_2(t)-1)(aw-uy)+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_3(t)-1)(xc-az)+f(\tilde{\varphi}_1(t)-1)(uz-xw)\}(\varphi_3(t)-1)y-$$
$$-(\tilde{\varphi}_2(t)-1)\det A(x\beta_1(t)+ye(\varphi_3(t)-1)+z\beta_3(t)) \equiv 0,$$

/V.2/ $$\{d(\tilde{\varphi}_2(t)-1)(aw-uc)+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_3(t)-1)(xc-az)+f(\tilde{\varphi}_1(t)-1)(uz-xw)\}v(\varphi_3(t)-1)-$$
$$-(\tilde{\varphi}_3(t)-1)\det A(u\beta_1(t)+ve(\varphi_3(t)-1)+w\beta_3(t)) \equiv 0,$$

/V.3/ $$\{d(\tilde{\varphi}_2(t)-1)(aw-uc)+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_3(t)-1)(xc-az)+$$
$$+f(\tilde{\varphi}_1(t)-1)(uz-xw)\}(\varphi_3(t)-1)b-$$
$$-(\tilde{\varphi}(t)-1)\det A(a\beta_1(t)+be(\varphi_3(t)-1)+c\beta_3(t)) \equiv 0.$$

Pour démontrer /22/ il suffit de montrer que

/V.4/ $$\{d(\tilde{\varphi}_2(r)-1)(aw-uc)+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_3(r)-1)(xc-az)+f(\tilde{\varphi}_1(r)-1)(uz-xw)\}(\varphi_3(s)-1)y-$$
$$-(\tilde{\varphi}_2(r)-1)\det A(x\beta_1(s)+ye(\varphi_3(s)-1)+z\beta_3(s)) \equiv 0,$$

/V.5/ $$\{d(\tilde{\varphi}_2(r)-1)(aw-uc)+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_3(r)-1)(xc-az)+f(\tilde{\varphi}_1(r)-1)(uz-xw)\}(\varphi_3(s)-1)v-$$
$$-(\tilde{\varphi}_3(r)-1)\det A(u\beta_1(s)+ve(\varphi_3(s)-1)+w\beta_3(s)) \equiv 0,$$

/V.6/ $$\{d(\tilde{\varphi}_2(r)-1)(aw-uc)+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_3(r)-1)(xc-az)+f(\tilde{\varphi}_1(r)-1)(uz-xw)\}(\varphi_3(s)-1)b-$$
$$-(\tilde{\varphi}_1(r)-1)\det A(a\beta_1(s)+be(\varphi_3(s)-1)+c\beta_3(s)) \equiv 0.$$

Nous avons aussi des relations /21/

/V.7/ $$(\varphi_3(t)-1)(\tilde{\varphi}_3(t)-\tilde{\varphi}_2(t))(aw-uc)v\equiv 0,$$
$$(\varphi_3(t)-1)(\tilde{\varphi}_2(t)-\tilde{\varphi}_1(t))(aw-uc)b\equiv 0,$$
$$(\varphi_3(t)-1)(\tilde{\varphi}_3(t)-\tilde{\varphi}_2(t))(xc-az)y\equiv 0,$$
$$(\varphi_3(t)-1)(\tilde{\varphi}_3(t)-\tilde{\varphi}_1(t))(xc-az)b\equiv 0,$$
$$(\varphi_3(t)-1)(\tilde{\varphi}_2(t)-\tilde{\varphi}_1(t))(uz-xw)\equiv 0,$$
$$(\varphi_3(t)-1)(\tilde{\varphi}_3(t)-\tilde{\varphi}_1(t))(uz-xw)v\equiv 0,.$$

En raisonnant analogiquement comme dans le cas II nous avons de /V.7/

(a_1) $\tilde{\varphi}_1(t)\equiv\tilde{\varphi}_2(t)\equiv\tilde{\varphi}_3(t)$ ou (a_2) $\tilde{\varphi}_3(t)\equiv\tilde{\varphi}_2(t)$ et $b=0=uz-xw$

ou (a_3) $\tilde{\varphi}_3(t)\equiv\tilde{\varphi}_1(t)$ et $y=0=aw-uc$ ou (a_4) $u=0=w=y=b=0$.

Dans le cas (a_1) les relations /V.1/-/V.3/ prennent la forme

/V.8/ $$(\tilde{\varphi}_2(t)-1)\cdot\{(\varphi_3(t)-1)ky-\det A\,(x\beta_1(t)+z\beta_3(t))\}\equiv 0,$$
$$(\tilde{\varphi}_2(t)-1)\{(\varphi_3(t)-1)kv-\det A\,(u\beta_1(t)+w\beta_3(t))\}\equiv 0,$$
$$(\tilde{\varphi}_2(t)-1)\{(\varphi_3(t)-1)kb-\det A\,(a\beta_1(t)+c\beta_3(t))\}\equiv 0,$$

où $k=d/aw-uc/+e/xc-az/+f/uz-xw/-\det A\cdot e$ et $\tilde{\varphi}_2(t)\not\equiv 1$ et $\varphi_3(t)\not\equiv 1$.

Puisque la matrice A est non-singulière, au moins un des nombres y, v, b est différent de zéro. Soit $y\neq 0$, dans ce cas si $k\neq 0$ d'après le lemme 2 on a $\tilde{\varphi}_2(t)\equiv 1$ ou $\varphi_3(t)\equiv 1$ et $x\beta_1(t)+z\beta_3(t)\equiv 0$, contrairement à la supposition faite. D'où $k=0$ et d'après les relations /V.8/ nous avons:

$$x\beta_1(t)+z\beta_3(t)\equiv 0,$$
$$u\beta_1(t)+w\beta_3(t)\equiv 0,$$
$$a\beta_1(t)+c\beta_3(t)\equiv 0.$$

Les relations /V.4/-/V.6/ ont donc lieu, c.q.f.d.

La démonstration dans les cas (a_2) et (a_3) est analogue la démonstration dans le cas III (a_4) .

Dans le cas (a_4) les relations /V.1/-/V.3/ prennent la forme

$$(\tilde{\varphi}_2(t)-1)\det A\,(x\beta_1(t)+z\beta_3(t))\equiv 0,$$
$$(\tilde{\varphi}_3(t)-1)(\tilde{e}(xc-az)-e\det A)(\varphi_3(t)-1)v\equiv 0,$$
$$(\tilde{\varphi}_1(t)-1)\det A\,(a\beta_1(t)+c\beta_3(t))\equiv 0,$$

où $v\neq 0$ et $\tilde{\varphi}_i(t)\not\equiv 1$ pour $i=1,2,3$ et $\varphi_3(t)\not\equiv 1$.

Nous avons donc d'après le lemme 1

$$x\beta_1(t)+z\beta_3(t)\equiv 0,\quad a\beta_1(t)+c\beta_3(t)\equiv 0\quad \text{et}\quad \tilde{e}=ve .$$

Les relations /V.4/-/V.6/ sont donc remplies, ce qui finit la démonstration.

Nous avons donc fini la démonstration dans le cas V .

<u>Cas VI</u>. $f_0\in$ /5/ et $g_0\in$ /10/, où prenons $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ au lieu a, b, c dans g_0 .

Les relations /21/ donnent

/VI.1/ $$\{[\tilde{a}(\varphi(t)-1)+\tilde{b}\varphi(t)\tilde{\alpha}_1(t)](aw-uc)+[\tilde{b}\varphi(t)\tilde{\alpha}_2(t)+\tilde{c}(\varphi(t)-1)](uz-xw)+$$
$$+\tilde{b}(\varphi(t)-1)(xc-az)\}(\varphi_3(t)-1)y-(\varphi(t)-1)\det A(x\beta_1(t)+ye(\varphi_3(t)-1)+$$
$$+z\beta_3(t))-\varphi(t)\tilde{\alpha}_1(t)\det A\,(u\beta_1(t)+ve(\varphi_3(t)-1)+w\beta_3(t))\equiv 0,$$

/VI.2/ $$\{[\tilde{a}(\varphi(t)-1)+\tilde{b}\varphi(t)\tilde{\alpha}_1(t)](aw-uc)+[\tilde{b}\varphi(t)\tilde{\alpha}_2(t)+\tilde{c}(\varphi(t)-1)](uz-xw)+$$
$$+\tilde{b}(\varphi(t)-1)(xc-az)\}(\varphi_3(t)-1)v-(\varphi(t)-1)\det A(u\beta_1(t)+ve(\varphi_3(t)-1)+w\beta_3(t))\equiv 0,$$

/VI.3/ $$\{[\tilde{a}(\varphi(t)-1)+\tilde{b}\varphi(t)\tilde{\alpha}_1(t)](aw-uc)+[\tilde{b}\varphi(t)\alpha_2(t)+\tilde{c}(\varphi(t)-1)](uz-xw)+$$
$$+\tilde{b}(\varphi(t)-1)(xc-az)\}(\varphi_3(t)-1)b-(\varphi(t)-1)\det A(a\beta_1(t)+be(\varphi_3(t)-1)+c\beta_3(t))-$$
$$-\varphi(t)\tilde{\alpha}_2(t)\det A\,(u\beta_1(t)+ve(\varphi_3(t)-1)+w\beta_3(t))\equiv 0$$

et pour démontrer /22/ il suffit de montrer

/VI.4/ $$\{[\tilde{a}(\varphi(r)-1)+\tilde{b}\varphi(r)\tilde{\alpha}_1(r)](aw-uc)+[\tilde{b}(\varphi(r)\tilde{\alpha}_2(r)+\tilde{c}(\varphi(r)-1)](uz-xw)+$$

$$+\tilde{b}(\varphi(r)-1)(xc-az)\}(\varphi_3(s)-1)y-(\varphi(r)-1)\det A\,(x\beta_1(s)+ye(\varphi_3(s)-1)+$$
$$+z\beta_3(s))-\varphi(r)\tilde{\alpha}_1(r)\det A\,(u\beta_1(s)+ve(\varphi_3(s)-1)+w\beta_3(s))\equiv 0,$$

/VI.5/ $$\{[\tilde{a}(\varphi(r)-1)+\tilde{b}\varphi(r)\tilde{\alpha}_1(r)](aw-uc)+[\tilde{b}\varphi(r)\tilde{\alpha}_2(r)+\tilde{c}(\varphi(r)-1)](uz-xw)+$$
$$+\tilde{b}(\varphi(r)-1)(xc-az)\}(\varphi_3(s)-1)v-(\varphi(r)-1)\det A(u\beta_1(s)+ve(\varphi_3(s)-1)+w\beta_3(s))\equiv 0,$$

/VI.6/ $$\{[\tilde{a}(\varphi(r)-1)+\tilde{b}\,\varphi(r)\tilde{\alpha}_1(r)](aw-uc)+[\tilde{b}\varphi(r)\alpha_2(r)+\tilde{c}(\varphi(r)-1)](uz-xw)+$$
$$+\tilde{b}(\varphi(r)-1)(xc-az)\}(\varphi_3(s)-1)b-(\varphi(r)-1)\det A(a\beta_1(s)+be(\varphi_3(s)-1)+c\beta_3(s))-$$
$$-\varphi(r)\tilde{\alpha}_2(r)\det A\,(u\beta_1(s)+ve(\varphi_3(s)-1)+w\beta_3(s))\equiv 0.$$

Les relations /21/ donnent aussi

/VI.7/ $$\tilde{\alpha}_1(t)\,(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)v\equiv 0,$$
$$\tilde{\alpha}_2(t)\,(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)v\equiv 0,$$
$$\tilde{\alpha}_1(t)\,(\varphi_3(t)-1)(uz-xw)v\equiv 0,$$
$$\tilde{\alpha}_2(t)\,(\varphi_3(t)-1)(uz-xw)v\equiv 0,$$
$$\{\tilde{\alpha}_1(t)\,[y(aw-uc)-v(xc-az)]+\tilde{\alpha}_2(t)y(uz-xw)\}(\varphi_3(t)-1)\equiv 0,$$
$$\{\tilde{\alpha}_2(t)[b(uz-xw)-v(xc-az)]+\tilde{\alpha}_1(t)\,b\,(aw-uc)\}(\varphi_3(t)-1)\equiv 0.$$

Si au moins un des nombres v/aw-uc/ ou v/uz-xw/ est différent de zéro,donc nous avons $\tilde{\alpha}_1(t)\equiv 0\equiv\tilde{\alpha}_2(t)$ .En raiso-nnant dans la suite comme dans le cas $V(a_1)$ nous avons les relations /VI.4/-/VI.6/,c.q.f.d.

Considerons le cas si v/aw-uc/=0=v/uz-xw/. Nous avons (a_1) v = 0 ou (a_2) w = 0 = u .

Dans le cas (a_1) les deux relations dernières dans /VI.7/ donnent $\tilde{\alpha}_1(t)$/aw-uc/ + $\tilde{\alpha}_2(t)$ /uz-xw/$\equiv 0$ et dans ce cas la relation /VI.2/ prend la forme

$$(\varphi(t)-1)(u\beta_1(t)+w\beta_3(t))\det A\equiv 0,$$

d'où d'après le lemme 1

$$u\beta_1(t)+w\beta_3(t)\equiv 0.$$

Les relations /VI.1/ et /VI.3/ sont dans ce cas de la forme

$$(\varphi(t)-1)\{(\varphi_3(t)-1)ky - \det A\,(x\beta_1(t)+x\beta_3(t))\} \equiv 0,$$

$$(\varphi(t)-1)\{(\varphi_3(t)-1)kv - \det A\,(a\beta_1(t)+z\beta_3(t))\} \equiv 0,$$

où $k=\tilde{a}/aw-uc/ +\tilde{b}/xc-az/ +\tilde{c}/uz-xw/ -e\cdot\det A$.

En raisonnant dans la suite comme dans le cas V.(a_1) nous constatons que les relations /VI.4/-/VI.6/ sont remplies, ce qui finit la démonstration.

Dans le cas (a_2) d'après /VI.7/ nous avons de plus $\tilde{\alpha}_1(t)\equiv 0\equiv\tilde{\alpha}_2(t)$,d'où la relation /VI.2/ donne

$$(\varphi(t)-1)(\varphi_3(t)-1)(xc-az)v(\tilde{b}-ve)\equiv 0.$$

Il en résulte que $\tilde{b}$ = ve et les relations /VI.1/ et /VI.3/ prennent la forme

$$(\varphi(t)-1)(x\beta_1(t)+z\beta_3(t))\det A\equiv 0,$$

$$(\varphi(t)-1)(a\beta_1(t)+c\beta_3(t))\det A\equiv 0.$$

Nous avons d'après le lemme 1 que $x\beta_1(t)+z\beta_3(t)\equiv 0$ et $a\beta_1(t)+c\beta_3(t)\equiv 0$, les relations /VI.4/-/VI.6/ sont donc remplies, c.q.f.d.

Si $f_0\in$ /5/ et $g_0\in$ /11/ ou $g_0\in$ /12/ ou $g_0\in$ /13/ la démonstration est analogue comme dans le cas VI.

<u>Cas VII</u>. Si $f_0\in$ /5/ et $g_0\in$ /14/ ,où dans g_0 prenons $\tilde{d}$, $\tilde{e}$ au lieu de d, e .

