Feliks Barański, Kazimierz Jaracz

Zagadnienie Cauchy'ego dla sfaktoryzowanych równań różniczkowych zwyczajnych w zastosowaniu do analizy układów liniowych

1. WSTĘP

W teorii liniowych układów automatyki stosowane są różne metody matematycznego opisu właściwości dynamicznych tych układów i ich elementów. Są to przede wszystkim: metoda transmitancji operatorowej, metoda zmiennych stanu w przestrzeni stanów i metoda operatorów różniczkowych [2 ÷ 8] dla przypadków jedno i wielowymiarowych obiektów sterowania.

Każda z metod posiada pewne odmienne właściwości predystynujące je do określonych zastosowań technicznych.

W pracach [5, 6] przedstawiono metodę analizy układów liniowych opisywanych za pomocą operatorów różniczkowych. Metoda ta dotyczy układów liniowych czasowo-inwariantnych i polega na dekompozycji układu n-tego rzędu na p niezależnych podukładów niższego rzędu p<n i odpowiedniej konstrukcji rozwiązania.

W pracy niniejszej przedstawiono metodę analizy układów liniowych niestacjonarnych opartą na zagadnieniu Cauchy'ego oraz pokazano możliwość jej zastosowania do sfaktoryzowanych równań różniczkowych zwyczajnych w teorii układów liniowych.

2. ZAKRES PRACY

Przedmiotem pracy jest konstrukcja rozwiązania równania

$$Lx(t) = u(t), \quad t \in (t_1,t_2) \quad , \quad t_1<0 \ , \ t_2>0 \quad (1)$$

gdzie:

$$L = L_{1,j_1} L_{2,j_2} \cdots\cdots\cdots L_{n,j_n},$$

oraz współczynniki równania $Lx(t) = 0$ są ciągłe w przedziale (t_1,t_2), $x(t) \in C^n(t_1,t_2)$

$$L_{k,j_k} = D_t^{j_k} + \sum_{0}^{j_k-1} p_i^k D_t^i, \quad k = 1,2,\ldots,n$$

Zakładamy, że rząd równania (1) jest równy n oraz rozwiązanie $x(t)$ spełnia warunki początkowe Cauchy'ego

$$D_t^i x(t_o) = A_i, \ i = 0,1,\ldots,n-1, \ t_o \in (t_1,t_2) \qquad (2)$$

Problem (1) , (2) zredukujemy do zagadnienia z warunkami początkowymi jednorodnymi za pomocą zamiany funkcji niewiadomej. Zredukowane zagadnienie rozwiążemy przy pomocy funkcji Cauchy'ego. Podamy także twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania.

W pracy [11] podobne zagadnienie zostało rozwiązane dla mniej ogólnej klasy operatorów.

3. REDUKCJA ZAGADNIENIA CAUCHY'EGO DO WARUNKÓW POCZĄTKOWYCH JEDNORODNYCH

Niech funkcja $x \in C^n(t_1,t_2)$ będzie rozwiązaniem zagadnienia (1) , (2) . Niech p oznacza wielomian postaci

$$p(t) = \sum_{0}^{n-1} a_i t_i$$

Niech

$$w(t) = x(t) - p(t)$$

Lemat 1. Istnieje jeden wielomian p dla którego

$$D_t^i p(t_o) = A_i, \quad i = 0,1,\ldots,n-1 \qquad (3)$$

Dowód. Na podstawie (3) na współczynniki a_i otrzymujemy układ równań liniowych

$$
\begin{aligned}
a_o + a_1 t_o + \ldots + a_{n-1} t_o^{n-1} &= A_o, \\
a_1 + \ldots (n-1) a_{n-1} t_o^{n-2} &= A_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \qquad (4) \\
(n-2)! a_{n-2} + \frac{1}{2!}(n-1)! t_o &= A_{n-2} \\
(n-1)! a_{n-1} &= A_{n-1}
\end{aligned}
$$

Wyznacznik główny układu (4) D jest postaci

$$D = 2!3! \ldots (n-1)! \neq 0$$

W konsekwencji otrzymujemy tezę lematu 1.

