Anna K. Żeromska

METODOLOGIA MATEMATYKI JAKO PRZEDMIOT BADAŃ ANTROPOMATEMATYCZNYCH

Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Pedagogicznego Kraków

METODOLOGIA MATEMATYKI
JAKO PRZEDMIOT BADAŃ
ANTROPOMATEMATYCZNYCH

Uniwersytet Pedagogiczny
im. Komisji Edukacji Narodowej
w Krakowie

Prace Monograficzne 666

Anna K. Żeromska

METODOLOGIA MATEMATYKI JAKO PRZEDMIOT BADAŃ ANTROPOMATEMATYCZNYCH

Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Pedagogicznego Kraków 2013

Recenzenci
prof. nzw. dr hab. Maria Korcz
dr hab. Ewa Swoboda

projekt okładki Janusz Schneider

ISSN 0239-6025
ISBN 978-83-7271-823-5

Wydawnictwo Naukowe UP
Redakcja/Dział Promocji
30-084 Kraków, ul. Podchorążych 2
tel./faks 12 662-63-83, tel. 12 662-67-56
e-mail: wydawnictwo@up.krakow.pl

Zapraszamy na stronę internetową:
http://www.wydawnictwoup.pl

druk i oprawa
Zespół Poligraficzny UP, zam. 43/13

Wstęp

Niniejsza monografia stanowi próbę syntetycznego przedstawienia rozważań teoretycznych oraz wyników badań dydaktycznych, prowadzonych przeze mnie w latach 1998–2012, przedmiotem których był proces nauczania i uczenia się matematyki (na wszystkich poziomach tego nauczania). Wiedza na temat tego procesu wciąż wymaga uzupełnień, a w kontekście rozmaitych zmian kulturowych i socjologicznych na świecie pojawiają się nowe, nie do końca nawet ściśle określone obszary, które należałoby objąć badaniami dydaktycznymi. Mam nadzieję, że właśnie jednego z nich dotyka tematyka niniejszej monografii.

Praca adresowana jest przede wszystkim do zainteresowanych badaniami w zakresie dydaktyki matematyki oraz do zajmujących się kształceniem przyszłych i doskonaleniem czynnych nauczycieli matematyki. Adresatami są także sami nauczyciele, którzy być może po przeczytaniu tej pozycji inaczej spojrzą na własną praktykę.

W obliczu kryzysu edukacji matematycznej w Polsce i na świecie rozważania i wyniki badań, których dotyczy niniejsza praca, znajdują uzasadnienie. Praktyka oraz badania dydaktyczne pokazują wiele niedostatków w dziedzinie nauczania i uczenia się matematyki, i to na różnych płaszczyznach tego procesu, czasem stosunkowo odległych od samej matematyki. Wciąż otwarte pozostaje pytanie o przyczynę takiego stanu rzeczy, a dywagacje na ten temat wskazują na konieczność pewnych przewartościowań w ujmowaniu edukacji matematycznej w wymiarze jednostkowym i społecznym.

Zasadnicza przyczyna wspomnianych niedostatków ma zapewne genezę w naturze i istocie wiedzy, będącej w tym przypadku przedmiotem nauczania szkolnego. Matematyka jest jednym z trudniejszych przedmiotów nauczania, a trudność tę znacząco pogłębia ogólnie panujący pogląd, że wiedza matematyczna dostępna jest jedynie garstce wybranych. Matematyka bywa nierzadko narzędziem selekcji uczniów, a czasem wręcz ich szykanowania. Nic zatem dziwnego, że obserwujemy niepokojący spadek zainteresowania matematyką i postępujący zanik motywacji do uczenia się tego przedmiotu w szkole.

Można oczywiście próbować przekonywać uczniów, że matematyka jest interesująca (czyżby?), że jest użyteczna w praktyce (czy na pewno każdy jej używa?), że uczenie się matematyki rozwija logiczne myślenie (czy ktoś to bezspornie udowodnił?) itd. Uczniowie – gdyby byli odważniejsi – powiedzieliby nam zapewne, że to, co o matematyce wiedzą z nauczania szkolnego, często przeczy tym tezom. Niektórzy studenci studiów matematycznych czasem mówią o tym zupełnie otwarcie. Matematyka, z którą spotykają się w trakcie nauczania akademickiego, często nie jest ani interesująca, ani powszechnie aplikowana w praktyce, ani też nie rozwija myślenia, no może czasami pamięć (bo bywa, że studenci uczą się matematyki na pamięć!).