La relation /21/ donne

/VII.1/ $(\varphi_3(t)-1)[(\alpha_3(t)+\frac{\tilde{d}}{2}\alpha_1^2(t))(aw-uc)+\tilde{d}\alpha_1(t)(xc-az)+(\alpha_4(t)+\frac{\tilde{e}}{2}\alpha_2^2(t))(uz-xw)]y-$

$$-\alpha_1(t)[u\beta_1(t)+ve(\varphi_3(t)-1)+w\beta_3(t)]\det A\equiv 0,$$

/VII.2/ $(\varphi_3(t)-1)[(\alpha_3(t)+\frac{\tilde{d}}{2}\alpha_1^2(t))(aw-uc)+\tilde{d}\alpha_1(t)(xc-az)+(\alpha_4(t)+\frac{\tilde{e}}{2}\alpha_2^2(t))(uz-xw)]v\equiv 0,$

/VII.3/ $(\varphi_3(t)-1)[(\alpha_3(t)+\frac{\tilde{d}}{2}\alpha_1^2(t))(aw-uc)+\tilde{a}\alpha_1(t)(xc-az)+(\alpha_4(t)+\frac{\tilde{e}}{2}\alpha_2^2(t))(uz-xw)]b-$
$$-\alpha_2(t)[u\beta_1(t)+ve(\varphi_3(t)-1)+w\beta_3(t)]\det A\equiv 0$$

Pour démontrer /22/ il suffit de montrer que

/VII.4/ $(\varphi_3(s)-1)[(\alpha_3(r)+\frac{\tilde{d}}{2}\alpha_1^2(r))(aw-uc)+\tilde{a}\alpha_1(r)(xc-az)+(\alpha_4(r)+\frac{\tilde{e}}{2}\alpha_2^2(r))(uz-xw)]y-$
$$-\alpha_1(r)[u\beta_1(s)+ve(\varphi_3(s)-1)+w\beta_3(s)]\det A\equiv 0,$$

/VII.5/ $(\varphi_3(s)-1)[(\alpha_3(r)+\frac{\tilde{d}}{2}\alpha_1^2(r))(aw-uc)+\tilde{a}\alpha_1(r)(xc-az)+(\alpha_4(r)+\frac{\tilde{e}}{2}\alpha_2^2(r))(uz-xw)]v\equiv 0,$

/VII.6/ $(\varphi_3(s)-1)[(\alpha_3(r)+\frac{\tilde{d}}{2}\alpha_1^2(r))(aw-uc)+\tilde{a}\alpha_1(r)(xc-az)+(\alpha_4(r)+\frac{\tilde{e}}{2}\alpha_2^2(r))(uz-xw)]b-$
$$-\alpha_2(r)[u\beta_1(s)+ve(\varphi_3(s)-1)+w\beta_3(s)]\det A\equiv 0.$$

D`après /21/ nous avons aussi

/VII.7/ $\alpha_1(t)(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)v\equiv 0,$
$$\alpha_1(t)(\varphi_3(t)-1)(uz-xw)v\equiv 0,$$
$$\alpha_2(t)(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)v\equiv 0,$$
$$\alpha_2(t)(\varphi_3(t)-1)(uz-xw)v\equiv 0,$$
$$(\varphi_3(t)-1)[\alpha_1(t)((aw-uc)y+v(az-xc))+\alpha_2(t)(uz-xw)y]\equiv 0,$$
$$(\varphi_3(t)-1)[\alpha_1(t)(aw-uc)b+\alpha_2(t)((uz-xw)b+v(az-xc))]\equiv 0,$$

où $\alpha_1(t)\not\equiv 0\not\equiv\alpha_2(t)$ et $\varphi_3(t)\not\equiv 1$ .En raisonnant comme dans le cas II nous recevons des quatres premières relations dans /VII.7/ que v=0 ou w=0=u .Puisque la matrice A est non-singulière les deux dernières relations nous donnet que v=0 et de là

$$\alpha_1(t)(aw-uc)+\alpha_2(t)(uz-xw)\equiv 0,$$

où /aw-uc/·/uz-xw/≠0 .Il en résulte que la relation /VII.5/ a lieu et puisque $\tilde{a}\alpha_1(t)\equiv\tilde{e}\alpha_2(t)$, les relations /VII.1/ et /VII.2/ prennent la forme

$$(\varphi_3(t)-1)[\alpha_3(t)(aw-uc)+\alpha_4(t)(uz-xw)+\tilde{a}\alpha_1(t)(xc-az)]y-$$
$$-\alpha_1(t)[u\beta_1(t)+w\beta_3(t)]\det A\equiv 0,$$

$$(\varphi_3(t)-1)\,[\alpha_3(t)(aw-uc)+\alpha_4(t)(uz-xw)+\bar{\partial}\alpha_1(t)(xc-az)]b-$$
$$-\alpha_2(t)\,[u\beta_1(t)+v\beta_3(t)]\det A\equiv 0,$$

où $\alpha_2(t)\equiv -\frac{aw-uc}{uz-xw}\alpha_1(t)$.

Si dans ce système nous considérons $\alpha_1(t)[u\beta_1(t)+v\beta_3(t)]\det A$ et $(\varphi_3(t)-1)[\alpha_3(t)(aw-uc)+\alpha_4(t)(uz-xw)+\bar{\partial}\alpha_1(t)(xc-az)]$ comme les inconnues, le déterminant $/uz-xw/^{-1}\det A$ est différent de zéro. Puisque $\alpha_1(t)\not\equiv 0$ et $\varphi_3(t)\not\equiv 1$ donc

$$\alpha_3(t)(aw-uc)+\alpha_4(t)(uz-xw)+\bar{\partial}\alpha_1(t)(xc-az)\equiv 0$$

et $u\beta_1(t)+v\beta_3(t)\equiv 0$.

Il en résulte que /VII.4/ et /VII.5/ ont lieu, c.q.f.d.

<u>Cas VIII</u>. Si $f_0\in$ /5/ et $g_0\in$ /17/ les relations /21/ donnent aussi

/VIII.1/ $\alpha_1(t)(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)v\equiv 0,$

$$\alpha_1(t)(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)b\equiv 0,$$
$$\alpha_2(t)(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)v\equiv 0,$$
$$\alpha_2(t)(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)b\equiv 0,$$
$$(\varphi_3(t)-1)\,[\alpha_1(t)(y(aw-uc)+v(az-xc))+\alpha_2(t)b(az-xc)]\equiv 0,$$
$$(\varphi_3(t)-1)[\alpha_1(t)v(xw-uz)+\alpha_2(t)(y(aw-uc)+b(xw-uz))]\equiv 0,$$

où $\alpha_1(t)\not\equiv 0\not\equiv\alpha_2(t)$, il n'existe pas un k de $\mathbb{C}$ tel que $\alpha_2(t)\equiv k\alpha_1(t)$ et $\varphi_3(t)\not\equiv 1$. En raisonnant comme dans le cas II nous recevons d'après les quatres premières relations dans /VIII.1/ que $aw-uc=0$ ou $v=0=b$. Puisque la matrice A est non-singulière les deux restantes relations dans /VIII.1/ donnent $aw-uc=0$ et $\alpha_1(t)v+\alpha_2(t)b\equiv 0$, où $vb\neq 0$ ou $v=0=b$ et $/\alpha_1(t)\equiv 0\equiv\alpha_2(t)$ ou $\varphi_3(t)\equiv 1/$, contrairement à la supposition faite. La démonstration dans le cas VIII est donc déterminée.

Cas IX . $f_0 \in$ /6/ et $g_0 \in$ /6/, où dans g_0 nous prenons $\tilde\varphi_2$, $\tilde\varphi_3$, $\tilde\beta_3$, $\tilde d$, $\tilde e$ au lieu de φ_2 , φ_3 , β_3 , d , e .

D'après /21/ nous avons

/IX.1/
$$\begin{aligned}&\tilde d(\tilde\varphi_2(t)-1)[(\varphi_2(t)-1)(vc-bw)x+(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)y]+\\&-(\tilde\varphi_2(t)-1)[xd(\varphi_2(t)-1)+ye(\varphi_3(t)-1)+z\beta_3(t)]\det A+\\&+\tilde e(\tilde\varphi_3(t)-1)[(\varphi_2(t)-1)(bz-yc)x+(\varphi_3(t)-1)(xc-az)y]+\\&+\tilde\beta_3(t)[(\varphi_2(t)-1)(yw-vz)x+(\varphi_3(t)-1)(uz-xw)y]\equiv 0,\end{aligned}$$

/IX.2/
$$\begin{aligned}&\tilde d(\tilde\varphi_2(t)-1)[(\varphi_2(t)-1)(vc-bw)u+(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)v]+\\&+\tilde e(\tilde\varphi_3(t)-1)[(\varphi_2(t)-1)(bz-yc)u+(\varphi_3(t)-1)(xc-az)v]+\\&-(\tilde\varphi_3(t)-1)[ud(\varphi_2(t)-1)+ve(\varphi_3(t)-1)+w\beta_3(t)]\det A+\\&+\tilde\beta_3(t)[(\varphi_2(t)-1)(yw-vz)u+(\varphi_3(t)-1)(uz-xw)v]\equiv 0,\end{aligned}$$

/IX.3/
$$\begin{aligned}&\tilde d(\tilde\varphi_2(t)-1)[(\varphi_2(t)-1)(vc-bw)a+(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)b]+\\&+\tilde e(\tilde\varphi_3(t)-1)[(\varphi_2(t)-1)(bz-yc)a+(\varphi_3(t)-1)(xc-az)b]+\\&+\tilde\beta_3(t)[(\varphi_2(t)-1)(yw-vz)a+(\varphi_3(t)-1)(uz-xw)b]\equiv 0\end{aligned}$$

et pour démontrer les relations /22/ il suffit de montrer

/IX.4/
$$\begin{aligned}&\tilde d(\tilde\varphi_2(r)-1)[(\varphi_2(s)-1)(vc-bw)x+(\varphi_3(s)-1)(aw-uc)y]+\\&-(\tilde\varphi_2(r)-1)[xd(\varphi_2(s)-1)+ye(\varphi_3(s)-1)+z\beta_3(s)]\det A+\\&+\tilde e(\tilde\varphi_3(r)-1)[(\varphi_2(s)-1)(bz-yc)x+(\varphi_3(s)-1)(xc-az)y]+\\&+\tilde\beta_3(r)[(\varphi_2(s)-1)(yw-vz)x+(\varphi_3(s)-1)(uz-xw)y]\equiv 0,\end{aligned}$$

/IX.5/
$$\begin{aligned}&\tilde d(\tilde\varphi_2(r)-1)[(\varphi_2(s)-1)(vc-bw)u+(\varphi_3(s)-1)(aw-uc)v]+\\&+\tilde e(\tilde\varphi_3(r)-1)[(\varphi_2(s)-1)(bz-yc)u+(\varphi_3(s)-1)(xc-az)v]-\\&-(\tilde\varphi_3(r)-1)[ud(\varphi_2(s)-1)+ve(\varphi_3(s)-1)+w\beta_3(s)]\det A+\\&+\tilde\beta_3(r)[(\varphi_2(s)-1)(yw-vz)u+(\varphi_3(s)-1)(uz-xw)v]\equiv 0,\end{aligned}$$

/IX.6/
$$\begin{aligned}&\tilde d(\tilde\varphi_2(r)-1)[(\varphi_2(s)-1)(vc-bw)a+(\varphi_3(s)-1)(aw-uc)b]+\\&+\tilde e(\tilde\varphi_3(r)-1)[(\varphi_2(s)-1)(bx-yc)a+(\varphi_3(s)-1)(xc-ax)b]+\\&+\tilde\beta_3(r)[(\varphi_2(s)-1)(yw-vz)a+(\varphi_3(s)-1)(uz-xw)b]\equiv 0.\end{aligned}$$

De plus de /21/ nous avons

/IX.7/ $(\tilde{\varphi}_2(t)-\tilde{\varphi}_3(t))[(\varphi_2(t)-1)(vc-bw)u+(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)v]\equiv 0,$

/IX.8/ $(\tilde{\varphi}_2(t)-1)[(\varphi_2(t)-1)(vc-bw)a+(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)b]\equiv 0,$

/IX.9/ $(\tilde{\varphi}_2(t)-\tilde{\varphi}_3(t))[(\varphi_2(t)-1)(bz-yc)x+(\varphi_3(t)-1)(xc-az)y]\equiv 0,$

/IX.10/ $(\tilde{\varphi}_3(t)-1)[(\varphi_2(t)-1)(bz-yc)a+(\varphi_3(t)-1)(xc-az)b]\equiv 0,$

/IX.11/ $(\tilde{\varphi}_2(t)-1)[(\varphi_2(t)-1)(yw-vz)x+(\varphi_3(t)-1)(uz-xw)y]\equiv 0,$

/IX.12/ $(\tilde{\varphi}_3(t)-1)[(\varphi_2(t)-1)(yw-vz)u+(\varphi_3(t)-1)(uz-xw)v]\equiv 0,$

où $\tilde{\varphi}_2(t)\not\equiv 1\not\equiv\tilde{\varphi}_3(t)$ et $\varphi_2(t)\not\equiv 1\not\equiv\varphi_3(t)$.

D'après /IX.11/ et /IX.12/ on a $\tilde{\varphi}_3(t)=1$ ou $\tilde{\varphi}_2(t)=1$ ou

/IX.13/ $$\begin{aligned}&(\varphi_2(t)-1)(yw-vz)x+(\varphi_3(t)-1)(uz-xw)y=0,\\&(\varphi_2(t)-1)(yw-vz)u+(\varphi_3(t)-1)(uz-xw)v=0.\end{aligned}$$

Si dans ce système $(\varphi_2(t)-1)(yw-vz)$ et $(\varphi_3(t)-1)(uz-xw)$ sont les inconnues, alors le déterminant de ce système est égal à xv-uy = 0 . Considérons les cas

(a) xv-uy $\neq 0$ ou (b) xv-uy = 0.

Dans le cas (a) nous recevons du système /IX.13/

$$(\varphi_2(t)-1)(yw-vz)=0=(\varphi_3(t)-1)(uz-xw).$$

Si l'un des nombres yw-vz ou uz-xw est différent de zéro, nous pouvons supposer que yw-vz $\neq$ 0, puisque dans le cas uz-xw $\neq$ 0 le raisonnement est analogue. Il en résulte dans ce cas d'après le lemme 1 que $\tilde{\varphi}_2(t)\equiv 1$ ou $\tilde{\varphi}_3(t)\equiv 1$ ou $\varphi_2(t)\equiv 1$, ce qui est impossible dans notre cas. De là yw-vz= 0 =uz-xw, d'où w = 0 = z . Dans ce cas les relations /IX.8/ et /IX.10/ prennent la forme $\tilde{\varphi}_2(t)=1$ ou $\tilde{\varphi}_3(t)=1$ ou

$$\begin{aligned}&(\varphi_2(t)-1)va-(\varphi_3(t)-1)bu=0,\\&(\varphi_2(t)-1)ya-(\varphi_3(t)-1)bx=0.\end{aligned}$$

Si dans ce système nous prenons $(\varphi_2(t)-1)a$ et $(\varphi_3(t)-1)b$ comme les inconnues, le déterminant de ce système vx-uy est différent de zéro. En considérant comme ci-dessus nous avons a = 0 = b . Dans ce cas les relations /IX.7/ et /IX.9/ ont la forme

$$(\tilde{\varphi}_2(t)-\tilde{\varphi}_3(t))(\varphi_2(t)-\varphi_3(t))vuc \equiv 0,$$

$$(\tilde{\varphi}_2(t)-\tilde{\varphi}_3(t))(\varphi_2(t)-\varphi_3(t))xyc \equiv 0,$$

où c ≠ 0 , d'où

(a_1) $\tilde{\varphi}_2(t)\equiv\tilde{\varphi}_3(t)$ ou (a_2) $\varphi_2(t)\equiv\varphi_3(t)$ ou

(a_3) v = 0 = x ou (a_4) u = 0 = y .

Dans le cas (a_1) la relation /IX.6/ a lieu et les relations /IX.1/ et /IX.2/ prennent la forme : $\tilde{\varphi}_2(t)=1$ ou

$$(\varphi_2(t)-1)(v\tilde{d}-dxv+duy-y\tilde{e})x+(\varphi_3(t)-1)(x\tilde{e}-u\tilde{d}-exv+euy)y=0,$$

$$(\varphi_2(t)-1)(v\tilde{d}-dxv+duy-y\tilde{e})u+(\varphi_3(t)-1)(x\tilde{e}-u\tilde{d}-exv+euy)v=0.$$

Si dans ce système $(\varphi_2(t)-1)$/v$\tilde{d}$-dxv+duy-y$\tilde{e}$/ et $(\varphi_3(t)-1)$/x$\tilde{e}$-u$\tilde{d}$-exv+euy/ sont les inconnues, le déterminant de ce système xv-uy est différent de zéro. Puisque $\tilde{\varphi}_2(t)\neq 1$, $\varphi_2(t)\neq 1\neq\varphi_3(t)$ nous avons

$$v\tilde{d}-dxv+duy-y\tilde{e} = 0 = x\tilde{e}-u\tilde{d}-exv+euy = 0 .$$

Il en résulte que les relations /IX.4/ et /IX.5/ sont satisfaites, q.e.d.

Dans le cas (a_2) la relation /IX.6/ a lieu et les relations /IX.1/ et /IX.2/ prennent la forme

$$(\tilde{\varphi}_2(t)-1)(\varphi_2(t)-1)(\tilde{d}-xd-ye)\det A\equiv 0,$$

$$(\tilde{\varphi}_3(t)-1)(\varphi_2(t)-1)(\tilde{e}-ud-ve)\det A\equiv 0,$$

d'où nous avons $\tilde{d}$-xd-ye = 0 = $\tilde{e}$-ud-ve . Il en résulte

/IX.4/ et /IX.5/ sont remplies, c.q.f.d.