Lemat 2. Jeżeli funkcja $x(t) \in C^n(t_1,t_2)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (1) , (2) , wówczas funkcja $w(t) \in C^n(t_1,t_2)$ funkcja w spełnia równanie

$$Lw = F, \quad F = u - Lp \qquad (1a)$$

oraz warunki początkowe

$$D_t^i w(t_0) = 0, \quad i = 0,1,\ldots m-1 \tag{2a}$$

Naodwrót. Jeżeli funkcja $w \in C^m(t_1,t_2)$ oraz spełnia warunki (1a) , (2a) , wówczas funkcja $x = w + p$ należy do $C^m(t_1,t_2)$ oraz spełnia warunki (1) , (2) .

Łatwy dowód pomijamy.

4. FUNKCJA CAUCHY'EGO

Weźmy pod uwagę równania

$$L_1 x(t) = 0, \; L_1 = D_t + p_1(t), \; p_1 \in C(t_1,t_2), \; t \in (t_1,t_2) \tag{5}$$

$$L_1 x(t) = Q(t)$$

Funkcję

$$H(t,s) = \exp\Big(-\int_s^t p_1(\tau)\,d\tau\Big) \tag{6}$$

nazywamy funkcją Cauchy'ego dla równania (5) .

Lemat 3. Funkcja H spełnia warunki

$$L_1 H(t,s) = 0 \text{ dla } (t,s) \in (t_1,t_2) \cap (t_1,t_2), \; t \neq s \; ;$$

$$H(t,t) = 1$$

Łatwy dowód pomijamy.

Niech

$$V(t,s) = \int_s^t H(t,s)Q(s)\,ds$$

Lemat 4. Jeżeli $Q \in C([t_1,t_2])$, wówczas

$$L_1 V(t,s) = Q(t) \text{ dla } (t,s) \in (t_1,t_2) \cap (t_1,t_2), \; V(t,t) = 0.$$

Prosty dowód pomijamy.
Weźmy pod uwagę równanie

$$L_2x(t) = 0, \quad L_2 = D_t^n + \sum_{0}^{n-1} a_i(t)D^i \tag{7}$$

Niech

$$x_1(s), \ldots, x_n(s) \tag{8}$$

oznacza układ całek liniowo niezależnych równania (6) .
Niech

$$W(s) = W(x_1(s), \ldots, x_n(s))$$

oznacza wrońskian układu (8) . Niech M oznacza macierz

$$M = \begin{bmatrix} x_1(s), & \ldots\ldots\ldots\ldots, & x_n(s) \\ D_s x_1(s), & \ldots\ldots\ldots, & D_s x_n(s) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ D_s^{n-1} x_1(s), & \ldots\ldots, & D_s^{n-1} x_n(s) \\ x_1(s), & \ldots\ldots\ldots\ldots, & x_n(s) \end{bmatrix}$$

Funkcję

$$H(t,s) = W^{-1}(s)\det M$$

nazywamy funkcją Cauchy'ego dla równania (7) . Jak wiadomo [9] funkcja H spełnia następujące warunki:

$$L_2H(t,s) = 0 \text{ dla } (t,s) \in (t_1,t_2) \cap (t_1,t_2), \; t \neq s \tag{I}$$

$$D_t^i H(t,t) = 0, \; i = 0,1,\ldots,n-2 \tag{II}$$

$$D_t^{n-1}(t,t) = 1 \tag{III}$$

Funkcja Cauchy'ego dla równania $L_{1,j_1}L_{2,j_2}x(t) = 0$ gdzie

$$L_{1,j_1} = D_t^{j_1} + \sum_{0}^{j_1-1} p_i^1 \; t \; D_t^i$$

$$L_{2,j_2} = D_t^{j_2} + \sum_{0}^{j_2-1} p_i^2 \; t \; D_t^i$$

Niech

$$p_i^1(t) \in C(t_1,t_2) \quad \text{dla } i = 0,\ldots,j_1-1$$

$$p_i^2(t) \in C^{j_1}(t_1,t_2) \quad \text{dla } i = 0,\ldots,j_2-1$$

Niech

$$H_{2,j_2}(t,s),\; H_{1,j_1}(t,s)$$

oznaczają odpowiednio funkcje Cauchy'ego dla równań

$$L_{2,j_2}x=0,\; L_{1,j_1}x=0$$

przy założeniu, że współczynniki $p_i^k \in C^{j_2}(t_1,t_2)$, $i=0,\ldots,j_2-1$