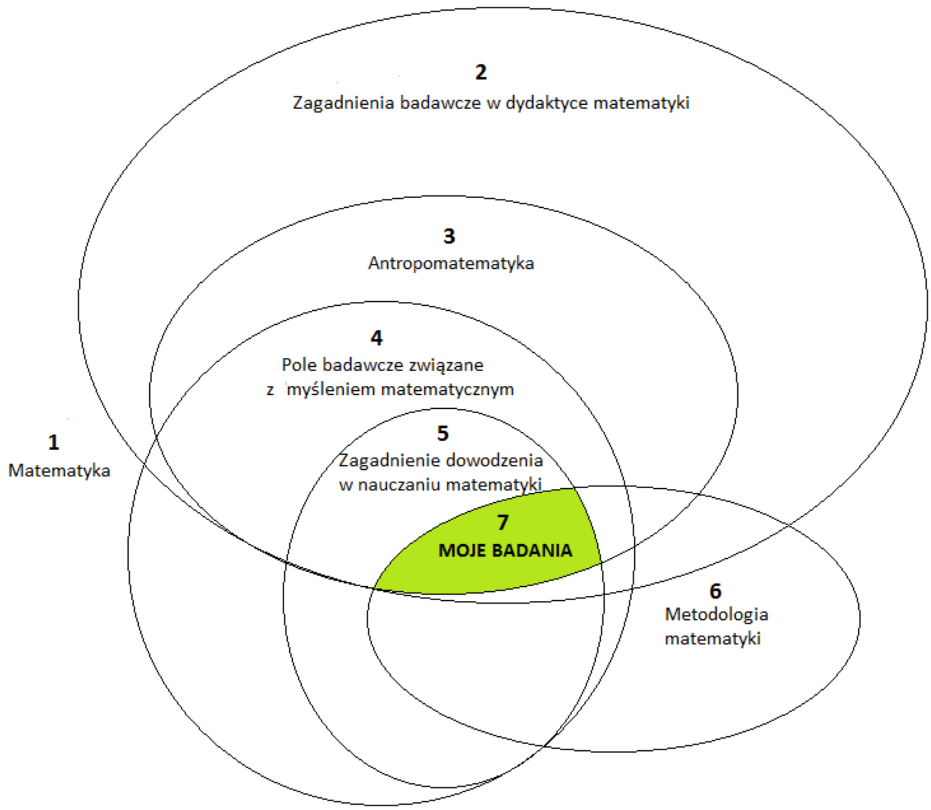
Niniejsza praca dotyczy jednego z ważniejszych komponentów wiedzy i umiejętności matematycznych uczniów, jakim jest dowodzenie, wyjaśnianie i argumentowanie, niezbędnych elementów wchodzących w skład matematycznej metodologii. To metodologia stanowi przecież o charakterystycznym sposobie powstawania i konstytuowania się wiedzy matematycznej. Ogół aktualnych i potencjalnych umiejętności uczniowskich związanych ze wspomnianymi zagadnieniami uznaję za symptom kompetencji uczących się, którą można nazwać prowadzeniem rozumowań uzasadniających.

Praca nie stanowi komplementarnej diagnozy przyczyn niedostatków w wiedzy uczniowskiej w poruszanym zakresie, nie daje też wyczerpującej odpowiedzi na pytanie, jakie należy podejmować próby terapeutyczne. Głównym jej celem jest przedstawienie problemu w nowej perspektywie, poprzez pryzmat *antropomatematyki*, której istotę tu określam. Ideą przewodnią moich dociekań jest potrzeba głębokiego zrozumienia uwarunkowań procesu nauczania-uczenia się w kontekście metodologii matematycznej. Ważnym powodem była też paląca potrzeba humanizacji obrazu matematyki w jej szkolnym ujęciu, a co za tym idzie złagodzenie często negatywnego odbioru społecznego tej gałęzi wiedzy. Refleksje i fakty będące przedmiotem opisu w tej książce mogą stanowić przyczynek do rozważań na temat koniecznych przeobrażeń w teoretycznym i praktycznym podejściu do kształtowania elementów metody matematycznej w szkolnym nauczaniu.

Na pracę składa się wstęp, 7 rozdziałów głównych oraz część zatytułowana *Kierunki dalszych badań*. Cztery pierwsze rozdziały zawierają teoretyczne zarysowanie problematyki dydaktycznej, do której odnoszą się moje badania własne. Umieszczenie tych rozważań uważam za celowe, gdyż odwzorowują proces krystalizowania się pola badawczego nazwanego przeze mnie antropomatematyką. Temu celowi służy struktura opisu wyniku wspomnianej krystalizacji, a przedstawia ją schemat 1.

Rozważania rozpoczynam od refleksji odnoszących się do istoty, roli, możliwości i ograniczeń badań naukowych w dydaktyce matematyki. Tego rodzaju uwagi uważam za ważne i potrzebne z punktu widzenia badacza oraz czytelnika. Prowadzenie badań w dydaktyce matematyki jest bowiem uwarunkowane wieloma czynnikami, jest specyficznie trudną działalnością naukową. Musi uwzględniać szalenie istotną odrębność zagadnień będących w centrum zainteresowań dydaktyki matematyki oraz samej matematyki. Refleksje na ten temat są przedmiotem opisu w rozdziale pierwszym.