Dans le cas (a_3) la relation /IX.6/ a lieu et les relations /IX.1/ et /IX.2/ prennent la forme

$$(\tilde{\varphi}_2(t)-1)(\varphi_3(t)-1)(\tilde{d}-ye)uyc \equiv 0,$$
$$(\tilde{\varphi}_3(t)-1)(\varphi_2(t)-1)(\tilde{e}-ud)uyc \equiv 0,$$

où $uyc \neq 0$ .De là $\tilde{d}-ye = 0 = \tilde{e}-ud$,d'où les relations /IX.4/ et /IX.5/ ont lieu, ce qui finit la démonstration.

Dans le cas (a_4) la démonstration est la même que dans le cas (a_3). .

Dans le cas (b) les relations /IX.11/ et /IX.12/prennent la forme

$$(\tilde{\varphi}_2(t)-1)(\varphi_2(t)-\varphi_3(t))(wx-uz)y \equiv 0,$$
$$(\tilde{\varphi}_3(t)-1)(\varphi_2(t)-\varphi_3(t))(wx-ux)v \equiv 0,$$

d'où

(b_1) $\varphi_2(t) \equiv \varphi_3(t)$ ou (b_2) $x = 0 = u$ ou (b_3) $y = 0 = v$.

Dans le cas (b_1) les relations /IX.8/ et /IX.10/ ont la forme

$$(\tilde{\varphi}_2(t)-1)(\varphi_2(t)-1)(av-ub)c \equiv 0,$$
$$(\tilde{\varphi}_3(t)-1)(\varphi_2(t)-1)(xb-ay)c \equiv 0,$$

où $|av-ub|+|xb-ay| \neq 0$,d'où $c = 0$. Les relations /IX.7/ et /IX.9/ prennent la forme

$$(\tilde{\varphi}_2(t)-\tilde{\varphi}_3(t))(\varphi_2(t)-1)(av-ub)w \equiv 0,$$
$$(\tilde{\varphi}_2(t)-\tilde{\varphi}_3(t))(\varphi_2(t)-1)(xb-ay)z \equiv 0,$$

où $|w|+|z| \neq 0$ .Nous avons de là $\tilde{\varphi}_2(t) \equiv \tilde{\varphi}_3(t)$,alors /IX.3/ prend la forme

$$\tilde{\beta}_3(t)(\varphi_2(t)-1)(a(yw-vz)+(uz-xw)b) \equiv 0,$$

où $(yw-vz)a+(uz-xw)b = \det A \neq 0$,d'où $\tilde{\beta}_3(t) \equiv 0$ .Il en résulte que /IX.1/ et /IX.2/ prennent la forme

$$
/IX.14/ \quad \begin{aligned} &(\tilde{\varphi}_2(t)-1)\left[(\varphi_2(t)-1)k - \det A\, \beta_3(t)\, x\right] \equiv 0, \\ &(\tilde{\varphi}_2(t)-1)\left[(\varphi_2(t)-1)\, l - \det A\, \beta_3(t)\, w\right] \equiv 0, \end{aligned}
$$

où $k=(\tilde{d}w-\tilde{e}z)(ay-xb)-(xd+ey)\det A$ et

$l=(\tilde{d}w-\tilde{e}z)(av-ub)-(ud+ve)\det A$,

et au moins un des nombres z et w est différent de zéro. Puisque $xv-uy = 0$ les nombres k et l sont proportionnels .En raisonnant analogiquement comme dans le cas III (a_4) nous recevons des relations /IX.14/ que $k = 0$ et $\beta_3(t) \equiv 0$.

Les relations /IX.4/ et /IX.5/ sont satisfaites,ce qui finit la démonstration.

Dans le cas (b_2) les relations /IX.8/ et/IX.10/ nous donnent $\tilde{\varphi}_2(t)=1$ ou $\tilde{\varphi}_3(t)=1$ ou

$$
/IX.15/ \quad \begin{aligned} &(\varphi_2(t)-1)(vc-bw)a + (\varphi_3(t)-1)abw = 0, \\ &(\varphi_2(t)-1)(bz-yc)a - (\varphi_3(t)-1)abz = 0, \end{aligned}
$$

Si dans ce système $\varphi_2(t)-1$ et $\varphi_3(t)-1$ sont les inconnues,alors le déterminant de ce système est égal à $-a^2bc(zv-wy)$,où $a(zv-wy) \neq 0$. Si $bc \neq 0$,alors le lemme1nous donne $\tilde{\varphi}_2(t) \equiv 1$ ou $\tilde{\varphi}_3(t) \equiv 1$ ou $\varphi_2(t) \equiv 1 \equiv \varphi_3(t)$,ce qui est impossible dans notre cas.Considérons donc le cas $bc = 0$ et les sous-cas:

(b_{21}) $b \neq 0$ et $c = 0$ ou (b_{22}) $b = 0 = c$,

puisque pour $b = 0$ et $c \neq 0$ d'après /IX.15/ nous recevons $\varphi_2(t) \equiv 1$,ce qui est impossible.

Dans le cas (b_{21}) les relations /IX.8/ et /IX.10/ donnent

$\varphi_2(t) \equiv \varphi_3(t)$ et les relations /IX.7/ et /IX.9/ prennent la forme

$$(\varphi_3(t)-1)(\tilde{\varphi}_2(t)-\tilde{\varphi}_3(t))avw \equiv 0,$$
$$(\varphi_3(t)-1)(\tilde{\varphi}_2(t)-\tilde{\varphi}_3(t))azy \equiv 0,$$

où $a \neq 0$,d'où

(b_{211}) $\tilde{\varphi}_2(t) \equiv \tilde{\varphi}_3(t)$ ou (b_{212}) $w = 0 = y$ ou (b_{213}) $v = 0 = z$.

Dans le cas premier par le raisonnement analogue comme dans le cas (b_1) nous recevons que /IX.4/-/IX.6/ ont lieu.

Dans le cas (b_{212}) la relation /IX.3/ donne $\tilde{\beta}_3(t) \equiv 0$,d'où /IX.1/ et /IX.2/ prennent la forme

$$(\tilde{\varphi}_2(t)-1)\beta_3(t)\, z \det A \equiv 0,$$
$$(\tilde{\varphi}_3(t)-1)(\varphi_2(t)-1)avz\,(\tilde{e}-ve) \equiv 0,$$

où $avz = \det A \neq 0$,d'où $\beta_3(t) \equiv 0$ et $\tilde{e}-ve = 0$ .De là les relations /IX.4/ et /IX.5/ ont lieu ,ce qui finit la démonstration.

La démonstration dans le cas (b_{213}) est analogue que dans le cas (b_{212}),dans le cas (b_{22}) elle est analogue comme dans le cas (b_{21}) et dans le cas (b_3) comme dans le cas (b_2).De cette manière la démonstration dans le cas IX est terminée.

<u>Cas X.</u> $f_0 \in$ /6/ et $g_0 \in$ /7/ ,où nous posons $\tilde{\varphi}_2$,$\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_3$,$\tilde{d}$,$\tilde{e}$ dans g_0 au lieu de φ_2 , α_1 , α_3 , d , e .

La relation /21/ nous donne

$$/X.1/\quad \Big(\tilde{\alpha}_3(t)+\frac{\tilde{d}}{2}\tilde{\alpha}_1^{2}(t)\Big)\big[(\varphi_2(t)-1)(vc-bw)x+(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)y\big]+$$
$$+\tilde{d}\tilde{\alpha}_1(t)\big[(\varphi_2(t)-1)(bz-yc)x+(\varphi_3(t)-1)(xc-az)y\big]+$$
$$+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_2(t)-1)\big[(\varphi_2(t)-1)(yw-vz)x+(\varphi_3(t)-1)(uz-xw)y\big]-$$
$$-\tilde{\alpha}_1(t)\big[ud(\varphi_2(t)-1)+ve(\varphi_3(t)-1)+a\beta_3(t)\big]\det A \equiv 0,$$

$$/X.2/\quad \left(\tilde{\alpha}_3(t)+\frac{\tilde{a}}{2}\tilde{\alpha}_1^2(t)\right)\left[(\varphi_2(t)-1)(vc-bw)u+(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)v\right]+$$
$$+\tilde{a}\tilde{\alpha}_1(t)\left[(\varphi_2(t)-1)(bz-yc)u+(\varphi_3(t)-1)(xc-az)v\right]+$$
$$+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_2(t)-1)\left[(\varphi_2(t)-1)(yw-vz)u+(\varphi_3(t)-1)(uz-xw)v\right]\equiv 0,$$

$$/X.3/\quad \left(\tilde{\alpha}_3(t)+\frac{\tilde{a}}{2}\tilde{\alpha}_1^2(t)\right)\left[(\varphi_2(t)-1)(vc-bw)a+(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)b\right]+$$
$$+\tilde{a}\tilde{\alpha}_1(t)\left[(\varphi_2(t)-1)(bz-yc)a+(\varphi_3(t)-1)(xc-az)b\right]+$$
$$+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_2(t)-1)\left[(\varphi_2(t)-1)(yw-vz)a+(\varphi_3(t)-1)(uz-xw)b\right]-$$
$$-(\tilde{\varphi}_2(t)-1)\left[ad(\varphi_2(t)-1)+be(\varphi_3(t)-1)+c\beta_3(t)\right]\det A\equiv 0.$$

Pour démontrer /22/ il suffit de montrer que

$$/X.4/\quad \left(\tilde{\alpha}_3(r)+\frac{\tilde{a}}{2}\tilde{\alpha}_1^2(r)\right)\left[(\varphi_2(s)-1)(vc-bw)x+(\varphi_3(s)-1)(aw-uc)y\right]+$$
$$+\tilde{a}\tilde{\alpha}_1(r)\left[(\varphi_2(s)-1)(bz-yc)x+(\varphi_3(s)-1)(xc-az)y\right]+$$
$$+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_2(r)-1)\left[(\varphi_2(s)-1)(yw-vz)x+(\varphi_3(s)-1)(uz-xw)y\right]-$$
$$-\tilde{\alpha}_1(r)\left[ud(\varphi_2(s)-1)+ve(\varphi_3(s)-1)+w\beta_3(s)\right]\det A\equiv 0,$$

$$/X.5/\quad \left(\tilde{\alpha}_3(r)+\frac{\tilde{a}}{2}\tilde{\alpha}_1^2(r)\right)\left[(\varphi_2(s)-1)(vc-bw)u+(\varphi_3(s)-1)(aw-uc)v\right]+$$
$$+\tilde{a}\tilde{\alpha}_1(r)\left[(\varphi_2(s)-1)(bz-yc)u+(\varphi_3(s)-1)(xc-az)v\right]+$$
$$+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_2(r)-1)\left[(\varphi_2(s)-1)(yw-vz)u+(\varphi_3(s)-1)(uz-xw)v\right]\equiv 0,$$

$$/X.6/\quad \left(\tilde{\alpha}_3(r)+\frac{\tilde{a}}{2}\tilde{\alpha}_1^2(r)\right)\left[(\varphi_2(s)-1)(vc-bw)a+(\varphi_3(s)-1)(aw-uc)b\right]+$$
$$+\tilde{a}\tilde{\alpha}_1(r)\left[(\varphi_2(s)-1)(bz-yc)a+(\varphi_3(s)-1)(xc-az)b\right]+$$
$$+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_2(r)-1)\left[(\varphi_2(s)-1)(yw-vz)a+(\varphi_3(s)-1)(uz-xw)b\right]-$$
$$(\tilde{\varphi}_2(r)-1)\left[ad(\varphi_2(s)-1)+be(\varphi_3(s)-1)+c\beta_3(s)\right]\det A\equiv 0.$$

De plus d'après /21/ nous avons

$$/X.7/\quad (\tilde{\varphi}_2(t)-1)\left[(\varphi_2(t)-1)(bw-vc)a+(\varphi_3(t)-1)(uc-aw)b\right]\equiv 0,$$

$$/X.8/\quad (\tilde{\varphi}_2(t)-1)\left[(\varphi_2(t)-1)(yw-vz)u+(\varphi_3(t)-1)(uz-xw)v\right]\equiv 0,$$

$$/X.9/\quad (\tilde{\varphi}_2(t)-1)\left[(\varphi_2(t)-1)(bz-yc)a+(\varphi_3(t)-1)(xc-az)b\right]+$$
$$+\tilde{\alpha}_1(t)\left[(\varphi_2(t)-1)(bw-vc)a+(\varphi_3(t)-1)(uc-aw)b\right]\equiv 0,$$

$$/X.10/\quad (\tilde{\varphi}_2(t)-1)\left[(\varphi_2(t)-1)(yw-vz)x+(\varphi_3(t)-1)(uz-xw)y\right]-$$

$$-\tilde{\alpha}_1(t)[(\varphi_2(t)-1)(yw-vz)u+(\varphi_3(t)-1)(uz-xw)v]\equiv 0,$$

/X.11/ $$\tilde{\alpha}_1(t)[(\varphi_2(t)-1)(vc-bw)u+(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)v]\equiv 0,$$

/X.12/ $$\tilde{\alpha}_1(t)[(\varphi_2(t)-1)(x(vc-bw)-u(bz-yc))+ + (\varphi_3(t)-1)(y(aw-uc)+v(az-xc))]\equiv 0,$$

où $\tilde{\varphi}_2(t)\not\equiv 1$, $\tilde{\alpha}_1(t)\not\equiv 0$, $\varphi_2(t)\not\equiv 1\not\equiv\varphi_3(t)$.

Nous avons des relations /X.3/ et /X.10/ que $\tilde{\varphi}_2(t)=1$ ou

$$(\varphi_2(t)-1)(yw-vz)u+(\varphi_3(t)-1)(uz-xw)v=0,$$

$$(\varphi_2(t)-1)(yw-vz)x+(\varphi_3(t)-1)(uz-xw)y=0.$$

Si nous considérons dans ce système $(\varphi_2(t)-1)(yw-vz)$ et $(\varphi_3(t)-1)(uz-xw)$ comme les inconnues, le déterminant de ce système est égal à uy-xw . En considérant les cas uy-xw $\neq$ 0 ou uy-xw = 0 et en raisonnant comme dans le cas IX, nous avons des relations /X.7/-/X.12/ que w = z = 0 = a = b et $\varphi_2(t)\equiv\varphi_3(t)$. Les relations /X.2/ et /X.3/ prennent dans ce cas la forme

$$\alpha_1(t)(\varphi_2(t)-1)(xv-uy)c\tilde{d}\equiv 0,$$

$$\beta_3(t)(\tilde{\varphi}_2(t)-1)(xv-uy)c^2\equiv 0,$$

où /xv-uy/c $\neq$ 0 , d'où $\tilde{d}$ = 0 et $\beta_3(t)\equiv 0$. Les relations /X.5/ et /X.6/ sont donc remplies et la relation /X.1/ prend la forme

$$(\varphi_2(t)-1)[\tilde{\alpha}_3(t)-\tilde{\alpha}_1(t)(ud+ve)]\det A\equiv 0,$$

d'où $\tilde{\alpha}_3(t)-\tilde{\alpha}_1(t)(ud+ve)\equiv 0$. La relation /X.4/ est donc satisfaite et la démonstration est terminée.

Si $f_0\in$ /6/ et g_0 prend l'une des formes /14/ ou /15/ le raisonnement comme dans le cas X nous permet de conclure que les relations /22/ ont lieu.

Cas XI . Si $f_0 \in /6/$ et $g_0 \in /8/$,la relation /21/ donne

/XI.1/ $\alpha_1(t)[(\varphi_2(t)-1)(vc-bw)a+(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)b]\equiv 0,$

/XI.2/ $\alpha_1(t)[(\varphi_2(t)-1)(bz-yc)a+(\varphi_3(t)-1)(xc-az)b+$

$+(\frac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t))[(\varphi_2(t)-1)(vc-bw)a+(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)b]\equiv 0,$

/XI.3/ $\alpha_1(t)[(\varphi_2(t)-1)((bz-cy)a-u(vc-bw))+(\varphi_3(t)-1)(b(xc-az)+v(uc-aw))]\equiv 0,$

/XI.4/ $\alpha_1(t)[(\varphi_2(t)-1)(x(vc-bw)-u(bz-yc))+(\varphi_3(t)-1)(y(aw-uc)+v(az-xc))]+$

$+(\frac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t))[(\varphi_2(t)-1)(yc-bz)a+(\varphi_3(t)-1)(az-xc)b]\equiv 0,$

/XI.5/ $\alpha_1(t)[(\varphi_2(t)-1)(u(bz-yc)-a(yw-vz))+(\varphi_3(t)-1)(v(xc-az)+b(xw-uz))]+$

$+(\frac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t)[(\varphi_2(t)-1)(vc-bw)u+(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)v]\equiv 0,$

/XI.6/ $\alpha_1(t)[(\varphi_2(t)-1)(x(bz-yc)-u(yw-vz))+(\varphi_3(t)-1)(y(xc-az)+v(xw-uz))]+$

$+(\frac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t))[(\varphi_2(t)-1)(v(xc-bw)-a(yw-vz))+$

$+(\varphi_3(t)-1)(y(aw-uc)+b(xw-uz))]\equiv 0,$

où $\alpha_1(t)\not\equiv 0\not\equiv\alpha_2(t)$ et $\varphi_2(t)\not\equiv 1\not\equiv\varphi_3(t)$.