Lemat 5. Funkcja

$$H(t,s) = \int_s^t H_{2,j_2}(t,s_1)H_{1,j_1}(s_1,s)\,ds_1$$

jest funkcją Cauchy'ego dla równania

$$L_{1,j_1}L_{2,j_2}x(t) = 0$$

Dowód. Obliczając kolejne pochodne otrzymujemy

$$D_tH(t,s)=H_{2,j_2}(t,t)H_{1,j_1}(t,s)+\int_s^t D_tH_{2,j_2}(t,s_1)H_{1,j_1}(s_1,s)ds_1=$$

$$=\int_s^t H_{1,j_1}(s_1,s)D_tH_{2,j_2}(t,s_1)ds_1$$

....

$$D_t^{j_2}H(t,s) = D_t^{j_2-1}H_{2,j_2}(t,t)H_{1,j_1}(t,s) +$$

$$+\int_s^t H_{1,j_1}(s_1,s)D_t^{j_2}H_{2,j_2}(t,s_1)ds_1 =$$

$$=\int_s^t H_{1,j_1}(s_1,s)D_t^{j_2}H_{2,j_2}(t,s_1)ds_1$$

Z poprzednich wzorów wynika, że

$$L_{2,j_2}H(t,s) = H_{1,j_1}(t,s) + \int_s^t H_{1,j_1}(s_1,s)L_{2,j_2}(t,s_1)ds_1 =$$

$$= H_{1,j_1}(t,s)$$

W konsekwencji otrzymujemy

$$L_{1,j_1}L_{2,j_2}H(t,s) = L_{1,j_1}H_{1,j_1}(t,s) = 0$$

Z poprzednich wzorów wynika, że

$$D_t^iH(t,t) = 0,\ i = 0,1,\dots,j_1+j_2-2,\ D_t^{j_2+j_1-1}H(t,t) = 0$$

dla $t\in(t_1,t_2)$

Niech $V(t) = \int_s^t H(t,s)F(s)ds$

Lemat 6. Jeżeli $F \in C([t_1, t_2])$, wówczas

$$L_{1,j_1} L_{2,j_2} V(t) = F(t)$$

Dowód. Na podstawie własności funkcji H mamy

$$L_{1,j_1} L_{2,j_2} V(t) = F(t) + \int_s^t F(s) L_{1,j_1} L_{2,j_2} H(t,s)\, ds = F(t)$$

Niech współczynniki p_i^k operatora L_{k,j_k} należą do klasy

$$C^{j_1+j_2+\ldots+j_{k-1}}(t_1, t_2), \quad i = 0, \ldots, j_k - 1$$

wówczas otrzymujemy

Lemat 7. Jeżeli funkcje $H_{k,j_k}(t,s)$, $k = n, \ldots, 2, 1$ są funkcjami Cauchy'ego operatorów L_{k,j_k}, $k = 1, \ldots, n$, wówczas funkcja Cauchy'ego dla równania $Lx = 0$ jest postaci

$$H(t,s) = \int_s^t H_{n,j_n}(t, s_{n-1}) \int_s^{t_{n-1}} H_{n-1,j_{n-1}}(s_{n-1}, s_{n-2}) \ldots$$

$$\ldots \int_s^{s_1} H_{2,j_2}(s_1, s_2) H_{1,j_1}(s_2, s)\, ds_2$$

Dowód. Stosując lematy 5, 6 otrzymujemy tezę lematu 7.