Tak, jak to przedstawia schemat 1, spektrum zagadnień badawczych zawężam następnie do wyodrębnionego przeze mnie obszaru 3, który nazwałam antropomatematyką, a szczegółowy opis tego obszaru czytelnik znajdzie w rozdziale drugim. Z przedstawionych tam objaśnień wynika podstawowe dla mnie założenie, iż matematyka jest ściśle związana z człowiekiem, wyznacza sposób jego myślenia w trakcie specyficznego procesu poznawczego.



Schemat 1. Określenie wyjściowej pozycji badawczej

Kolejnym zagadnieniem, które poddaję rozważaniom w trzecim rozdziale, jest metodologia matematyki i jej rola w funkcjonowaniu matematyki (obszar 6), a następnie dokonuję przeniesienia tej tematyki na płaszczyznę edukacji matematycznej (obszar 5). Dociekania dotyczące odniesień do obszarów 5 i 6 przedstawiane są już z antropomatematycznego punktu widzenia, a ich założenia rozwijam w czwartym rozdziale. Wynikiem procesu zawężania spektrum badawczego jest zamieszczony w rozdziale piątym opis przyjętej pozycji badawczej, umiejscowiony w obszarze 7.

Rozdziały szósty i siódmy mają charakter doniesień z moich badań własnych. Całość uzupełnia opis planowanych w przyszłości badań i dociekań, aneks zawierający niektóre tematy zadań używanych jako narzędzia badawcze oraz spis literatury wykorzystanej w trakcie pisania tej pracy.

Rozdział 1

Badania nad nauczaniem–uczeniem się matematyki

Ciągle nieustalony status dydaktyki matematyki jako dyscypliny naukowej implikuje potrzebę dyskusji i rozważań o trendach i wynikach badań w dziedzinie edukacji matematycznej (Sierpińska, Kilpatrick 1998)[1]. Taka sytuacja bywa źródłem pewnych nieporozumień, szczególnie pomiędzy badaczami w dydaktyce matematyki a odbiorcami wyników tych badań. Powodem tych nieporozumień jest między innymi brak jednoznacznej odpowiedzi na otwarte i dyskusyjne pytania o naturę i moc wiedzotwórczą wyników badań nad nauczaniem-uczeniem się matematyki. Takie pytania zadaje sobie każdy (a szczególnie początkujący) badacz w dziedzinie dydaktyki matematyki, a także niejednokrotnie zadają je sobie odbiorcy rezultatów badań dydaktycznych (np. inni badacze i nauczyciele). Odpowiedzi na pytania tego typu są trudne z kilku powodów, o których będę mówić później.

Ważnym powodem zaproszenia Czytelnika do lektury tego rozdziału jest próba takiego zarysowania szerokiego kontekstu zagadnień związanych z badaniami w dydaktyce matematyki, aby potem jasne i zasadne okazało się nakreślenie przeze mnie pola badawczego, które nazywam antropomatematyką oraz przyjęcie przy tym określonej pozycji badawczej.

1.1. Specyfika badań w dydaktyce matematyki

Powodem aktualności rozważań dotyczących natury i aplikowalności wyników badań w dydaktyce matematyki jest między innymi fakt, że choć istnieje wiele poglądów i opinii na temat tego, co szkolna edukacja matematyka powinna zapewnić (i dlaczego), wszystkie te poglądy łączy leżąca u ich podstaw wiara, że dobre wykształcenie w zakresie matematyki przynosi korzyści zarówno jednostkom, jak i całym społeczeństwom. Korzyści te obejmują pewne wspólne wartości, np. wzmocnienie po-

[1] Autorzy próbują udzielać częściowych odpowiedzi na inne jeszcze pytania (niebędące przedmiotem rozważań w niniejszej pracy), np. „Co to znaczy być naukowcem w dziedzinie dydaktyki matematyki? Czy dydaktycy matematyki mają jakąś wspólną tożsamość? Jaka jest rola teorii w badaniach w dydaktyce matematyki?". Te kwestie są wciąż otwarte i czasem problematyczne, były one dominującymi tematami światowych konferencji International Group Psychology of Mathematics Education w latach 1990–2001 (Lerman 2001).

zycji społecznej jednostki, nabycie umiejętności logicznego myślenia umożliwiającej podejmowanie słusznych życiowych decyzji, krytycyzmu w myśleniu, precyzyjności wypowiedzi itp. Dobrze zaplanowana i prawidłowo realizowana edukacja matematyczna powinna przynosić również inne praktyczne skutki, takie jak wewnętrzny rozwój samej matematyki jako dziedziny naukowej oraz wsparcie naukowe w społecznych przedsięwzięciach o zróżnicowanym zakresie (np. związanych z biznesem). Dlatego zagadnienia związane z planowaniem i monitorowaniem przebiegu społecznego i powszechnego procesu nauczania-uczenia się matematyki mają tak ogromne znaczenie zarówno dla poszczególnych osób, jak i całego społeczeństwa.