Nous avons des relations /XI.1/ et /XI.2/: $\alpha_1(t)=0$ ou

$$(\varphi_2(t)-1)(vc-bw)a+(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)b=0,$$

$$(\varphi_2(t)-1)(bz-yc)a+(\varphi_3(t)-1)(xc-az)b=0.$$

Le déterminant de ce système, où $(\varphi_2(t)-1)a$ et $(\varphi_3(t)-1)b$ sont les inconnues, est égal à $c\cdot\det A$ .Considérons les cas (a_1) $c\neq 0$ ou (a_2) $c=0$.

Nous avons dans le cas (a_1), puisque $\varphi_2(t)\not\equiv 1\not\equiv\varphi_3(t)$ et $\alpha_1(t)\not\equiv 0$, que $a=0=b$ .Il en résulte que /XI.3/ prend la forme

$$\alpha_1(t)(\varphi_2(t)-\varphi_3(t))uvc\equiv 0,$$

où $|u|+|v|\neq 0$ .Si $u=0$ et $v\neq 0$ /le raisonnement si $u\neq 0$ et $v=0$ est le même /,alors /XI.5/ a la forme

$$\alpha_1(t)(\varphi_3(t)-1)vxc\equiv 0$$

ce qui ne peut pas avoir lieu, puisque $vx \neq 0$, car la matrice A n'est pas singulière.

Si $\varphi_2(t) \equiv \varphi_3(t)$, la relation /XI.4/ prend la forme

$$\alpha_1(t)(\varphi_2(t)-1)(vx-uy)c \equiv 0,$$

ce qui est aussi impossible puisque $c/vx-uy/ \neq 0$.

Dans le cas (a_2) la relation /XI.1/ prend la forme

$$\alpha_1(t)(\varphi_2(t)-\varphi_3(t))abw \equiv 0,$$

où $|a|+|b| \neq 0$. Considérons les cas

(a_{21}) $w \neq 0$ ou (a_{22}) $w = 0$.

Nous avons dans le cas premier

(a_{211}) $\varphi_2(t) \equiv \varphi_3(t)$ ou (a_{212}) $a = 0 \neq b$ ou $a = 0 = b$.

Ici dans le cas premier la relation /XI.3/ prend la forme

$$\alpha_1(t)(\varphi_2(t)-1)(ub-av)w \equiv 0,$$

d'où $ub-av = 0$ et de là la relation /XI.4/ nous donne

$$\alpha_1(t)(\varphi_2(t)-1)(xb-ay)w \equiv 0,$$

ce qui est impossible puisque $xb-ay \neq 0$, car A est non-singulière, et $\alpha_1(t) \not\equiv 0$ et $\varphi_2(t) \not\equiv 1$.

Dans le cas (a_{212}) considérons $a = 0$ et $b \neq 0$ /le cas deuxième est analogue/, d'où la relation /XI.3/ donne

$$\alpha_1(t)(\varphi_2(t)-1)buw \equiv 0.$$

Si $u = 0$ la relation /XI.4/ prend la forme

$$\alpha_1(t)(\varphi_2(t)-1)xbw \equiv 0,$$

ce qui ne peut pas avoir lieu.

Dans le cas (a_{22}), si $w = 0$ d'après le raisonnement analogue comme dans le cas (a_{21}) nous concluons que les relations /21/ ne peuvent pas avoir lieu.

Cas XII . $f_0 \in$ /6/ et $g_c \in$ /9/ ,où dans g_0 prenons $\tilde{\varphi}_2$, $\tilde{\varphi}_3$, $\tilde{\varphi}_1$, $\tilde{d}$, $\tilde{e}$, $\tilde{f}$ au lieu de φ_2 , φ_3 , φ_1 , d , e , f .

Les relations /21/ nous donnent

/XII.1/ $$\tilde{d}(\tilde{\varphi}_2(t)-1)[(\varphi_2(t)-1)x(vc-bw)+(\varphi_3(t)-1)y(aw-uc)]+$$
$$+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_3(t)-1)[(\varphi_2(t)-1)x(bz-yc)+(\varphi_3(t)-1)y(xc-az)]+$$
$$+\tilde{f}(\tilde{\varphi}_1(t)-1)[(\varphi_2(t)-1)x(yw-vz)+(\varphi_3(t)-1)y(uz-xw)]-$$
$$-(\tilde{\varphi}_2(t)-1)\det A[xd(\varphi_2(t)-1)+ye(\varphi_3(t)-1)+z\beta_3(t)]\equiv 0,$$

/XII.2/ $$\tilde{d}(\tilde{\varphi}_2(t)-1)[(\varphi_2(t)-1)u(vc-bw)+(\varphi_3(t)-1)v(aw-uc)]+$$
$$+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_3(t)-1)[(\varphi_2(t)-1)u(bz-yc)+(\varphi_3(t)-1)v(xc-az)]+$$
$$+\tilde{f}(\tilde{\varphi}_1(t)-1)[(\varphi_2(t)-1)u(yw-vz)+(\varphi_3(t)-1)v(uz-xw)]-$$
$$-(\tilde{\varphi}_3(t)-1)[ud(\varphi_2(t)-1)+ve(\varphi_3(t)-1)+w\beta_3(t)]\det A\equiv 0,$$

/XII.3/ $$\tilde{d}(\tilde{\varphi}_2(t)-1)[(\varphi_2(t)-1)a(vc-bw)+(\varphi_3(t)-1)b(aw-uc)]+$$
$$+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_3(t)-1)[(\varphi_2(t)-1)a(bz-yc)+(\varphi_3(t)-1)b(xc-az)]+$$
$$+\tilde{f}(\tilde{\varphi}_1(t)-1)[(\varphi_2(t)-1)a(yw-vz)+(\varphi_3(t)-1)b(uz-xw)]-$$
$$-(\tilde{\varphi}_1(t)-1)\det A[ad(\varphi_2(t)-1)+be(\varphi_3(t)-1)+c\beta_3(t)]\equiv 0$$

et pour démontrer /22/ il suffit de montrer que

/XII.4/ $$\tilde{d}(\tilde{\varphi}_2(r)-1)[(\varphi_2(s)-1)x(vc-bw)+(\varphi_3(s)-1)y(aw-uc)]+$$
$$+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_3(r)-1)[(\varphi_2(s)-1)x(bz-yc)+(\varphi_3(s)-1)y(xc-az)]+$$
$$+\tilde{f}(\tilde{\varphi}_1(r)-1)[(\varphi_2(s)-1)x(yw-vz)+(\varphi_3(s)-1)y(uz-xw)]-$$
$$-(\tilde{\varphi}_2(r)-1)\det A[xd(\varphi_2(s)-1)+ye(\varphi_3(s)-1)+z\beta_3(s)]\equiv 0,$$

/XII.5/ $$\tilde{d}(\tilde{\varphi}_2(r)-1)[(\varphi_2(s)-1)u(vc-bw)+(\varphi_3(s)-1)v(aw-uc)]+$$
$$+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_3(r)-1)[(\varphi_2(s)-1)u(bz-yc)+(\varphi_3(s)-1)v(xc-az)]+$$
$$+\tilde{f}(\tilde{\varphi}_1(r)-1)[(\varphi_2(s)-1)u(yw-vz)+(\varphi_3(s)-1)v(uz-xw)]-$$
$$-(\tilde{\varphi}_3(r)-1)[ud(\varphi_2(s)-1)+ve(\varphi_3(s)-1)+w\beta_3(s)]\det A\equiv 0,$$

/XII.6/ $$\tilde{d}(\tilde{\varphi}_2(r)-1)[(\varphi_2(s)-1)a(vc-bw)+(\varphi_3(s)-1)b(aw-uc)]+$$
$$+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_3(r)-1)[(\varphi_2(s)-1)a(bz-yc)+(\varphi_3(s)-1)b(xc-az)]+$$

$$+\tilde{f}(\tilde{\varphi}_1(m)-1)[(\varphi_2(s)-1)a(yw-vz)+(\varphi_3(s)-1)b(uz-xw)]-$$
$$-(\tilde{\varphi}_1(m)-1)\det A[ad(\varphi_2(s)-1)+be(\varphi_3(s)-1)+c\beta_3(s)]\equiv 0.$$

Nous avons aussi des relations /21/

/XII.7/
$$(\tilde{\varphi}_3(t)-\tilde{\varphi}_2(t))[(\varphi_2(t)-1)u(vc-bw)+(\varphi_3(t)-1)v(aw-uc)]\equiv 0,$$
$$(\tilde{\varphi}_2(t)-\tilde{\varphi}_1(t))[(\varphi_2(t)-1)a(vc-bw)+(\varphi_3(t)-1)b(aw-uc)]\equiv 0,$$
$$(\tilde{\varphi}_3(t)-\tilde{\varphi}_2(t))[(\varphi_2(t)-1)x(bz-yc)+(\varphi_3(t)-1)y(xc-az)]\equiv 0,$$
$$(\tilde{\varphi}_3(t)-\tilde{\varphi}_1(t))[(\varphi_2(t)-1)a(bz-yc)+(\varphi_3(t)-1)b(xc-az)]\equiv 0,$$
$$(\tilde{\varphi}_2(t)-\tilde{\varphi}_1(t))[(\varphi_2(t)-1)x(yw-vz)+(\varphi_3(t)-1)y(uz-xw)]\equiv 0,$$
$$(\tilde{\varphi}_3(t)-\tilde{\varphi}_1(t))[(\varphi_2(t)-1)u(yw-vz)+(\varphi_3(t)-1)v(uz-xw)]\equiv 0.$$

En raisonnant analogiquement que dans le cas IX nous recevrons des relations /XII.7/ une série analogue des cas. Nous considérons seulement le cas $\tilde{\varphi}_1(t)\equiv\tilde{\varphi}_2(t)\equiv\tilde{\varphi}_3(t)$,puisque dans les cas restants le raisonnement est analogue que dans e cas

Les relations /XII.1/-/XII.3/ donnent dans ce cas: $\tilde{\varphi}_2(t)=1$

ou
$$(\varphi_2(t)-1)kx+(\varphi_3(t)-1)ly-z\beta_3(t)\det A=0,$$
$$(\varphi_2(t)-1)ku+(\varphi_3(t)-1)lv-w\beta_3(t)\det A=0,$$
$$(\varphi_2(t)-1)ka+(\varphi_3(t)-1)lb-c\beta_3(t)\det A=0,$$

où $k=\tilde{d}/vc-bw/+\tilde{e}/bz-yc/+\tilde{f}/yw-vz/-d\cdot\det A$ et

$l=\tilde{d}/aw-uc/+\tilde{e}/xc-az/+\tilde{f}/uz-xw/-e\cdot\det A$ et

$\tilde{\varphi}_2(t)\not\equiv 1$ et $\varphi_2(t)\not\equiv 1\not\equiv\varphi_3(t)$.

Si ici nous considérons $(\varphi_2(t)-1)k$,$(\varphi_3(t)-1)l$ et $\beta_3(t)$ comme les inconnues,où le déterminant de ce système est égal à $(\det A)^2\neq 0$, donc d'après le lemme 1 nous recevons

$\tilde{\varphi}_2(t)\equiv 1$ ou $[(\varphi_2(t)\equiv 1$ ou $\varphi_3(t)\equiv 1)$ et $\beta_3(t)\equiv 0]$,

contrairement à la supposition faite.Il en résulte que

$k = 0 = 1$ et dans ce cas $\beta_3(t) \equiv 0$ .Les relations /XII.4/--/XII.6/ sont donc remplies, c.q.f.d.

Si $f_0 \in$ /6/ et

- $g_0 \in$ /10/ ou $g_0 \in$ /11/ la démonstration est analogue que dans les cas XII et VI(a_1),
- $g_0 \in$ /12/ ou $g_0 \in$ /13/ la démonstration est analogue comme dans le cas XII .

Cas XIII . $f_0 \in$ /6/ et $g_0 \in$ /16/,où dans g_0 nous posons $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_3$, $\tilde{\beta}_3$, $\tilde{e}$, $\tilde{d}$ au lieu de α_1 , α_3 , β_3 , e , d .

Les relations /21/ nous donnent

/XIII.1/
$$\begin{aligned}&\left(\tilde{\alpha}_3(t)+\tfrac{\tilde{e}}{2}\tilde{\alpha}_1^2(t)\right)\left[(\varphi_2(t)-1)(vc-bw)x+(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)y\right]+\\&+\left(\tilde{e}\tilde{\beta}_3(t)+\tilde{d}\tilde{\alpha}_1(t)\right)\left[(\varphi_2(t)-1)(bz-yc)x+(\varphi_3(t)-1)(xc-az)y\right]+\\&+\tilde{\beta}_3(t)\left[(\varphi_2(t)-1)(yw-vz)x+(\varphi_3(t)-1)(uz-xw)y\right]-\\&-\tilde{\alpha}_1(t)\left[(\varphi_2(t)-1)(u-\tilde{e}a)d+(\varphi_3(t)-1)(v-\tilde{e}b)e+\beta_3(t)(w-\tilde{e}c)\right]\det A\equiv 0,\end{aligned}$$

/XIII.2/
$$\begin{aligned}&\left(\tilde{\alpha}_3(t)+\tfrac{\tilde{e}}{2}\tilde{\alpha}_1^2(t)\right)\left[(\varphi_2(t)-1)(vc-bw)u+(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)v\right]+\\&+\left(\tilde{e}\tilde{\beta}_3(t)+\tilde{d}\tilde{\alpha}_1(t)\right)\left[(\varphi_2(t)-1)(bz-yc)u+(\varphi_3(t)-1)(xc-az)v\right]+\\&+\tilde{\beta}_3(t)\left[(\varphi_2(t)-1)(yw-vz)u+(\varphi_3(t)-1)(uz-xw)v\right]\equiv 0,\end{aligned}$$

/XIII.3/
$$\begin{aligned}&\left(\tilde{\alpha}_3(t)+\tfrac{\tilde{e}}{2}\tilde{\alpha}_1^2(t)\right)\left[(\varphi_2(t)-1)(vc-bw)a+(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)b\right]+\\&+\left(\tilde{e}\tilde{\beta}_3(t)+\tilde{d}\tilde{\alpha}_1(t)\right)\left[(\varphi_2(t)-1)(bz-yc)a+(\varphi_3(t)-1)(xc-az)b\right]+\\&+\tilde{\beta}_3(t)\left[(\varphi_2(t)-1)(yw-vz)a+(\varphi_3(t)-1)(uz-xw)b\right]\equiv 0\end{aligned}$$

et pour démontrer /22/ il suffit de montrer

/XIII.4/
$$\begin{aligned}&\left(\tilde{\alpha}_3(r)+\tfrac{\tilde{e}}{2}\tilde{\alpha}_1^2(r)\right)\left[(\varphi_2(s)-1)(vc-bw)x+(\varphi_3(s)-1)(aw-uc)y\right]+\\&+\left(\tilde{e}\tilde{\beta}_3(r)+\tilde{d}\tilde{\alpha}_1(r)\right)\left[(\varphi_2(s)-1)(bz-yc)x+(\varphi_3(s)-1)(xc-az)y\right]+\\&+\tilde{\beta}_3(r)\left[(\varphi_2(s)-1)(yw-vz)x+(\varphi_3(s)-1)(uz-xw)y\right]-\\&-\tilde{\alpha}_1(r)\left[(\varphi_2(s)-1)(u-\tilde{e}a)d+(\varphi_3(s)-1)(v-\tilde{e}b)e+\beta_3(s)(w-\tilde{e}c)\right]\det A\equiv 0,\end{aligned}$$

/XIII.5/
$$\left(\tilde{\alpha}_3(r)+\tfrac{\tilde{e}}{2}\tilde{\alpha}_1^2(t)\right)\left[(\varphi_2(s)-1)(vc-bw)u+(\varphi_3(s)-1)(aw-uc)v\right]+$$

$$+(\bar{e}\tilde{\beta}_3(r)+\bar{a}\tilde{\alpha}_1(r))[(\varphi_2(s)-1)(bz-yc)u+(\varphi_3(s)-1)(xc-az)v]+$$

$$+\tilde{\beta}_3(r)[(\varphi_2(s)-1)(yw-vz)u+(\varphi_3(s)-1)(uz-xw)v]\equiv 0,$$

/XIII.6/ $$(\tilde{\alpha}_3(r)+\frac{\bar{a}}{2}\tilde{\alpha}_1^2(r))[(\varphi_2(s)-1)(vc-bw)a+(\varphi_3(s)-1)(aw-uc)b]+$$

$$+(\bar{e}\tilde{\beta}_3(r)+\bar{a}\tilde{\alpha}_1(r))[(\varphi_2(s)-1)(bz-yc)a+(\varphi_3(s)-1)(xc-az)b]+$$

$$+\tilde{\beta}_3(r)[(\varphi_2(s)-1)(yw-vz)a+(\varphi_3(s)-1)(uz-xw)b]\equiv 0.$$

De plus nous avons de /21/

/XIII.7/ $$\tilde{\alpha}_1(t)[(\varphi_2(t)-1)(vc-bw)u+(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)v]\equiv 0,$$

/XIII.8/ $$\tilde{\alpha}_1(t)[(\varphi_2(t)-1)(vc-bw)a+(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)b]\equiv 0,$$

/XIII.9/ $$\tilde{\alpha}_2(t)[(\varphi_2(t)-1)(vc-bw)u+(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)v]\equiv 0,$$

/XIII.10/ $$\tilde{\alpha}_2(t)[(\varphi_2(t)-1)(vc-bw)a+(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)b]\equiv 0,$$

/XIII.11/ $$\tilde{\alpha}_1(t)[(\varphi_2(t)-1)(xvc-xbw-ubz+uyc)+(\varphi_3(t)-1)(aw-uyc-vxc+vaz)]+$$

$$+\tilde{\alpha}_2(t)[(\varphi_2(t)-1)(yc-bz)a+(\varphi_3(t)-1)(az-xc)b]\equiv 0,$$

/XIII.12/ $$\tilde{\alpha}_1(t)[(\varphi_2(t)-1)(vz-yw)u+(\varphi_3(t)-1)(xw-uz)v]+$$

$$+\tilde{\alpha}_2(t)[(\varphi_2(t)-1)(xvc-xbw+avz-ayw)+(\varphi_3(t)-1)(yaw-uyc+bxw-buz)]\equiv 0,$$

où $\tilde{\alpha}_2(t)\equiv-\bar{e}\tilde{\alpha}_1(t)$, $\tilde{\alpha}_1(t)\not\equiv 0$ et $\varphi_2(t)\not\equiv 1\not\equiv\varphi_3(t)$.