5. PRZYPADEK SZCZEGÓLNY ZAGADNIENIA CAUCHY'EGO

Weźmy pod uwagę równanie

$$L_1 L_2 x(t) = F(t), \quad t \in (t_1, t_2), \tag{1b}$$

$$L_i = D_t + p_i(t), \; i = 1,2, \; p_1 \in C(t_1, t_2), \; p_2 \in C^1(t_1, t_2),$$

$$F \in C(t_1, t_2)$$

Zakładamy, że rozwiązanie $x(t)$ spełnia warunki początkowe

$$D_t^i x(t_0) = 0, \; i = 0,1 \tag{2b}$$

Zagadnienie (1b),(2b) można zastąpić układem

$$L_2 x(t) = w, \; L_1 w(t) = F(t) \tag{1c}$$

$$x(t_0)=0, \; w(t_0) = D_t x(t_0) + p_2(t_0)x(t_0) = 0 \tag{2c}$$

Niech H_i, $i = 1,2$ oznaczają funkcje Cauchy'ego dla równań

$$L_i x = 0, \; i = 1,2.$$

Lemat 8. Rozwiązaniem zagadnień (1b),(2b) oraz (1c),(2c) jest funkcja

$$x(t) = \int_s^t H(t,s)F(s)ds, \; H(t,s) = \int_s^t H_2(t,s_1)H_1(s_1,s)ds_1 \tag{9}$$

Dowód. Na podstawie lematu 5 otrzymujemy tezę lematu 8.

6. TWIERDZENIE O JEDNOZNACZNOŚCI

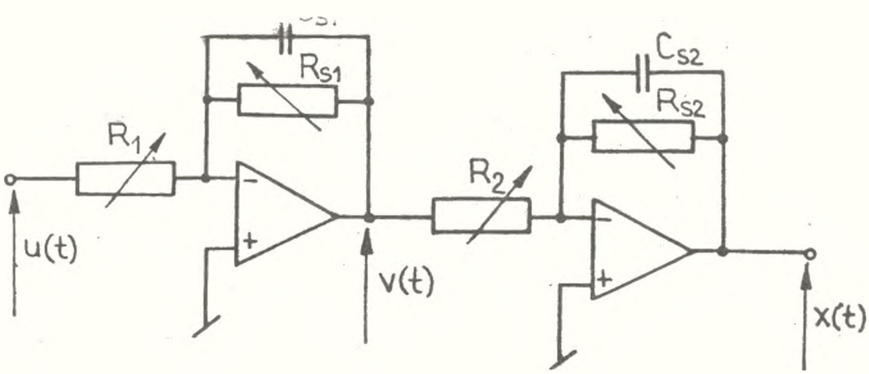
Na podstawie [9] (str. 199) zachodzi następujące twierdzenie o jednoznaczności.

Twierdzenie. Jeżeli współczynniki w równaniu (1) oraz funkcja u jest ciągła w przedziale (t_1,t_2), $t_0 \in (t_1,t_2)$, wówczas rozwiązanie zagadnienia (1) , (2) jest jedyne.

7. PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA

Przy pomocy przedstawionej metody konstrukcji rozwiązania równań różniczkowych rozpatrzymy zagadnienie wyznaczenia odpowiedzi kaskady o zmiennych parametrach złożonej z dwóch członów dynamicznych zbudowanych na bazie wzmacniaczy operacyjnych (rys.1). Ograniczenie liczby członów do dwóch wynika jedynie z dążności do uproszczenia obliczeń.

Przyjmiemy, że wzmacniacze te są idealne, jak również poszczególne człony charakteryzują się właściwościami elementów idealnych. Potencjometry w gałęziach sprzężeń odznaczają się charakterystykami liniowymi.