Badania w zakresie dydaktyki matematyki mają swoją wieloletnią już historię. Stanowią część szeroko pojmowanych badań edukacyjnych, zwanych czasem pedagogicznymi lub dydaktycznymi. Od początku jednak w badaniach w zakresie dydaktyki matematyki dążono do nadania im własnej tożsamości na tle badań pedagogicznych (Krygowska 1982). Kluczowym zagadnieniem dla dociekań w zakresie dydaktyki matematyki jest teoretyczne określenie i praktyczne zaimplementowanie szerokiego spektrum warunków determinujących pożądane skutki edukacji matematycznej. Podkreślmy w tym miejscu wyraźnie, że nie tylko kryteria praktycznych (szkolnych) zastosowań wyników badań, o których mowa, są „motorem" napędzającym rozwój badań w dydaktyce matematyki, jak być może sądzą niektórzy odbiorcy tych wyników. W szczególności bowiem niektórzy autorzy sugerują odróżnianie dydaktyki matematyki zdefiniowanej jako

> *naukowo-akademicka dziedzina badań, która ma na celu zidentyfikowanie, scharakteryzowanie i zrozumienie zjawiska: proces nauczania i uczenia się matematyki,*

od edukacji matematycznej pojmowanej jako

> *złożony i heterogeniczny system społeczny, który obejmuje teorię, rozwój i praktykę w zakresie nauczania i uczenia się matematyki* (Sierpińska, Kilpatrick 1998, s. 529).

Zgodnie z tym poglądem edukacja matematyczna obejmuje dydaktykę matematyki jako pewien swój podsystem. Takie rozróżnienie jest owocne, zwraca uwagę na wyróżniające cechy badań teoretycznych w dydaktyce matematyki, zwanych badaniami podstawowymi (Krygowska 1982; Schoenfeld 1991), mającymi na celu zrozumienie i opisanie interesujących dydaktykę matematyki zjawisk, nieukierunkowanych bezpośrednio i głównie na praktykę nauczania.

Podstawowa trudność, jaka pojawia się przed badaczami w interesującej nas dziedzinie dociekań naukowych, jest związana z faktem, że większość badań edukacyjnych ma z natury charakter interdyscyplinarny. Powoduje to, że zaplanowanie ich metodologii oraz zrozumienie wyników jest często trudne. Nawet eksperci z poszczególnych składowych dziedzin naukowych mogą odczuwać pewne trudności w ocenie wartości tych badań, ich wiedza bowiem ograniczona jest zwykle do własnej dyscypliny. Można sobie przecież łatwo wyobrazić pedagoga, który może mieć problem ze zrozumieniem kontekstu matematycznego badania dydaktycznego, jak i matematyka, który nie zna terminologii i nie rozumie kategorii wiedzy pedagogicznej.

Poruszone zagadnienie interdyscyplinarności w badaniach z dydaktyki matematyki bardziej jeszcze komplikuje fakt stwierdzony przez E. Wittmanna:

> *dydaktyka matematyki musi przekraczać granice innych nauk i jest zależna od wyników i metod pochodzących z bardzo różnorodnych dziedzin nauki, m. in. matematyki, pedagogiki, socjologii, psychologii i historii nauki. Jednak wiedzy naukowej dotyczącej nauczania matematyki nie można uzyskać przez proste zebranie w jedno wyników tamtych nauk; niezbędne jest specyficzne podejście matematyczno-dydaktyczne, integrujące różne aspekty w jeden spójny i wyczerpujący obraz nauczania matematyki i pozwalające na konstruktywne wykorzystanie tej wiedzy w praktyce* (1989, s. 104).

Oznacza to, że specyficzne podejście matematyczno-dydaktyczne obejmuje również potrzebę wypracowania własnej metodologii i narzędzi badawczych (Kratochvílová, Swoboda 2002) oraz połączenie wielopłaszczyznowych podejść badawczych przy analizie wyników badań dydaktycznych, uwzględniających wszelkie możliwe ich aspekty, ze szczególnym uprzywilejowaniem aspektów matematycznych i z zakresu dydaktyki matematyki. Wielu innych autorów również podkreśla interdyscyplinarność dydaktyki matematyki jako dziedziny badań i jej konieczne relacje z innymi dziedzinami naukowymi (np. Krygowska 1982; Steiner 1985; Biehler, Scholz, Straesser, Winkelmann 1994; Godino, Batanero 1998; Konior 1998, Nowecki 1999; Żeromska 2010a).

Najbardziej chyba skomplikowana i czasem wręcz kontrowersyjna jest współzależność dydaktyki matematyki z samą matematyką, jej dziedziną „macierzystą". Historia rozwoju dydaktyki matematyki jest bardzo krótka w porównaniu z wielowiekową ewolucją matematyki. Jednakże odkąd człowiek zaczął obserwować swoje przyrodnicze otoczenie, komunikować się z innymi ludźmi oraz wytwarzać i wymieniać dobra materialne, a w konsekwencji dokonywać pewnych syntez konkretnej wiedzy (co datuje się od czasów prehistorycznych do VII–VI w p.n.e., tzw. okres narodzin matematyki), fakt użyteczności tej wiedzy w codziennym życiu nieuchronnie powodował potrzebę jej upowszechniania i przekazywania młodszym pokoleniom. Od takiej potrzeby niedaleko już do pytań, w jaki sposób najskuteczniej tę wiedzę przekazywać. A zatem

> *matematyki od nauczania oderwać się nie da* (Duda 1989, s. 40).