Nous avons des relations /XIII.7/ et /XIII.8/ : $\tilde{\alpha}_1(t)=0$ ou

$$(\varphi_2(t)-1)(vc-bw)u+(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)v=0,$$

$$(\varphi_2(t)-1)(vc-bw)a+(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)b=0.$$

Le déterminant de ce système, avec $(\varphi_2(t)-1)(vc-bw)$ et $(\varphi_3(t)-1)(aw-uc)$ comme les inconnues, est égal à ub-av. Distinguons les cas:

(a_1) ub-av $\neq 0$ ou (a_2) ub-av = 0 .

Nous recevons du système dans le cas (a_1)

$$(\varphi_2(t)-1)(vc-bw)=0=(\varphi_3(t)-1)(aw-uc).$$

Puisque $\tilde{\alpha}_1(t)\not\equiv 0$ et $\varphi_2(t)\not\equiv 1\not\equiv\varphi_3(t)$ nous avons aw-uc = 0 et vc-bw = 0 , d'où c = 0 = w . Il en résulte que les relations /XIII.11/ et /XIII.12/ prennent la forme

$$\tilde{\alpha}_1(t)\,[(\varphi_2(t)-1)ubz-(\varphi_3(t)-1)vaz]+\tilde{\alpha}_2(t)\,(\varphi_2(t)-\varphi_3(t))abz\equiv 0,$$

$$\tilde{\alpha}_1(t)\,(\varphi_2(t)-\varphi_3(t))uvz+\tilde{\alpha}_2(t)\,[(\varphi_2(t)-1)avz-(\varphi_3(t)-1)bzu]\equiv 0.$$

Le déterminant de ce système, avec $\tilde{\alpha}_1(t)$ et $\tilde{\alpha}_2(t)$ comme les inconnues, étant égal à $(\varphi_2(t)-1)(\varphi_3(t)-1)z^2$/ub-av/ , est différent de zéro, d'où $\tilde{\alpha}_1(t)\equiv\tilde{\alpha}_2(t)$, contrairement à $\tilde{\alpha}_1(t)\not\equiv 0$.

Dans le cas (a_2) les relations /XIII.7/-/XIII.10/ nous donnent

(a_{21}) $\varphi_2(t)\equiv\varphi_3(t)$ ou (a_{22}) aw-uc = 0 ou (a_{23}) v = 0 = b .

Dans le cas (a_{21}) les relations /XIII.11/ et /XIII.12/ prennent la forme

$$(\varphi_2(t)-1)\,[\tilde{\alpha}_1(t)w+\tilde{\alpha}_2(t)c](ay-xb)\equiv 0,$$

$$(\varphi_2(t)-1)\,[\tilde{\alpha}_1(t)w+\tilde{\alpha}_2(t)c]\,(xv-uy)\equiv 0,$$

où $|ay-xb|+|xv-uy|\neq 0$, d'où

$$\tilde{\alpha}_1(t)w+\tilde{\alpha}_2(t)c\equiv 0,$$

où $\tilde{\alpha}_2(t)\equiv-\tilde{\varepsilon}\tilde{\alpha}_1(t)$, alors $w-\tilde{\varepsilon}c=0$. Dans ce cas les relations /XIII.2/ et /XIII.3/ nous donnent

$$(\varphi_2(t)-1)\,\tilde{\alpha}_1(t)\,\tilde{d}c(xv-uy)\equiv 0,$$

$$(\varphi_2(t)-1)\,\tilde{\alpha}_1(t)\,\tilde{d}\,c\,(xb-ay)\equiv 0,$$

où $c\neq 0$ et $|xv-uy|+|xb-ay|\neq 0$, d'où $\tilde{d}=0$.

Il en résulte que les relations /XIII.5/ et /XIII.6/ont lieu et la relation /XIII.1/ a la forme

$$(\varphi_2(t)-1)[\tilde{\alpha}_3(t)\det A+\tilde{\beta}_3(t)(\tilde{\varepsilon}bx-\tilde{\varepsilon}ay+uy-vx)z+\tilde{\alpha}_1(t)(\tilde{\varepsilon}ad+\tilde{\varepsilon}be-ud-ve)\det A]\equiv 0,$$

ce qui nous donne, puisque $\varphi_2(t)\not\equiv 1$ et les functions $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_3$, $\tilde{\beta}_3$ sont additives:

$$\tilde{\alpha}_3(t)\det A+\tilde{\beta}_3(t)(\tilde{\varepsilon}bx-\tilde{\varepsilon}ay+uy-vx)+\tilde{\alpha}_1(t)(\tilde{\varepsilon}ad+\tilde{\varepsilon}be-ud-ve)\det A\equiv 0.$$

La relation /XIII.4/ a donc lieu, ce qui finit la démonstration.

Dans le cas (a_{22}), les relations /XIII.11/ et /XIII.12/ prennent la forme

$$\tilde{\alpha}_1(t)\left[(\varphi_2(t)-1)(vc-bw)x-(\varphi_3(t)-1)vxc\right]-\tilde{\alpha}_2(t)(\varphi_3(t)-1)bxc\equiv 0,$$

$$\tilde{\alpha}_1(t)\ (\varphi_3(t)-1)vxw+\tilde{\alpha}_2(t)\left[(\varphi_2(t)-1)(vc-bw)x+(\varphi_3(t)-1)bxw\right]\equiv 0.$$

Le déterminant de ce système, où $\tilde{\alpha}_1(t)$ et $\tilde{\alpha}_2(t)$ sont les inconnues, est égal à $(\varphi_2(t)-\varphi_3(t))(\varphi_2(t)-1)/vc-bw/^2x^2$, où $x/vc-bw/\neq 0$ et $\varphi_2(t)\neq 1$. Il en résulte que $\varphi_2(t)=\varphi_3(t)$ ou $\tilde{\alpha}_1(t)=0=\tilde{\alpha}_2$. De là, d'après le lemme 1, $\varphi_2(t)\equiv\varphi_3(t)$, puisque $\tilde{\alpha}_1(t)\neq 0$.

Les relations /XIII.11/ et /XIII.12/ prennent donc la forme

$$(\varphi_2(t)-1)(\tilde{\alpha}_1(t)w+\tilde{\alpha}_2(t)c)xb\equiv 0,$$

$$(\varphi_2(t)-1)(\tilde{\alpha}_1(t)w+\tilde{\alpha}_2(t)c)xv\equiv 0,$$

où $x\neq 0$ et $|b|+|v|\neq 0$, d'où $\tilde{\alpha}_1(t)w+\tilde{\alpha}_2(t)c\equiv 0$, où $\tilde{\alpha}_2(t)=-\tilde{c}\tilde{\alpha}_1(t)$. En raisonnant comme dans le cas (a_{21}), nous concluons que les relations /XIII.4/-/XIII.6/ ont lieu, q.e.d.

Le raisonnement dans le cas (a_{23}) est analogue comme dans le cas (a_{22}).

De cette manière la démonstration dans le cas XIII est terminée.

Si $f_0\in/6/$ et $g_0\in/17/$ en raisonnant au début comme da dans le cas XIII et après comme dans le cas VIII nous constatons que les relations /21/ ne peuvent pas avoir lieu.

<u>Cas XIV</u>. $f_0\in/7/$ et $g_0\in/9/$, où dans g_0 prenons $\tilde{\varphi}_i$ /i = 1,2,3/, $\tilde{d}$, $\tilde{e}$ au lieu de φ_i, d, e.

Les relations /21/ nous donnent

/XIV.1/ $\tilde{d}(\tilde{\varphi}_2(t)-1)\left[\alpha_1(t)(aw-uc)x+(\varphi_2(t)-1)(ub-av)z\right]+$
$+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_3(t)-1)\left[\alpha_1(t)(xc-az)x+(\varphi_2(t)-1)(ay-xb)z\right]+f(\tilde{\varphi}_1(t)-1)\left[\alpha_1(t)(uz-xw)x+\right.$

$+(\varphi_2(t)-1)(xv-uy)x-(\tilde{\varphi}_2(t)-1)[x(\alpha_3(t)+\frac{d}{2}\alpha_1^2(t))+yd\alpha_1(t)+ze(\varphi_2(t)-1)]\det A\equiv 0,$

/XIV.2/ $\tilde{a}(\tilde{\varphi}_2(t)-1)[\alpha_1(t)(aw-uc)u+(\varphi_2(t)-1)(ub-av)w]+$
$+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_3(t)-1)[\alpha_1(t)(xc-az)u+(\varphi_2(t)-1)(ay-xb)w]+f(\tilde{\varphi}_1(t)-1)[\alpha_1(t)(uz-xw)u+$
$+(\varphi_2(t)-1)(xv-uy)w]-(\tilde{\varphi}_3(t)-1)[u(\alpha_3(t)+\frac{d}{2}\alpha_1^2(t))+vd\alpha_1(t)+we(\varphi_2(t)-1)]\det A\equiv 0,$

/XIV.3/ $\tilde{a}(\tilde{\varphi}_2(t)-1)[\alpha_1(t)(aw-uc)a+(\varphi_2(t)-1)(ub-av)c]+$
$+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_3(t)-1)[\alpha_1(t)(xc-az)a+(\varphi_2(t)-1)(ay-xb)c]+f(\tilde{\varphi}_1(t)-1)[\alpha_1(t)(uz-xw)a+$
$+(\varphi_2(t)-1)(xv-uy)c]-(\tilde{\varphi}_1(t)-1)[a(\alpha_3(t)+\frac{d}{2}\alpha_1^2(t))+bd\alpha_1(t)+ce(\varphi_2(t)-1)]\det A\equiv 0.$

Pour demontrer /22/ il suffit de montrer

/XIV.4/ $\tilde{a}(\tilde{\varphi}_2(r)-1)[\alpha_1(s)(aw-uc)x+(\varphi_2(s)-1)(ub-av)x+$
$+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_3(r)-1)[\alpha_1(s)(xc-az)x+(\varphi_2(s)-1)(ay-xb)z]+f(\tilde{\varphi}_1(r)-1)[\alpha_1(s)(uz-xw)x+$
$+(\varphi_2(s)-1)(xv-uy)z]-(\tilde{\varphi}_2(r)-1)[x(\alpha_3(s)+\frac{d}{2}\alpha_1^2(s))+yd\alpha_1(s)+ze(\varphi_2(s)-1)]\det A\equiv 0,$

/XIV.5/ $\tilde{a}(\tilde{\varphi}_2(r)-1)[\alpha_1(s)(aw-uc)u+(\varphi_2(s)-1)(ub-av)w]+$
$+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_3(r)-1)[\alpha_1(s)(xc-az)u+(\varphi_2(s)-1)(ay-xb)w]+f(\tilde{\varphi}_1(r)-1)[\alpha_1(s)(uz-xw)u+$
$+(\varphi_2(s)-1)(xv-uy)w]-(\tilde{\varphi}_3(r)-1)[u(\alpha_3(s)+\frac{d}{2}\alpha_1^2(s))+vd\alpha_1(s)+we(\varphi_2(s)-1)]\det A\equiv 0,$

/XIV.6/ $\tilde{a}(\tilde{\varphi}_2(r)-1)[\alpha_1(s)(aw-uc)a+(\varphi_2(s)-1)(ub-av)c]+$
$+\tilde{e}(\tilde{\varphi}_3(r)-1)[\alpha_1(s)(xc-az)a+(\varphi_2(s)-1)(ay-xb)c]+f(\tilde{\varphi}_1(r)-1)[\alpha_1(s)(uz-xw)a+$
$+(\varphi_2(s)-1)(xv-uy)c]-(\tilde{\varphi}_1(r)-1)[a(\alpha_3(s)+\frac{d}{2}\alpha_1^2(s))+bd\alpha_1(s)+ce(\varphi_2(s)-1)]\det A\equiv 0.$

Nous avons aussi des relations /21/

/XIV.7/ $(\tilde{\varphi}_3(t)-\tilde{\varphi}_2(t))[\alpha_1(t)(aw-uc)u+(\varphi_2(t)-1)(ub-av)w]\equiv 0,$
$(\tilde{\varphi}_2(t)-\tilde{\varphi}_1(t))[\alpha_1(t)(aw-uc)a+(\varphi_2(t)-1)(ub-av)c]\equiv 0,$
$(\tilde{\varphi}_3(t)-\tilde{\varphi}_2(t))[\alpha_1(t)(xc-az)x+(\varphi_2(t)-1)(ay-xb)z]\equiv 0,$
$(\tilde{\varphi}_3(t)-\tilde{\varphi}_1(t))[\alpha_1(t)(xc-az)a+(\varphi_2(t)-1)(ay-xb)c]\equiv 0,$
$(\tilde{\varphi}_2(t)-\tilde{\varphi}_1(t))[\alpha_1(t)(uz-xw)x+(\varphi_2(t)-1)(xv-uy)x]\equiv 0,$
$(\tilde{\varphi}_3(t)-\tilde{\varphi}_1(t))[\alpha_1(t)(uz-xw)u+(\varphi_2(t)-1)(xv-uy)w]\equiv 0.$

En raisonnant comme dans le cas IX nous recevons des relations /XIV.7/ une série des cas. Nous donnerons la dém .

stration dans le cas $\tilde{\varphi}_1(t)\equiv\tilde{\varphi}_2(t)\equiv\tilde{\varphi}_3(t)$,puisque le raisonnement dans les cas restants sont analogues que dans e cas

Les relations /XIV.1/-/XIV.3/ prennent à présent la forme $\tilde{\varphi}_2(t)=1$ ou

$$\alpha_1(t)(kx-\det A\, y d)+(\varphi_2(t)-1)lz-(\alpha_3(t)+\tfrac{d}{2}\alpha_1^2(t))x\det A=0,$$

$$\alpha_1(t)(ku-\det A\, v d)+(\varphi_2(t)-1)lw-(\alpha_3(t)+\tfrac{d}{2}\alpha_1^2(t))u\det A=0,$$

$$\alpha_1(t)(ka-\det A\, b d)+(\varphi_2(t)-1)lc-(\alpha_3(t)+\tfrac{d}{2}\alpha_1^2(t))a\det A=0,$$

où $k=\tilde{d}/aw-uc/+\tilde{e}/xc-az/+f/uz-xw/$,

$l=\tilde{d}/ub-av/+\tilde{e}/ay-xb/+f/xv-uy/-e\cdot\det A$

et $\alpha_1(t)\not\equiv 0$ et $\varphi_2(t)\not\equiv 1$ i $\tilde{\varphi}_2(t)\not\equiv 1$.