Rys.1 Kaskada dwóch członów dynamicznych

Poszczególne człony przy wyżej dokonanych założeniach, opisują następujące równania dynamiki

$$D_t + p_1(t)\, v(t) = - k_1(t) p_1(t) u(t) \tag{10}$$

$$D_t + p_2(t)\, x(t) = - k_2(t) p_2(t) v(t) \tag{11}$$

gdzie $k_1(t) = \dfrac{R_{s1}(t)}{R_1(t)}$ $\qquad k_2\ t = \dfrac{R_{s2}(t)}{R_2(t)}$

$T_1(t) = R_{s1}(t) C_{s1}$ $\qquad T_2(t) = R_{s2}(t) C_{s2}$

$p_1(t) = \dfrac{1}{T_1(t)}$ $\qquad p_2(t) = \dfrac{1}{T_2(t)}$

Po złożeniu równań (10) i (11) otrzymujemy

$$\left(D_t + p_1(t)\right)\left(D_t + p_2(t)\right)x(t) = k_1(t)k_2(t)p_1(t)p_2(t)u(t) \quad (12)$$

lub

$$L_1 L_2 x(t) = F(t)$$

gdzie $L_1 = D_t + p_1(t)$, $L_2 = D_t + p_2(t)$,

$$F(t) = k_1(t)k_2(t)p_1(t)p_2(t)u(t)$$

Na podstawie (6) i (8) mamy

$$H_1(s_1, s) = \exp\left(-\int_s^{s_1} p_1(\tau)\,d\tau\right)$$

$$H_2(t, s_1) = \exp\left(-\int_{s_1}^{t} p_2(\tau)\,d\tau\right)$$

$$H(t, s) = \int_s^t H_2(t, s)\,H_1(s_1, s)\,ds_1$$

$$x(t) = \int_s^t H(t, s)\,F(s)\,ds$$

przy czym $(t, s) \subset (t_1, t_2)$ oraz $t > s$

W wariancie pierwszym przyjmiemy, że dokonano zmiany wzmocnienia układu za pomocą liniowego potencjometru R_1 przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów. Niech przykładowo

$$R_{s1} = R_{s2} = 1\,M\Omega\,; \quad C_{s1} = C_{s2} = 1\,\mu F;$$

$$R_1(t) = 1 \cdot t\ M\Omega \quad \text{w przedziale } (t_1, t_2)\ , \quad R_2 = 1\,M\Omega$$

$$u(t) = t\ , \quad \text{w przedziale } (t_1, t_2)$$

mamy

$p_1(t) = p_2(t) = 1; \; k_1(t) = 1/t$ w przedziale (t_1,t_2), $k_2=1$

oraz

$$H_1(s_1,s) = \exp(-\int_s^{s_1} d\tau) = \exp(s - s_1)$$

$$H_2(t,s_1) = \exp(-\int_{s_1}^{t} d\tau) = \exp(s_1 - t)$$

$$H(t,s) = \int_s^t \exp(s_1 - t)\exp(s - s_1)\,ds_1 = (t - s)\exp(s - t)$$

$F(t) = 1$ w przedziale (t_1,t_2)

$$x(t) = \int_s^t (t - s)\exp(s - t)ds =$$

$$= \exp(-t)\left[t(\exp(t) - \exp(s)) - (t - 1)\exp(t) + (s - 1)\exp(s)\right]$$

Dla $s = 0$ otrzymujemy

$$x(t) = 1 - \exp(-t) - t\exp(-t)$$

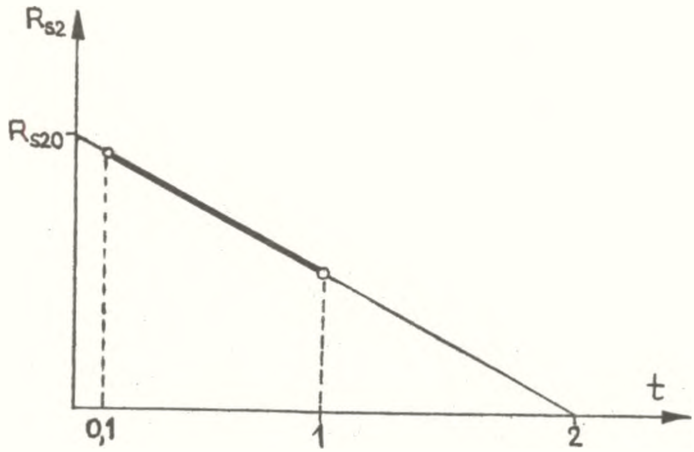
Otrzymane rozwiązanie spełnia warunki początkowe

$$x(0) = 0, \quad D_t\{x(0)\} = 0$$

W wariancie drugim przyjmiemy natomiast, że dokonano zmiany stałej czasowej drugiego członu przez liniową zmianę rezystancji (rys.2) według zależności

$$R_{s2} = R_{s20}(1 - \alpha t)$$

dla $t \in (t_o,t_k)$



Rys.2.