Potrzeba przekazywania matematycznej wiedzy nieuchronnie rodzi pytanie o najbardziej efektywny sposób tego przekazu, a zakres takich rozważań wykracza już poza samą matematykę i ociera się o inne dziedziny nauki, takie jak pedagogika, psychologia, socjologia, historia, epistemologia, semiotyka, kognitywistyka itd. Pojawia się przecież w konsekwencji pytanie o przebieg, uwarunkowania oraz skutki skomplikowanych procesów poznawczych i edukacyjnych człowieka i to w kontekście jednej z trudniejszych dziedzin tego poznania, jaką jest matematyka (Żeromska 2010a).

Aby odpowiedzieć na zasadnicze pytanie: czy i jak matematyki uczyć lepiej, potrzebne jest porozumienie pomiędzy wieloma (m.in. wspomnianymi wyżej) dyscyplinami naukowymi, zwłaszcza pomiędzy dydaktyką matematyki a samą matematyką. Należy pamiętać jednak, jak trudne są warunki takiego porozumienia. Obie nauki zasadniczo przecież się różnią, w szczególności według naukoznawczych kryteriów podziału nauk. Jedna z klasyfikacji dyscyplin naukowych określa, że

> *nauki dzieli się zwykle wedle: 1) przedmiotu badań […]; 2) metody badań; 3) rodzaju stawianych problemów; 4) zadań i celów, jakie sobie stawiają; 5) stopnia ogólności, abstrakcji i prostoty;* (Such 1969, s. 40).

Pamiętajmy również, iż

> *wymienione kryteria są ze sobą ściśle związane i wzajemnie uwarunkowane. Od przedmiotu badań zależą w dużym stopniu wszystkie pozostałe kryteria* (Such 1987, s. 300).

Jeśli zatem to przedmiot badań danej dyscypliny jest głównym wskaźnikiem jej tożsamości, to zauważmy, jak wielka przepaść dzieli w tym względzie matematykę i dydaktykę matematyki. Szczególnie że wyróżnia się dwie grupy wszystkich dziedzin naukowych: nauki przyrodnicze (badające zjawiska otaczającej rzeczywistości fizycznej) oraz nauki społeczne (badające człowieka i jego życie społeczne).

Przedmiot badań dydaktyki matematyki Z. Krygowska określiła następująco:

> *dydaktyka matematyki jest nauką, której problematyka obejmuje wszelkie zagadnienia związane z uczeniem się i nauczaniem matematyki* (Krygowska 1982, s. 17)[2].

W innym opracowaniu czytamy, że

> *przedmiotem badań w dydaktyce matematyki może być np. nauczanie matematyki, uczenie się matematyki, sytuacje nauczania-uczenia się, sytuacje dydaktyczne, związki między nauczaniem-uczeniem się a wiedzą matematyczną, rzeczywistość szkolnej lekcji matematyki, społeczne widzenie matematyki i jej nauczania czy też system kształcenia sam w sobie* (Balacheff i in. 1993, s. 119).

---

[2] Określenie Z. Krygowskiej jest uszczegółowione i uzupełnione innymi poglądami światowych dydaktyków matematyki w jej artykule pt. *Główne problemy i kierunki badań współczesnej dydaktyki matematyki* (1982).

Natomiast

> *matematyka jest w pewnym sensie nauką bezprzedmiotową w tym znaczeniu, że jej przedmiotem badania nie jest żaden realnie i niezależnie od człowieka istniejący przedmiot* (Such 1969, s. 316).

Powyższy pogląd jest oczywiście w pewnym sensie uproszczony, zakłada on bowiem, że przedmiot każdej nauki powinien w mniejszym lub większym stopniu dotyczyć człowieka. Jeśli natomiast zacytujemy inne stwierdzenie odnoszące się do przedmiotu zainteresowań matematyki, to czytamy, że matematyka to

> *nauka o liczbach i stosunkach przestrzennych*[3]

lub

> *nauka o abstrakcyjnych obiektach, takich jak liczby, punkty, linie czy funkcje, oraz o związkach między nimi*[4].

Przedmiotem badań matematyki są więc stosunki ilościowe i inne relacje zachodzące pomiędzy odpowiednio definiowanymi matematycznymi obiektami natury abstrakcyjnej.

Niezaprzeczalnie zatem można stwierdzić, że jeśli to właśnie w naturze przedmiotu, jakim zajmuje się dana nauka, naukoznawcy upatrują głównego kryterium różnicującego poszczególne nauki między sobą, matematyka i jej dydaktyka leżą na odrębnych krańcach wszelkich klasyfikacji tego typu[5].