Si dans le système plus haut prenons $\alpha_1(t)$, $(\varphi_2(t)-1)l$, $(\alpha_3(t)+\frac{d}{2}\alpha_1^2(t))\det A$ comme les inconnues, le déterminant de ce système est égal à $/\det A/^2 d$. Si $d\neq 0$,alors d'après le lemme 1 : $\tilde{\varphi}_2(t)\equiv 1$ ou $\alpha_1(t)\equiv 0$ et $(\varphi_2(t)-1)l\equiv 0$ et $\alpha_3(t)\equiv 0$, contrairement à la supposition faite. Donc $d=0$, d'où les relations /XIV.1/-/XIV.3/ ont la forme : $\tilde{\varphi}_2(t)=1$ ou

$$[\alpha_1(t)\cdot k-\alpha_3(t)\det A]x+(\varphi_2(t)-1)lz=0,$$

$$[\alpha_1(t)k-\alpha_3(t)\det A]u+(\varphi_2(t)-1)lw=0,$$

$$[\alpha_1(t)k-\alpha_3(t)\det A]a+(\varphi_2(t)-1)lc=0.$$

Au moins un des nombres xw-uz , xc-az , uc-aw est différent de zéro, puisque la matrice A est non-singulière. Si dans le système plus haut $\alpha_1(t)k-\alpha_3(t)\det A$ et $(\varphi_2(t)-1)l$ considérons comme les inconnues, donc ce système nous donne $\alpha_1(t)k-\alpha_3(t)\det A=0$ et $(\varphi_2(t)-1)l=0$ .D'après le lemme 1 et puisque $\tilde{\varphi}_2(t)\not\equiv 1\not\equiv\varphi_2(t)$ nous avons de là $\alpha_1(t)k-\det A\,\alpha_3(t)\equiv 0$ et $l=0$ .Il en résulte que les relations /XIV.4/-/XIV.6/

ont lieu, c.q.f.d.

Si $f_0 \in /7/$ et

- $g_0 \in /7/,/15/$ ou $/16/$ la démonstration est analoge comme dans le cas II,

- $g_0 \in /8/$ cette démonstration est analogue comme dans le cas IV,

- $g_0 \in /10/-/13/$ la démonstration est analogue comme dans le cas XIV,

- $g_0 \in /14/$ cette démonstration est telle que dans le cas VII ,

- $g_0 \in /17/$ la démonstration est analogue comme dans le cas VIII.

Cas XV . Considérons le cas où $f_0 \in /8/$ et $g_0 \in /8/$, où dans g_0 nous prenons $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, $\tilde{\alpha}_4$, $\tilde{e}$, $\tilde{d}$ au lieu de α_1 , α_2 , α_4 , e , d .

Les relations /21/ nous donnent

$$/XV.1/ \quad \left(\tilde{\alpha}_4(t)+\tfrac{\tilde{e}}{2}\tilde{\alpha}_1^2(t)+\tilde{d}\tilde{\alpha}_1(t)\tilde{\alpha}_2(t)+\tfrac{\tilde{d}}{6}\tilde{\alpha}_1^3(t)\right)\Big[\alpha_1(t)(xaw-xuc+yub-yav)+$$
$$+\left(\tfrac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t)\right)(ub-av)x\Big]+$$
$$+\left(\tilde{e}\tilde{\alpha}_1(t)+\tilde{d}\tilde{\alpha}_2(t)+\tfrac{\tilde{d}}{2}\tilde{\alpha}_1^2(t)\right)\Big[\alpha_1(t)\big(x(xc-az)+y(ay-xb)\big)+\left(\tfrac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t)\right)(ay-xb)x\Big]+$$
$$+\tilde{d}\tilde{\alpha}_1(t)\Big[\alpha_1(t)\big(x(uz-xw)+y(xv-uy)\big)+\left(\tfrac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t)\right)(xv-uy)x\Big]-$$
$$-\tilde{\alpha}_1(t)\Big[\left(\alpha_4(t)+\tfrac{e}{2}\alpha_1^2(t)+d\alpha_1(t)\alpha_2(t)+\tfrac{d}{6}\alpha_1^3(t)\right)u+\left(e\alpha_1(t)+d\alpha_2(t)+\tfrac{d}{2}\alpha_1^2(t)\right)v+wd\alpha_1(t)\Big]\det A-$$
$$-\left(\tfrac{1}{2}\tilde{\alpha}_1^2(t)+\tilde{\alpha}_2(t)\right)\Big[\left(\alpha_4(t)+\tfrac{e}{2}\alpha_1^2(t)+d\alpha_1(t)\alpha_2(t)+\tfrac{d}{6}\alpha_1^3(t)\right)a+\left(e\alpha_1(t)+d\alpha_2(t)+\tfrac{d}{2}\alpha_1^2(t)\right)b+cd\alpha_1(t)\Big]\det A=0,$$

$$/XV.2/ \quad \left(\tilde{\alpha}_4(t)+\tfrac{\tilde{e}}{2}\tilde{\alpha}_1(t)+\tilde{d}\tilde{\alpha}_1(t)\tilde{\alpha}_2(t)+\tfrac{\tilde{d}}{6}\tilde{\alpha}_1^3(t)\right)\Big[\alpha_1(t)\big(u(aw-uc)+v(ub-av)\big)+$$
$$+\left(\tfrac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t)\right)(ub-av)u\Big]+$$
$$\left(\tilde{e}\tilde{\alpha}_1(t)+\tilde{d}\tilde{\alpha}_2(t)+\tfrac{\tilde{d}}{2}\tilde{\alpha}_1^2(t)\right)\Big[\alpha_1(t)\big(u(xc-az)+v(ay-xb)\big)+\left(\tfrac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t)\right)(ay-xb)u\Big]+$$
$$+\tilde{d}\tilde{\alpha}_1(t)\Big[\alpha_1(t)\big(u(uz-xw)+v(vx-uy)\big)+\left(\tfrac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t)\right)(xv-uy)u\Big]-$$

$$+\tilde{\alpha}_1(t)\left[(\alpha_4(t)+\tfrac{e}{2}\alpha_1^2(t)+d\alpha_1(t)\alpha_2(t)+\tfrac{d}{6}\alpha_1^3(t))a+(e\alpha_1(t)+d\alpha_2(t)+\tfrac{d}{2}\alpha_1^2(t))b+cd\alpha_1(t)\right]\det A\equiv 0,$$

/XV.3/ $$(\tilde{\alpha}_4(t)+\tfrac{\tilde{e}}{2}\tilde{\alpha}_1^2(t)+\tilde{d}\tilde{\alpha}_1(t)\tilde{\alpha}_2(t)+\tfrac{\tilde{d}}{6}\tilde{\alpha}_1^3(t))\left[\alpha_1(t)(a(aw-uc)+b(ub-av))+\right.$$
$$\left.+(\tfrac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t))(ub-av)a\right]+$$
$$+(\tilde{e}\tilde{\alpha}_1(t)+\tilde{d}\tilde{\alpha}_2(t)+\tfrac{\tilde{d}}{2}\tilde{\alpha}_1^2(t))\left[\alpha_1(t)(a(xc-az)+b(ay-xb))+(\tfrac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t))(ay-xb)a\right]+$$
$$+\tilde{d}\tilde{\alpha}_1(t)\left[\alpha_1(t)(a(uz-xw)+b(xv-uy))+(\tfrac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t))(xv-uy)a\right]\equiv 0.$$

Pour démontrer /22/ il suffit de vérifier

/XV.4/ $$(\tilde{\alpha}_4(r)+\tfrac{\tilde{e}}{2}\tilde{\alpha}_1^2(r)+\tilde{d}\tilde{\alpha}_1(r)\tilde{\alpha}_2(r)+\tfrac{\tilde{d}}{6}\tilde{\alpha}_1^3(r))\left[\alpha_1(s)(xaw-xuc+uyb-yav)+\right.$$
$$\left.+(\tfrac{1}{2}\alpha_1^2(s)+\alpha_2(s))(ub-av)x\right]+$$
$$+(\tilde{e}\tilde{\alpha}_1(r)+\tilde{d}\tilde{\alpha}_2(r)+\tfrac{\tilde{d}}{2}\tilde{\alpha}_1^2(r))\left[\alpha_1(s)(x(xc-az)+y(ay-xb))+(\tfrac{1}{2}\alpha_1^2(s)+\alpha_2(s))(ay-xb)x\right]+$$
$$+\tilde{d}\tilde{\alpha}_1(r)\left[\alpha_1(s)(x(uz-xw)+y(xv-uy))+(\tfrac{1}{2}\alpha_1^2(s)+\alpha_2(s))(xv-uy)x\right]-$$
$$-\tilde{\alpha}_1(r)\left[(\alpha_4(s)+\tfrac{e}{2}\alpha_1^2(s)+d\alpha_1(s)\alpha_2(s)+\tfrac{d}{6}\alpha_1^3(s))u+(e\alpha_1(s)+d\alpha_2(s)+\tfrac{d}{2}\alpha_1^2(s))v+wd\alpha_1(s)\right]\det A-$$
$$-(\tfrac{1}{2}\tilde{\alpha}_1^2(r)+\tilde{\alpha}_2(r))\left[(\alpha_4(s)+\tfrac{e}{2}\alpha_1^2(s)+d\alpha_1(s)\alpha_2(s)+\tfrac{d}{6}\alpha_1^3(s))a+(e\alpha_1(s)+d\alpha_2(s)+\tfrac{d}{2}\alpha_1^2(s))b+cd\alpha_1(s)\right]\det A\equiv 0,$$

/XV.5/ $$(\tilde{\alpha}_4(r)+\tfrac{\tilde{e}}{2}\tilde{\alpha}_1^2(r)+\tilde{d}\tilde{\alpha}_1(r)\tilde{\alpha}_2(r)+\tfrac{\tilde{d}}{6}\tilde{\alpha}_1^3(r))\left[\alpha_1(s)(u(wa-uc)+v(ub-av))+\right.$$
$$\left.+(\tfrac{1}{2}\alpha_1^2(s)+\alpha_2(s))(ub-av)u\right]+$$
$$+(\tilde{e}\tilde{\alpha}_1(r)+\tilde{d}\tilde{\alpha}_2(r)+\tfrac{\tilde{d}}{2}\tilde{\alpha}_1^2(r))\left[\alpha_1(s)(u(xc-az)+v(ay-xb))+(\tfrac{1}{2}\alpha_1^2(s)-\alpha_2(s))(ay-xb)u\right]+$$
$$+\tilde{d}\tilde{\alpha}_1(r)\left[\alpha_1(s)(u(uz-xw)+v(vxc-uy))+(\tfrac{1}{2}\alpha_1^2(s)+\alpha_2(s))(xv-uy)u\right]-$$
$$-\tilde{\alpha}_1(r)\left[(\alpha_4(s)+\tfrac{e}{2}\alpha_1^2(s)+d\alpha_1(s)\alpha_2(s)+\tfrac{d}{6}\alpha_1^3(s))a+(e\alpha_1(s)+d\alpha_2(s)+\tfrac{d}{2}\alpha_1^2(s))b+cd\alpha_1(s)\right]\det A\equiv 0$$

/XV.6/ $$(\tilde{\alpha}_4(r)+\tfrac{\tilde{e}}{2}\tilde{\alpha}_1^2(r)+\tilde{d}\tilde{\alpha}_1(r)\tilde{\alpha}_2(r)+\tfrac{\tilde{d}}{6}\tilde{\alpha}_1^3(r))\left[\alpha_1(s)(a(aw-uc)+b(ub-av))+\right.$$
$$\left.+(\tfrac{1}{2}\alpha_1^2(s)+\alpha_2(s))(ub-av)a\right]+$$
$$(\tilde{e}\tilde{\alpha}_1(r)+\tilde{d}\tilde{\alpha}_2(r)+\tfrac{\tilde{d}}{2}\tilde{\alpha}_1^2(r))\left[\alpha_1(s)(a(xc-az)+b(ay-xb))+\right.$$
$$\left.+(\tfrac{1}{2}\alpha_1^2(s)+\alpha_2(s))(ay-xb)a\right]+$$
$$+\tilde{d}\tilde{\alpha}_1(r)\left[\alpha_1(s)(a(uz-xw)+b(xv-uy))+(\tfrac{1}{2}\alpha_1^2(s)+\alpha_2(s))(xv-uy)a\right]\equiv 0.$$

De plus de /21/ nous avons encore

/XV.7/ $$\tilde{\alpha}_1(t)\left[\alpha_1(t)(a(aw-uc)+b(ub-av))+(\tfrac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t))(ub-av)a\right]\equiv 0,$$

/ V.3/ $$\tilde{\alpha}_1(t)\left[\alpha_1(t)(a(xc-az)+b(ay-bx))+(\tfrac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t))(ay-xb)a\right]+$$
$$+(\tfrac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t))\left[\alpha_1(t)(a(aw-uc)+b(bu-av))+(\tfrac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t))(ub-av)a\right]\equiv 0,$$

/XV.9/ $\tilde{\alpha}_1(t)\,[\alpha_1(t)(u(aw-uc)+v(ub-av))+(\frac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t))\,(ub-av)u]+$

$+(\frac{1}{2}\tilde{\alpha}_1^2(t)+\tilde{\alpha}_2(t))[\alpha_1(t)(a(aw-uc)+b(ub-av))+(\frac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t))(ub-av)a]\equiv 0,$

/XV.10/ $(\frac{1}{2}\tilde{\alpha}_1^2(t)+\tilde{\alpha}_2(t))[\alpha_1(t)(a(az-xc)+b(bx-ay))+(\frac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t))(xb-ay)a]+$

$+\tilde{\alpha}_1(t)[\alpha_1(t)(xaw-2xuc-2avy+uby+auz+vxb)+(\frac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t))(2xub-xav-uay)]\equiv 0,$

/XV.11/ $(\frac{1}{2}\tilde{\alpha}_1^2(t)+\tilde{\alpha}_2(t))[\alpha_1(t)(u(aw-uc)+v(ub-av))+(\frac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t))(ub-av)u]+$

$+\tilde{\alpha}_1(t)[\alpha_1(t)(uxc-2uaz+vay-2vxb+axw+buy)+(\frac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t))(2auy-uxb-axv)]\equiv 0,$

/XV.12/ $\tilde{\alpha}_1(t)\,[\alpha_1(t)(x^2c-xaz+ay^2-xby-u^2z+uxw-v^2x+vuy)+(\frac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t))\,(xay-$

$-x^2b-uxv+u^2y)]+(\frac{1}{2}\tilde{\alpha}_1^2(t)+\tilde{\alpha}_2(t))\,[\alpha_1(t)(2xaw-xuc+2uyb-yav-$

$-auz-bxv)+(\frac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t))(xub-2xav+auy)]\equiv 0,$

où $\tilde{\alpha}_1(t)\not\equiv 0\not\equiv\alpha_1(t)$.

Nous avons d'après /XV.7/ et /XV.8/ que $\tilde{\alpha}_1(t)=0$ ou

$$\alpha_1(t)\,(a(aw-uc)+b(bu-av))+(\frac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t))(ub-av)a=0,$$

$$\alpha_1(t)\,(a(xc-az)+b(ay-bx))+(\frac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t))(ay-xb)\,a=0.$$

Le déterminant de ce système, où $\alpha_1(t)$ et $\frac{1}{2}\alpha_1^2(t)+\alpha_2(t)$ forment les inconnues, est égal à $a^3\det A$. Distinguons les cas (a_1) $a\neq 0$ ou (a_2) $a=0$.

Dans le cas premier nous recevons du système $\alpha_1(t)=0=\alpha_2(t)$ d'où d'après le lemme $\tilde{\alpha}_1(t)\equiv 0$ ou $\alpha_1(t)\equiv 0\equiv\alpha_2(t)$, contrairement aux suppositions faites.

Dans le cas (a_2) nous avons de /XV.7/

$$\tilde{\alpha}_1(t)\,\alpha_1(t)\,b^2u\equiv 0.$$

Considérons les cas suivants :

(a_{21}) $b=0\neq u$ ou (a_{22}) $u=0\neq b$ ou (a_{23}) $b=0=u$.

Dans le cas (a_{21}) la relation /XV.9/ prend la forme

$$\tilde{\alpha}_1(t)\,\alpha_1(t)\,u^2c\equiv 0,$$

ce qui ne peut pas être satisfait, puisque $\tilde{\alpha}_1(t)\not\equiv 0\not\equiv\alpha_1(t)$

et $c \neq 0$,car la matrice A est non-singulière.

La même situation a lieu pour (a_{22}).