Niech przykładowo

$$R_{s1} = 1\mathrm{M}\Omega\ ,\ R_{s2} = \left(1 - \frac{1}{2}\,t\right)\mathrm{M}\Omega \quad \text{w przedziale } (0{,}1;1)$$

$$C_{s1} = C_{s2} = 1\,\mu\mathrm{F},\quad R_1 = R_2 = 1\mathrm{M}\Omega$$

$$u(t) = 1 \quad \text{w przedziale } (0{,}1;1)$$

$$T_1 = R_{s1}C_{s1} = 1\mathrm{s} \quad T_2 = R_{s2}C_{s2} = \left(1 - \frac{1}{2}t\right)\mathrm{s}$$

$$p_1 = 1\ \mathrm{s}^{-1},\ p_2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\,t}\ \mathrm{s}^{-1} \quad \text{w przedziale } (0{,}1;1)$$

$$k_1(t) = 1,\quad k_2 = 1 - \frac{1}{2}\,t \quad \text{w przedziale } (0{,}1;1)$$

Na podstawie (12) otrzymujemy

$$(D_t + 1)\left(D_t + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\,t}\right) x(t) = 1$$

W rozpatrywanym przedziale współczynniki $p_1(t)$, $p_2(t)$ operatorów odpowiednio L_1, L_2 spełniają założenia. Rozwiązanie otrzymuje się w sposób analogiczny jak poprzednio.

LITERATURA

[1] Cannon R.H.Jr.: Dynamics of physical systems. McGraw-Hill, New York, 1967

[2] Chen W.H.: The analysis of linear systems. McGraw-Hill, New York, 1964

[3] Cheng D.K.: Analysis of linear systems. Reading Mass., Addison Wesley, 1959

[4] D'Alessandro P., Isidori R., Ruberti A.: Equivalence Transformations in linear dynamical systems. Int. J.Systems Science, Vol.2, 1971, p.177-178

[5] Jaracz K. Wachnicki E.: Metoda równań różniczkowych niezależnych analizy układów liniowych. Zn AGH, Elektrotechnika, Nr 955, t.2, z.4, Kraków 1983, s.367-378

[6] Jaracz K., Wachnicki E.: Metoda faktoryzacji równań różniczkowych n-tego rzędu w zastosowaniu do analizy układów liniowych. Przypadek czynników różniczkowych o wielokrotnych pierwiastkach wielomianu charakterystycznego. RND WSP, Prace techniczne III, Z.98, Kraków, 1985, s.39-49

[7] Kaczorek T.: Teoria wielowymiarowych układów dynamicznych liniowych. WNT, Warszawa, 1983

[8] Kalman R.E.: Mathematical description of linear dynamical systems. SIAM J. on Control, 1963, p.152-192

[9] Kołodziej W.: Analiza matematyczna. PWN, Warszawa, 1983

[10] Ogata K.: Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania. WNT, Warszawa, 1974

[11] Pieniążek A.: On Cauchy function for artain class of ordinary differential equations with factorised operators, ZN PK, Kraków (w druku)

Felisk Barański   Kazimierz Jaracz

Das Problem von Cauchy für faktorzerlegunge gewöhnliche Differentialgleichungen und ihre Anwendung zur Analyse von linearen Systemen.

Zusammenfassung

In der Arbeit wurde die Methode der Analyse von linearen nichtstationären Systemen dargestellt, die auf der Anwendung Cauchyfunktion beruhen.
Es wurde die Möglichkeit der Anwendung dieser Methode in der Theorie von linearen Systemen gezeigt.