Równie wyraźna odrębność wynika z kolejnej charakterystycznej cechy nauki (ujmowanej jako proces zdobywania wiedzy), jaką jest zdaniem J. Sucha metoda, którą dana nauka stosuje w swoich badaniach wiedzotwórczych:

> *tym większa różnica pomiędzy dyscyplinami naukowymi, im większe różnice w stosowanych przez nie metodach* (1969, s. 54).

Zdaniem większości naukoznawców istnieją tylko dwie główne metody stosowane w naukach – indukcyjna i dedukcyjna – co implikuje następujący podział nauk (na dwie nierówne grupy) ze względu na stosowane w nich metody:

1. nauki formalne (dedukcyjne), czyli logika i matematyka,
2. nauki empiryczne (indukcyjne), w tym nauki przyrodnicze i nauki humanistyczno-społeczne.

---

[3] Sobol E. (oprac.) 2005, *Słownik języka polskiego PWN*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, s. 447.

[4] Bańko M. (red.) 2000, *Inny słownik języka polskiego PWN*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, s. 831.

[5] To kategoryczne stwierdzenie można złagodzić, przypominając, że dydaktyka matematyki korzysta czasem z metod ściśle matematycznych (odnosząc się np. do twórczości matematycznej) (Krygowska 1981).

Ten podział wydaje się być ścisły i całkowicie dyferencjujący. Z pozoru bezspornym przecież wydaje się fakt, że logika i matematyka posługują się głównie – jeśli nie jedynie – metodą dedukcyjną. Nie wszyscy matematycy są jednak aż tak rygorystyczni w swoich poglądach. Np. von Neumann uważa, że w matematyce mamy pewną swobodę w konstruowaniu teorii (o wiele większą niż mają ją na przykład fizycy-teoretycy), ale konstruowanie matematycznych teorii odbywa się nie tylko na drodze formalnej, interweniują też w tym elementy natury filozoficzno-empirycznej (von Neumann, za: Krygowska 1981). Przypomnijmy również często przytaczany pogląd filozofa matematyki I. Lakatosa, który opisując metodologię matematyki próbował wykazać, że rozwój teorii matematycznych podlega regułom w dużej mierze analogicznym do reguł rozwoju nauk empirycznych[6]. Formalnym teoriom matematycznym (matematyka czysta) towarzyszą teorie nieformalne (matematyka stosowana). Te pierwsze stawiają śmiałe hipotezy, te drugie zaś dostarczają kontrprzykładów, co zmusza matematyków do poszukiwania w swych systemach ukrytych założeń odpowiedzialnych za ujawnione luki. Te założenia modyfikuje się następnie tak, aby kontrprzykłady przekształcić w przykłady, co powodować powinno doskonalenie całego systemu. Takie podejście Lakatos określa mianem quasi-empirycznego i w ten sposób pytanie o naturę matematyki zamienia na pytanie o naturę teorii nieformalnych. Jeśli przyjąć przedstawiony wyżej pogląd, wówczas założenie, że matematyka jest teorią jedynie formalną, nie byłoby słuszne. Wtedy matematykę trzeba sytuować oczywiście w grupie nauk formalnych, jednak ze sporadycznym wpływem metodologii nauk empirycznych.

W badaniach z zakresu dydaktyki matematyki znaleźć można natomiast zarówno badania empiryczne (prowadzone metodami indukcyjnymi), jak i rozważania teoretyczne, choć tych drugich jest zdecydowanie mniej. Można stwierdzić, że dydaktyka matematyki posługuje się głównie empirycznymi metodami badawczymi, aczkolwiek

> *konieczność posiłkowania się metodami ścisłej matematyki stawia dydaktykę matematyki na granicy nauk empirycznych i formalnych* (Konior 1998, s. 50).

Tak czy inaczej, rozziew pomiędzy tymi dwiema dziedzinami w odniesieniu do stosowanej przez nie metodologii wydaje się bardzo istotny[7].

Równie niebagatelny wpływ na podkreślanie rozbieżności pomiędzy matematyką a jej dydaktyką mają relacje między dwiema społecznościami: matematyków i dydaktyków matematyki. Ogólnie rzecz biorąc, matematycy uprawiający matematykę czystą uważają się za strażników teoretycznej natury matematyki, dydaktycy traktowani są natomiast jako badacze potrzeb oraz trudności uczniów i nauczycieli, a zatem funkcjonujący poza granicą tej elitarnej dyscypliny. Obserwator z zewnątrz mógłby

[6] Te poglądy I. Lakatos (1995) przedstawił w słynnej pracy pt. *Proofs and Refutations.*

[7] Szersze rozważania na temat podobieństw i różnic dydaktyki matematyki i innych dziedzin (pod względem naukoznawczym) czytelnik znajdzie w artykule pt. *Dydaktyka matematyki na tle nauk o edukacji* (Żeromska 2010a).