Dans le cas (a_{23}) la relation /XV.12/ nous donne

$$\tilde{\alpha}_1(t)\alpha_1(t)(xc-v^2)x \equiv 0,$$

d'où $xc-v^2=0$,puisque $x \neq 0$ .Il en résulte que la relation/XV.6/ a lieu et relation /XV.2/ prend la forme

$$\tilde{\alpha}_1(t)\alpha_1(t)(\tilde{d}v-c^2d)xv \equiv 0,$$

où $xv \neq 0$ .De là $\tilde{d}v-c^2d=0$,la relation /XV.5/ a donc lieu. De plus /XV.1/ prend la forme

$$\tilde{\alpha}_1(t)\alpha_1(t)(x^2c\tilde{e}-x^2w\tilde{d}+\tilde{d}vxy-xwdvc-ev^2xc) \equiv 0,$$

d'où $x^2c\tilde{e}-x^2w\tilde{d}+\tilde{d}vxy-xwdvc-ev^2xc=0$.

Il en résulte que /XV.4/ a lieu,ce qui finit la démonstration.

De cette manière la démonstration dans le cas XV est finie.

Si $f_o \in$ /8/ et

- $g_o \in$ /9/-/13/ la démonstration est analogue comme dans le cas XIV,
- $g_o \in$ /14/ la démonstration est telle que dans le cas XIII,
- $g_o \in$ /15/ ou $g_o \in$ /16/ la démonstration est analogue comme dans le cas X,
- $g_o \in$ /17/la démonstration est telle que dans le cas XV.

Si $f_o \in$ /9/ et $g_o \in$ /9/-/13/ les démonstrations sont telles que dans le cas XIV.

<u>Cas XVI</u> . $f_o \in$ /10/ et $g_o \in$ /10/ ,où prenons dans f_o: $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, α_1 , α_2 au lieu de a, b, c, $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$ et dans g_o: $\tilde{\tilde{a}}$, $\tilde{\tilde{b}}$, $\tilde{\tilde{c}}$, $\tilde{\varphi}$ au lieu de a, b, c, φ .

Les relations /21/ nous donnent

/XVI.1/ $(x\alpha_1(t)+z\alpha_2(t))\{[\tilde a(\tilde\varphi(t)-1)+\tilde b\tilde\varphi(t)\tilde\alpha_1(t)](aw-uc)+$

$+\tilde b(\tilde\varphi(t)-1)(xc-az)+[\tilde b\tilde\varphi(t)\tilde\alpha_2(t)+\tilde c(\tilde\varphi(t)-1)](uz-xw)\}\varphi(t)-$

$-(\tilde\varphi(t)-1)[x(\tilde a(\varphi(t)-1)+\tilde b\varphi(t)\alpha_1(t))+y(\varphi(t)-1)\tilde b+z(\tilde b\varphi(t)\alpha_2(t)+\tilde c(\varphi(t)-1)]\det A-$

$-\tilde\varphi(t)\tilde\alpha_1(t)[u(\tilde a(\varphi(t)-1)+\tilde b\varphi(t)\alpha_1(t))+v\tilde b(\varphi(t)-1)+w(\tilde b\varphi(t)\alpha_2(t)+\tilde c(\varphi(t)-1)]\det A+$

$+[\tilde a(\tilde\varphi(t)-1)+\tilde b\tilde\varphi(t)\tilde\alpha_1(t)](\varphi(t)-1)\det A\equiv 0,$

/XVI.2/ $(u\alpha_1(t)+w\alpha_2(t))[\tilde a(\tilde\varphi(t)-1)+\tilde b\tilde\varphi(t)\tilde\alpha_1(t)](aw-uc)+$

$+\tilde b(\tilde\varphi(t)-1)(xc-az)+[\tilde b\tilde\varphi(t)\tilde\alpha_2(t)+\tilde c(\tilde\varphi(t)-1)](uz-xw)\}\varphi(t)-$

$-(\tilde\varphi(t)-1)[u(\tilde a(\varphi(t)-1)+\tilde b\varphi(t)\alpha_1(t))+v\tilde b(\varphi(t)-1)+w(\tilde b\varphi(t)\alpha_2(t)+\tilde c(\varphi(t)-1))]\det A+$

$+\tilde b(\tilde\varphi(t)-1)(\varphi(t)-1)\det A\equiv 0,$

/XVI.3/ $(a\alpha_1(t)+c\alpha_2(t))\{[\tilde a(\tilde\varphi(t)-1)+\tilde b\tilde\varphi(t)\tilde\alpha_1(t)](aw-uc)+\tilde b(\tilde\varphi(t)-1)(xc-az)+$

$+[\tilde b\tilde\varphi(t)\tilde\alpha_2(t)+\tilde c(\tilde\varphi(t)-1)](uz-xw)\}\varphi(t)+[\tilde b\tilde\varphi(t)\tilde\alpha_2(t)+\tilde c(\tilde\varphi(t)-1)](\varphi(t)-1)\det A-$

$-(\tilde\varphi(t)-1)[a(\tilde a(\varphi(t)-1)+\tilde b\varphi(t)\alpha_1(t))+b\tilde b(\varphi(t)-1)+c(\tilde b\varphi(t)\alpha_2(t)+\tilde c(\varphi(t)-1))]\det A-$

$-\tilde\varphi(t)\tilde\alpha_2(t)[u(\tilde a(\varphi(t)-1)+\tilde b\varphi(t)\alpha_1(t))+v\tilde b(\varphi(t)-1)+w(\tilde b\varphi(t)\alpha_2(t)+\tilde c(\varphi(t)-1))]\det A\equiv 0.$

/XVI. Pour démontrer /22/ il suffit de montrer que:

/XVI.4/ $(x\alpha_1(s)+z\alpha_2(s))\{[\tilde a(\tilde\varphi(m)-1)+\tilde b\tilde\varphi(m)\tilde\alpha_1(m)](aw-uc)+$

$+\tilde b(\tilde\varphi(m)-1)(xc-az)+[\tilde b\tilde\varphi(m)\tilde\alpha_2(m)+\tilde c(\tilde\varphi(m)-1)](uz-xw)\}\varphi(s)-$

$-(\tilde\varphi(m)-1)[x(\tilde a(\varphi(s)-1)+\tilde b\varphi(s)\alpha_1(s))+y\tilde b(\varphi(s)-1)+z(\tilde b\varphi(s)\alpha_2(s)+\tilde c(\varphi(s)-1))]\det A-$

$-\tilde\varphi(m)\tilde\alpha_1(m)[u(\tilde a(\varphi(s)-1)+\tilde b\varphi(s)\alpha_1(s))+v\tilde b(\varphi(s)-1)+w(\tilde b\varphi(s)\alpha_2(s)+\tilde c(\varphi(s)-1))]\det A+$

$+[\tilde a(\tilde\varphi(m)-1)+\tilde b\tilde\varphi(m)\tilde\alpha_1(m)](\varphi(s)-1)\det A\equiv 0,$

/XVI.5/ $(u\alpha_1(s)+w\alpha_2(s))[\tilde a(\varphi(m)-1)+\tilde b\tilde\varphi(m)\tilde\alpha_1(m)](aw-uc)+$

$+\tilde b(\tilde\varphi(m)-1)(xc-az)+[\tilde b\tilde\varphi(m)\tilde\alpha_2(m)+\tilde c(\tilde\varphi(m)-1)](uz-xw)\}\varphi(s)-$

$-(\tilde\varphi(m)-1)[u(\tilde a(\varphi(s)-1)+\tilde b\varphi(s)\alpha_1(s))+v\tilde b(\varphi(s)-1)+w(\tilde b\varphi(s)\alpha_2(s)+\tilde c(\varphi(s)-1))]\det A-$

$+\tilde b(\tilde\varphi(m)-1)(\varphi(s)-1)\det A\equiv 0,$

/XVI.6/ $(a\alpha_1(s)+c\alpha_2(s))\{[\tilde a(\tilde\varphi(m)-1)+\tilde b\tilde\varphi(m)\tilde\alpha_1(m)](aw-uc)+\tilde b(\tilde\varphi(m)-1)(xc-az)+$

$+[\tilde b\tilde\varphi(m)\tilde\alpha_2(m)+\tilde c(\tilde\varphi(m)-1)](uz-xw)\}\varphi(s)+[\tilde b\tilde\varphi(m)\tilde\alpha_2(m)+\tilde c(\tilde\varphi(m)-1)](\varphi(s)-1)\det A-$

$-(\tilde\varphi(m)-1)[a(\tilde a(\varphi(s)-1)+\tilde b\varphi(s)\alpha_1(s))+b\tilde b(\varphi(t)-1)+c(\tilde b\varphi(s)\alpha_2(s)+\tilde c(\varphi(s)-1))]\det A-$

$$-\tilde{\varphi}(s)\tilde{\alpha}_2(s)\det A\,[u(\tilde{a}(\varphi(s)-1)+\tilde{b}\varphi(s)\alpha_1(s))+v\tilde{b}(\varphi(s)-1)+w(\tilde{b}\varphi(s)\alpha_2(s)+\tilde{c}(\varphi(s)-1))]\equiv 0.$$

Les relations /21/ donnent aussi

/XVI.7/ $\tilde{\varphi}(t)\varphi(t)\tilde{\alpha}_1(t)(u\alpha_1(t)+w\alpha_2(t))(aw-uc)\equiv 0,$

/XVI.8/ $\tilde{\varphi}(t)\varphi(t)\tilde{\alpha}_2(t)(u\alpha_1(t)+w\alpha_2(t))(aw-uc)\equiv 0,$

/XVI.9/ $\tilde{\varphi}(t)\varphi(t)\tilde{\alpha}_1(t)(u\alpha_1(t)+w\alpha_2(t))(uz-xw)\equiv 0,$

/XVI.10/ $\tilde{\varphi}(t)\varphi(t)\tilde{\alpha}_2(t)(u\alpha_1(t)+w\alpha_2(t))(uz-xw)\equiv 0,$

/XVI.11/ $\tilde{\varphi}(t)\varphi(t)[\tilde{\alpha}_1(t)((x\alpha_1(t)+z\alpha_2(t))(aw-uc)-(u\alpha_1(t)+w\alpha_2(t))(xc-az))+$

$+\tilde{\alpha}_2(t)(x\alpha_1(t)+z\alpha_2(t))(uz-xw)]\equiv 0,$

/XVI.12/ $\tilde{\varphi}(t)\varphi(t)[\tilde{\alpha}_1(t)(a\alpha_1(t)+c\alpha_2(t))(aw-uc)+$

$+\tilde{\alpha}_2(t)((a\alpha_1(t)+c\alpha_2(t))(uz-xw)-(u\alpha_1(t)+w\alpha_2(t))(xc-az))]\equiv 0.$

Considérons les cas

(a_1) $|aw-uc|+|uz-xw|\neq 0$ ou (a_2) $u=0=w$.

Nous recevons des relations /XVI.7/-/XVI.10/ dans le cas (a_1) d'après le lemme 1

(a_{11}) $\tilde{\alpha}_1(t)\equiv 0\equiv\tilde{\alpha}_2(t)$ ou (a_{12}) $u\alpha_1(t)+w\alpha_2(t)\equiv 0,$

Dans le cas (a_{11}) les relations /XVI.11/ et /XVI.12/ sont remplies et les relations /XVI.1/-/XVI.3/ prennent la forme

/XVI.13/ $(\tilde{\varphi}(t)-1)[\varphi(t)(x\alpha_1(t)+z\alpha_2(t))k-(\varphi(t)-1)\det A(x\tilde{a}+y\tilde{b}+z\tilde{c}-\tilde{\tilde{a}})]\equiv 0,$

$(\tilde{\varphi}(t)-1)[\varphi(t)(u\alpha_1(t)+w\alpha_2(t))k-(\varphi(t)-1)\det A(u\tilde{a}+v\tilde{b}+w\tilde{c}-\tilde{\tilde{b}})]\equiv 0,$

$(\tilde{\varphi}(t)-1)[\varphi(t)(a\alpha_1(t)+c\alpha_2(t))k-(\varphi(t)-1)\det A(a\tilde{a}+b\tilde{b}+c\tilde{c}-\tilde{\tilde{c}})]\equiv 0,$

où $k=\tilde{\tilde{a}}/aw-uc/+\tilde{\tilde{b}}/xc-az/+\tilde{\tilde{c}}/uz-xw/-\tilde{b}\cdot\det A$ et $\tilde{\varphi}(t)\not\equiv 1$ et $\varphi(t)\not\equiv 1$.

Si au moins un des nombres $x\tilde{a}+y\tilde{b}+z\tilde{c}-\tilde{\tilde{a}}$ ou $u\tilde{a}+v\tilde{b}+w\tilde{c}-\tilde{\tilde{b}}$ ou $a\tilde{a}+b\tilde{b}+c\tilde{c}-\tilde{\tilde{c}}$ est différent de zéro, nous pouvons supposer que $x\tilde{a}+y\tilde{b}+z\tilde{c}-\tilde{\tilde{a}}\neq 0$ et dans ce cas nous recevons d'après le lemme 3 que $\tilde{\varphi}(t)\equiv 1$ ou $(x\alpha_1(t)+z\alpha_2(t))k\equiv 0$ et $\varphi(t)\equiv 1$, en contradiction à la supposition faite. Il en résulte que

$x\tilde{a}+y\tilde{b}+z\tilde{c}-\tilde{\tilde{a}} = 0 = u\tilde{a}+v\tilde{b}+w\tilde{c}-\tilde{\tilde{b}} = a\tilde{a}+b\tilde{b}+c\tilde{c}-\tilde{\tilde{c}}$, d'où $k = 0$, les relations /XVI.4/-/XVI.6/ sont donc remplies, q.e.d.

Dans le cas (a_{12}) nous recevons des relations /XVI.11/ et /XVI.12/que

(a_{121}) $\tilde{\alpha}_1(t)(aw-uc)+\tilde{\alpha}_2(t)(uz-xw)\equiv 0$ ou (a_{122}) $\alpha_1(t)\equiv 0\equiv\alpha_2(t)$.

Dans le cas (a_{121}) la relation /XVI.2/ prend la forme :

$$(\tilde{\varphi}(t)-1)(\varphi(t)-1)\det A(u\tilde{a}+\tilde{b}v+\tilde{c}w-\tilde{\tilde{b}})\equiv 0,$$

donc d'après la supposition et le lemme 1 nous avons $u\tilde{a}+v\tilde{b}+w\tilde{c}-\tilde{\tilde{b}} = 0$ .La relation /XVI.5/ est satisfaite et les relations /XVI.1/ et /XVI.3/prennent la forme

$$(\tilde{\varphi}(t)-1)\{(x\alpha_1(t)+z\alpha_2(t))\varphi(t)\cdot k-\det A(\varphi(t)-1)(x\tilde{a}+y\tilde{b}+z\tilde{c}-\tilde{\tilde{a}})\}\equiv 0,$$

$$(\tilde{\varphi}(t)-1)\{(a\alpha_1(t)+c\alpha_2(t))\varphi(t)\cdot k-\det A(\varphi(t)-1)(a\tilde{a}+b\tilde{b}+c\tilde{c}-\tilde{\tilde{c}})\}\equiv 0,$$

où $k=\tilde{\tilde{a}}/aw-uc/+\tilde{\tilde{b}}/xc-az/+\tilde{\tilde{c}}/uz-xw/-\tilde{\tilde{b}}\cdot\det A$.

En raisonnant analogiquement comme dans le cas (a_{11}) nous constatons que les relations /XVI.4/ et /XVI.6/ ont lieu, ce qui finit la démonstration.

Dans le cas (a_{122}) la relation /XVI.2/ prend la forme

$$(\tilde{\varphi}(t)-1)(\varphi(t)-1)\det A(u\tilde{a}+v\tilde{b}+w\tilde{c}-\tilde{\tilde{b}})\equiv 0,$$

d'où $u\tilde{a}+v\tilde{b}+w\tilde{c} = \tilde{\tilde{b}}$ .Dans ce cas les relations /XVI.1/ et /XVI.3/ nous donnent

$$(\tilde{\varphi}(t)-1)(\varphi(t)-1)\det A(x\tilde{a}+y\tilde{b}+z\tilde{c}-\tilde{\tilde{a}})\equiv 0,$$

$$(\tilde{\varphi}(t)-1)(\varphi(t)-1)\det A(a\tilde{a}+b\tilde{b}+c\tilde{c}-\tilde{\tilde{c}})\equiv 0,$$

et de là $x\tilde{a}+y\tilde{b}+z\tilde{c}-\tilde{\tilde{a}} = 0 = a\tilde{a}+b\tilde{b}+c\tilde{c}-\tilde{\tilde{c}}$.

Les relations /XVI.4/-/XVI.6/ ont donc lieu, c.q.f.d.

Dans le cas (a_2) la démonstration est analogue que dans le cas (a_{122}).

De cette manière la démonstration dans le cas XVI est finie.

<u>Cas XVII</u> . $f_0 \in$ /10/ et $g_0 \in$ /14/ ,où nous prenons $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, α_1 , α_2 au lieu de a, b, c, $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$ dans f_0 et $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$ au lieu de α_1 , α_2 dans g_0 .

Les relations /21/ nous donnent

/XVII.1/ $[(\alpha_3(t)+\frac{d}{2}\tilde{\alpha}_1^2(t))\varphi(t)(aw-uc)+d\tilde{\alpha}_1(t)\varphi(t)(xc-az)+$
$+(\alpha_4(t)+\frac{e}{2}\tilde{\alpha}_2^2(t))\varphi(t)(uz-xw)](x\alpha_1(t)+z\alpha_2(t))+(\alpha_3(t)+\frac{d}{2}\tilde{\alpha}_1^2(t))(\varphi(t)-1)\det A-$
$-\tilde{\alpha}_1(t)[u(\tilde{a}(\varphi(t)-1)+\tilde{b}\varphi(t)\alpha_1(t))+v\tilde{b}(\varphi(t)-1)+w(\tilde{b}\varphi(t)\alpha_2(t)+\tilde{c}(\varphi(t)-1))]\det A\equiv 0,$

/XVII.2/ $[(\alpha_3(t)+\frac{d}{2}\tilde{\alpha}_1^2(t))(aw-uc)+d\tilde{\alpha}_1(t)(xc-az)+$
$+(\alpha_4(t)+\frac{e}{2}\tilde{\alpha}_2^2(t))(uz-xw)]\varphi(t)(u\alpha_1(t)+w\alpha_2(t))+d\tilde{\alpha}_1(t)(\varphi(t)-1)\det A\equiv 0,$

/XVII.3/ $[(\alpha_3(t)+\frac{d}{2}\tilde{\alpha}_1^2(t))(aw-uc)+d\tilde{\alpha}_1(t)(xc-az)+$
$+(\alpha_4(t)+\frac{e}{2}\tilde{\alpha}_2^2(t))(uz-xw)]\varphi(t)(a\alpha_1(t)+c\alpha_2(t))+(\alpha_4(t)+\frac{e}{2}\tilde{\alpha}_2^2(t))(\varphi(t)-1)\det A-$
$-\tilde{\alpha}_2(t)[u(\tilde{a}(\varphi(t)-1)+\tilde{b}\varphi(t)\alpha_1(t))+v\tilde{b}(\varphi(t)-1)+w(\tilde{b}\varphi(t)\alpha_2(t)+\tilde{c}(\varphi(t)-1))]\det A\equiv 0.$

Pour démontrer /22/ il suffit de montrer

/XVII.4/ $[(\alpha_3(r)+\frac{d}{2}\tilde{\alpha}_1^2(r))\varphi(s)(aw-uc)+d\tilde{\alpha}_1(r)\varphi(s)(xc-az)+$
$+(\alpha_4(r)+\frac{e}{2}\tilde{\alpha}_2^2(r))\varphi(s)(uz-xw)](x\alpha_1(s)+z\alpha_2(s))+(\alpha_3(r)+\frac{d}{2}\tilde{\alpha}_1^2(r))(\varphi(s)-1)\det A-$
$-\tilde{\alpha}_1(r)[u(\tilde{a}(\varphi(s)-1)+\tilde{b}\varphi(s)\alpha_1(s))+v\tilde{b}(\varphi(s)-1)+w(\tilde{b}\varphi(s)\alpha_2(s)+\tilde{c}(\varphi(s)-1))]\det A\equiv 0,$

/XVII.5/ $[(\alpha_3(r)+\frac{d}{2}\tilde{\alpha}_1^2(r))(aw-uc)+d\tilde{\alpha}_1(r)(xc-az)+$
$+(\alpha_4(r)+\frac{e}{2}\tilde{\alpha}_2^2(r))(uz-xw)]\varphi(s)(u\alpha_1(s)+w\alpha_2(s))+d\tilde{\alpha}_1(r)(\varphi(s)-1)\det A\equiv 0,$

/XVII.6/ $[(\alpha_3(r)+\frac{d}{2}\tilde{\alpha}_1^2(r))(aw-uc)+d\tilde{\alpha}_1(r)(xc-az)+$
$+(\alpha_4(r)+\frac{e}{2}\tilde{\alpha}_2^2(r))(uz-xw)]\varphi(s)(a\alpha_1(s)+c\alpha_2(s))+(\alpha_4(r)+\frac{e}{2}\tilde{\alpha}_2^2(r))(\varphi(s)-1)\det A-$
$-\tilde{\alpha}_2(r)[u(\tilde{a}(\varphi(s)-1)+\tilde{b}\varphi(s)\alpha_1(s))+v\tilde{b}(\varphi(s)-1)+w(\tilde{b}\varphi(s)\alpha_2(s)+\tilde{c}(\varphi(s)-1))]\det A\equiv 0.$

Il résulte des relations /21/

/XVII.7/ $\varphi(t)\tilde{\alpha}_1(t)(u\alpha_1(t)+w\alpha_2(t))(aw-uc)\equiv 0,$
$\varphi(t)\tilde{\alpha}_2(t)(u\alpha_1(t)+w\alpha_2(t))(aw-uc)\equiv 0,$

$$\varphi(t)\,[\tilde{\alpha}_1(t)\,((x\alpha_1(t)+z\alpha_2(t))(av-uc)-(u\alpha_1(t)+w\alpha_2(t))(xc-az))+$$
$$+\tilde{\alpha}_2(t)\,(x\alpha_1(t)+z\alpha_2(t))(uz-xw)]\equiv 0,$$
$$\varphi(t)\,[\tilde{\alpha}_1(t)(a\alpha_1(t)+c\alpha_2(t))(aw-uc)+$$
$$+\tilde{\alpha}_2(t)\,((a\alpha_1(t)+c\alpha_2(t))(uz-xw)-(u\alpha_1(t)+w\alpha_2(t))(xc-az))]\equiv 0,$$
$$\varphi(t)\,\tilde{\alpha}_1(t)\,(u\alpha_1(t)+w\alpha_2(t))(uz-xw)\equiv 0,$$
$$\varphi(t)\tilde{\alpha}_2(t)\,(u\alpha_1(t)+w\alpha_2(t))(uz-xw)\equiv 0,$$

où $\tilde{\alpha}_1(t)\not\equiv 0\not\equiv\tilde{\alpha}_2(t)$ et il n'existe pas un k de $\mathbb{C}$ tel que $\tilde{\alpha}_2(t)\equiv k.\tilde{\alpha}_1(t)$.

En raisonnant comme dans le cas XVI nous recevons des relations /XVII.7/ que

(a_1) $\alpha_1(t)\equiv 0\equiv\alpha_2(t)$ ou (a_2) $u = 0 = w$.

Dans le cas (a_1) la relation /XVII.2/ prend la forme

$$d\tilde{\alpha}_1(t)\,(\varphi(t)-1)\det A\equiv 0.$$

Nous avons d'après le lemme 1 et la supposition faite que d = 0 ,d'où la relation /XVII.5/ est remplie et les relations /XVII.1/ et /XVII.3/ prennent la forme

$$(\varphi(t)-1)\,[\tilde{\alpha}_1(t)(u\tilde{a}+v\tilde{b}+w\tilde{c})-\alpha_3(t)]\det A\equiv 0,$$
$$(\varphi(t)-1)\,[\tilde{\alpha}_2(t)(u\tilde{a}+v\tilde{b}+w\tilde{c})-\alpha_4(t)]\det A\equiv 0,$$

d'où d'après le lemme 1 nous avons

$$\alpha_3(t)-\tilde{\alpha}_1(t)(u\tilde{a}+v\tilde{b}+w\tilde{c})\equiv 0\ ,$$
$$\alpha_4(t)-\tilde{\alpha}_2(t)\,(u\tilde{a}+v\tilde{b}+w\tilde{c})\equiv 0\,.$$

Les relations /XVII.4/ et /XVII.6/ ont donc lieu, ce qui finit la démonstration.

Dans le cas (a_2) le raisonnement analogue comme dans le cas (a_1) finit la démonstration.

La démonstration dans le cas XVII est donc ter-

Dans le cas si $f_o \in$ /10/-/12/ et

- $g_o \in$ /11/-/13/ la démonstration est analogue que dans le cas XVI,
- $g_o \in$ /15/-/17/ la démonstration est analogue comme dans le cas XVII.

Si $f_o \in$ /11/-/12/ et $g_o \in$ /14/-/17/ la démonstration est analogue que dans le cas XVII.

Si $f_o \in$ /13/ et

- $g_o \in$ /13/ nous pouvons démontrer comme dans le cas XII,
- $g_o \in$ /14/, /15/ ou /17/ la démonstration est analogue que dans le cas XVII.

Si $f_o \in$ /13/ et $g_o \in$ /16/ la démonstration est analogue que dans le cas XI.

Nous avons donc terminée la démonstration de la première partie du théorème.

<u>Démonstration de la partie deuxième</u>.

a/ Si f_o et g_o sont de la forme /14/ en posant

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ f_o(t)=\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1(t) & 0 & \alpha_3(t) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2(t) & 1 & \alpha_4(t) \end{pmatrix};\ g_o(t)=\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1(t) & 0 & \tilde{\alpha}_3(t) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_4(t) & 1 & -\tilde{\alpha}_3(t)-\alpha_4(t)-\alpha_3(t) \end{pmatrix}$$

nous constatons que /21/ a lieu et /22/ n'est pas remplie.

La même situation a lieu si

b/ $f_o \in$ /14/ et $g_o \in$ /15/

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix};\ f_o(t)=\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1(t) & 0 & \tilde{\alpha}_4(t)+\beta_3(t) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1(t) & 1 & \tilde{\alpha}_4(t) \end{pmatrix};\ g_o(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha_1(t) & \alpha_3(t) \\ 0 & 1 & 0 & \beta_3(t) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

c/ $f_o \in$ /14/ et $g_o \in$ /16/ et

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix};\ f_o(t)=\begin{pmatrix}1&\alpha_1(t)&0&\alpha_3(t)\\0&1&0&0\\0&-\alpha_1(t)&1&\alpha_4(t)\end{pmatrix};\ g_o(t)=\begin{pmatrix}1&\alpha_1(t)&-\alpha_1(t)&\tilde{\alpha}_3(t)\\0&1&0&-\alpha_3(t)-\alpha_4(t)\\0&0&1&-\alpha_3(t)-\alpha_4(t)\end{pmatrix};$$

d/ $f_o \in$ /14/ et $g_o \in$ /17/ et

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix};\ f_o(t)=\begin{pmatrix}1&\alpha_1(t)&0&\alpha_3(t)+\frac{1}{2}\alpha_1^2(t)\\0&1&0&\alpha_1(t)\\0&-\alpha_1(t)&1&\alpha_4(t)-\frac{1}{2}\alpha_1^2(t)\end{pmatrix};\ g_o(t)=\begin{pmatrix}1&-\alpha_3(t)-\alpha_4(t)&\alpha_1(t)&\tilde{\alpha}_3(t)\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix};$$

e/ f_o et g_o ont la forme /15/ et

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix};\ f_o(t)=\begin{pmatrix}1&0&\alpha_2(t)&\alpha_3(t)\\0&1&0&\beta_2(t)\\0&0&1&0\end{pmatrix};\ g_o(t)=\begin{pmatrix}1&0&\alpha_2(t)&\tilde{\alpha}_3(t)\\0&1&0&\beta_2(t)\\0&0&0&1\end{pmatrix};$$

f/ $f_o \in$ /15/ et $g_o \in$ /16/ et

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix};\ f_o(t)=\begin{pmatrix}1&0&\alpha_2(t)&\alpha_3(t)\\0&1&0&\beta_2(t)\\0&0&1&0\end{pmatrix};\ g_o(t)=\begin{pmatrix}1&\alpha_2(t)&-\alpha_2(t)&\tilde{\alpha}_3(t)\\0&1&0&-\beta_2(t)\\0&0&1&-\beta_2(t)\end{pmatrix};$$

g/ $f_o \in$ /15/ et $g_o \in$ /17/ et

$$A=J;\quad f_o(t)=\begin{pmatrix}1&0&\alpha_2(t)&\alpha_3(t)\\0&1&0&\beta_2(t)\\0&0&1&0\end{pmatrix};\ g_o(t)=\begin{pmatrix}1&\alpha_2(t)&\beta_2(t)&\tilde{\alpha}_3(t)+\frac{1}{2}\beta_2^2(t)\\0&1&0&0\\0&0&1&\beta_2(t)\end{pmatrix};$$

h/ f_o et g_o ont la forme /16/ et

$$A=J;\quad f_o(t)=\begin{pmatrix}1&\alpha_1(t)&0&\alpha_3(t)\\0&1&0&0\\0&0&1&\beta_3(t)\end{pmatrix};\ g_o(t)=\begin{pmatrix}1&\alpha_1(t)&-\alpha_1(t)&\tilde{\alpha}_3(t)\\0&1&0&-\beta_3(t)\\0&0&1&-\beta_3(t)\end{pmatrix};$$

i/ f_o /16/ et g_o /17/ et

$$A=J\,;\quad f_0(t)=\begin{pmatrix}1 & \alpha_1(t) & 0 & \alpha_3(t)\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \beta_3(t)\end{pmatrix};\quad g_0(t)=\begin{pmatrix}1 & \beta_3(t) & \alpha_1(t) & \tilde{\alpha}_3(t)+\frac{1}{2}\beta_3^2(t)\\ 0 & 1 & 0 & \beta_3(t)\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix};$$

j/ f_0 et g_0 ont la forme /17/ et

$$A=J\,;\quad f_0(t)=\begin{pmatrix}1 & \alpha_1(t) & \alpha_2(t) & \alpha_3(t)\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix};\quad g_0(t)=\begin{pmatrix}1 & -\alpha_1(t) & \alpha_2(t) & \tilde{\alpha}_3(t)-\alpha_1(t)\alpha_2(t)\\ 0 & 1 & 1 & \alpha_2(t)\\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_1(t)\end{pmatrix}.$$

De cette façon la démonstration de la deuxième partie de notre théorème est terminée,ce qui finit la démonstration du théorème tout entièrement.

R e m a r q u e .

Si nous considérons les transformations affines réelles, c'est-à-dire si nous considérons les matrices $f(t)$ des éléments réels,dans ce cas sauf les possibilités /5/-/17/ pour $f_0(t)$ /avec les paramètres réels naturallement/ nous avons encore la possibilité /[2]/ :

$$f_1(t)=\begin{pmatrix}\kappa(t) & -\sigma(t) & 0 & a\kappa(t)+b\sigma(t)-a\\ \sigma(t) & \kappa(t) & 0 & -b\kappa(t)+a\sigma(t)+b\\ 0 & 0 & 1 & \beta_3(t)\end{pmatrix},$$

où $\beta_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction additive arbitraire, $\kappa,\sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ remplissent les équations

$$\kappa(t_1+t_2)=\kappa(t_1)\kappa(t_2)-\sigma(t_1)\sigma(t_2),$$
$$\sigma(t_1+t_2)=\sigma(t_1)\kappa(t_2)+\kappa(t_1)\sigma(t_2),$$

$\kappa(t)\not\equiv 1$ et a, b sont des nombres réels.

Puisque

$$f_1(t)=C\cdot B\cdot C^{-1}$$

où $B \in (6)$, où $\varphi_2(t) \equiv \kappa(t) + i\sigma(t) \equiv \overline{\varphi_3(t)}$, $d = -\frac{1}{2}i/a-ib/$, $e = \frac{1}{2}/a+ib/$ et

$$C = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donc le théorème démontré est vrai aussi pour le cas réel et de plus, si f est de la forme /2/ avec $f_0(t) \equiv f_1(t)$ et g est un homomorphisme arbitraire, dans ce cas l'implication /1/ a aussi lieu.

<u>P r o b l è m e</u>.

Quel est le sens géométrique des résultats précédents?

T r a v a u x c i t é s

[1] Z. Leszczyńska, Z. Moszner, Sur la commutativité des homomorphismes des valeurs matricielles, Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, Nr. 10 /1986/.

[2] Z. Moszner, Sur les un-paramétriques sous-groupes du groupe affine, sous presse dans Tensor.

[3] Z. Moszner, Sur un problème au sujet des homomorphismes, sous presse dans Aequationes Math.

[4] J. Wróblewski, On two homomorphisms on the additive groups of all real numbers, Demonstratio Math. 18/3, /1985/, p. 1161.