powiedzieć, że przyglądamy się tu grze, gdzie dwie społeczności graczy bronią (możemy mieć nadzieję, że w dobrej wierze) swoich ideologicznych pozycji. Odmienność tych pozycji niewątpliwie ma swoje źródło w przytaczanych wcześniej kryteriach metanaukowych. Jednakowoż każda odrębność nierozerwalnie niesie ze sobą pytanie o istnienie sfer łączących, podyktowane koniecznością obopólnych zysków z koegzystencji. Instytucjonalnie matematycy powinni być przecież zainteresowani dobrymi wynikami w kształceniu matematycznym przyszłych pokoleń, choćby po to, aby szkolić kolejnych profesjonalistów w tej dziedzinie. Korzyści mogą być też odczuwalne w funkcjonowaniu i działalności samych matematyków, co niektórzy z nich wyraźnie podkreślają. W pracy *On proof and progress in mathematics* W. Thurston (1994) rozważa kwestie dotyczące tego, jak matematycy mogą pomóc w ulepszeniu zrozumienia matematyki oraz w sposób ogólny zarysowuje perspektywę zagadnień dotyczących sposobów rozumienia i myślenia o matematyce. Przyznaje, iż istnieje cała lista różnych sposobów myślenia o danym pojęciu matematycznym oraz dróg przebiegu procesu powstawania tego pojęcia w umyśle człowieka. Podkreśla, że jest to lista o wiele bogatsza od zestawienia różnych logicznych definicji takiego obiektu. Tego bogactwa – zdaniem Thurstona – nie wolno pomijać, może być ono źródłem wiedzy o sposobach matematycznego myślenia człowieka. Autor pisze:

> *ludzkie myślenie i rozumienie nie funkcjonują jednotorowo jak komputer. Nasze mózgi i umysły wydają się być zorganizowane jako system różnie sprzężonych i potężnych obiektów. Części tej struktury współpracują ze sobą luźno, mówią do siebie na wysokim poziomie organizacji* (Thurston 1994, s. 164).

W związku z tym, podkreśla Thurston, przeniesienie zrozumienia z jednej osoby na drugą, której dane zagadnienie jest przedstawiane, nie jest automatyczne. Trzeba w tym celu używać rozmaitych sposobów i „sztuczek", tak różnych, jak różnie może być zorganizowany umysł jednostki ludzkiej. Aby te sposoby i „sztuczki" stosować, należy uprzednio je dobrze poznać. Dlatego konieczne jest analizowanie rozumienia matematyki, ważne jest, aby brać pod uwagę: k t o zrozumiał, c o i k i e d y (Thurston 1994, s. 165).

Z tego punktu widzenia badania dydaktyczne związane z tym, jak przebiega i czym kończy się myślenie matematyczne, jak opisujemy jego wyniki oraz jak komunikujemy innym nasze zrozumienie, mają istotne znaczenie nawet dla wewnętrznego rozwoju samej matematyki. W tym zakresie matematycy mogą korzystać z pracy dydaktyków.

Oczywiście, również dydaktycy powinni być zainteresowani rozwojem nowych matematycznych idei, bo są one źródłem i bodźcem do ich dydaktycznej transpozycji. Ale, co ważniejsze, matematycy mogą zaoferować dydaktykom umożliwienie wglądu w sposoby i typy rozumowań matematycznych, a to może dostarczyć nieocenionych wskazówek do zrozumienia sposobów matematycznego myślenia uczących się jednostek. Takie wspólne odniesienia mogłyby dać spójną orientację w opracowywaniu celów, zasad i pożądanych wyników edukacji matematycznej. Większość badań dydaktycznych dotyczy przecież głębokich procesów związanych z teoretycznym charakterem matematyki i przybliża pozytywne wyniki pracy intelektualnej człowieka. Mowa tu jest o procesach poznawczych, których zrozumienie i wykorzystanie tej wiedzy w praktyce – jako istotne zadanie dydaktyków – wymaga czynnego udziału twórczych matematyków.

Wielu dydaktyków matematyki ma świadomość, że trudno spodziewać się, iż dydaktyka matematyki stanie się częścią samej matematyki. Pomimo że w dydaktyce matematyki wiele jest obszarów z matematyką wyraźnie związanych (i wymagających od dydaktyków matematycznego wykształcenia)[8], są też w tej dziedzinie obszary dla matematyki zupełnie obce[9], podobnie jak dla dydaktyków matematyki obce są niektóre obszary abstrakcyjnych wytworów twórczości matematycznej.

W odniesieniu do badań naukowych w dydaktyce matematyki trudno nie wspomnieć o niektórych ich ograniczeniach. W szczególności stwierdzić trzeba, że niełatwo jest jasno i kategorycznie zarysować zakres i możliwości wiedzotwórcze badań. Wielu autorów podejmowało i wciąż podejmuje takie starania, ale mimo znacznych postępów, zagadnienie pozostaje wciąż w centrum zainteresowań, a dydaktyka matematyki jest krytykowana za brak koncentracji, rozbieżność perspektyw teoretycznych i ciągły kryzys tożsamości (Steen 1999). Natura badań w dydaktyce matematyki powoduje, że należy pogodzić się z następującymi konstatacjami:

- Badania w dydaktyce matematyki nie mogą brać pod uwagę wszystkich zmiennych towarzyszących procesowi nauczania-uczenia się matematyki. Należy z góry zakładać, że te badania nie mogą dać ostatecznej i kategorycznej odpowiedzi na wszystkie możliwe pytania, jakie możemy zadać w kontekście badanego procesu.
- Odpowiedzi na pytania badawcze często nie mają charakteru kategorycznego, nie są powtarzalnie działającymi prawami, podającymi w sposób niepodważalny zasady i przebieg zjawisk edukacyjnych.

Bez wątpienia badaniom w obrębie dydaktyki matematyki można przypisać jednak następujące, cenne z punktu widzenia tworzenia wiedzy dydaktycznej, funkcje[10]:

- poznawczą (wzbogacanie dotychczas posiadanej wiedzy teoretycznej);
- informacyjną (diagnozowanie przebiegu procesu nauczania-uczenia się i potwierdzanie lub obalanie hipotez na jego temat);
- szkoleniową (przenoszenie wyników analiz teoretycznych do praktyki i obserwacja wyników takiego transferu);

[8] Np. badania dotyczące twórczości matematycznej, aktywności typowo matematycznych (np. uogólnianie, algorytmizowanie itd.), organizacja treści matematycznych dla celów dydaktycznych, selekcja ujęć definicyjnych pod kątem nauczania, badania rozumienia struktury wiedzy matematycznej itd.

[9] Choćby konieczność stosowania teorii i metod psychologiczno-pedagogicznych.

[10] W oparciu o podsumowania własne.

- rozwojową (otwieranie nowych zagadnień lub kierunków badawczych);
- refleksyjną (będącą wynikiem głębokiego rozumienia badanego zjawiska);
- prognostyczną (wskazywanie kierunków decyzji związanych z polityką edukacyjną).

Te zadania badawcze naukowcy w obrębie dydaktyki matematyki realizują prowadząc zarówno badania ilościowe, jak i jakościowe, przypisując im odmienną rolę w tworzeniu wiedzy dydaktycznej (Schoenfeld 1991).

Zauważyć na koniec trzeba także, że wyniki badań dydaktycznych (czy to jakościowych, czy też ilościowych) mogą zostać niewłaściwie wykorzystane. Takie niebezpieczeństwa to m.in.:

- możliwość błędnych interpretacji wyników;
- sposobność do formułowania mylnych wskazań dydaktycznych kierowanych do stosowania w praktyce;
- zaniedbywanie istotnych warunków sytuacyjnych toczącego się procesu;
- nieuwzględnianie wszystkich zmiennych mających znaczenie w akcie nauczania-uczenia się matematyki itp.

Możliwość takich błędnych przeniesień wyników i wniosków płynących z badań w dydaktyce matematyki ma swoją genezę w ogromnej różnorodności i dużym stopniu komplikacji zjawisk zachodzących w eksplorowanym procesie nauczania-uczenia się matematyki.

1.2. Krótki historyczny przegląd światowych kierunków badawczych

W ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat na całym świecie nastąpiło zdecydowane ożywienie w rozwoju badań w obrębie dydaktyki matematyki. Ich intensyfikacja następowała i następuje najczęściej w momentach, kiedy rozmaite międzynarodowe porównania kompetencji uczniów pokazują niedostatki w poziomie ich matematycznego wykształcenia[11].

Początki badań dydaktycznych sięgają odległej już historii, a ich rozwój nastąpił pod koniec XIX wieku, w miarę wprowadzania powszechnego obowiązku szkolnego. Można w tym rozwoju wyróżnić kilka kierunków na zachodzie Europy (Artigue, Batanero, Kent 2007). W Polsce dydaktyka matematyki także rozkwitała głównie dzięki pracy prekursorki w tej dziedzinie w Polsce – Profesor Annie Z. Krygowskiej.

Wyniki syntezy zachodnich trendów badawczych pokazują (Sierpińska 2009), że w latach 80. XX w. największym zainteresowaniem cieszyły się badania skupione na problemach poznawczych jednostki uczącej się, w ujęciu niezależnym od otoczenia, kontekstu kulturowego i warunków intelektualnych. Poprzedzone to zostało powstaniem interdyscyplinarnej nauki o poznaniu (*cognitive science*) w latach 60. i 70. XX

[11] Patrz np. Bergeson T. i in. 2000, *Teaching and Learning Mathematics*, State Superintendent of Public Instruction, Washington (dokument elektroniczny).

stulecia. Podkreślano rolę mentalnych struktur, które decydują o uczeniu się i leżą u jego podstaw. Myślenie matematyczne opisywano za pomocą modeli psychologicznych (Sfard 1994) i badano, w jaki sposób można te struktury mentalne rozwijać, debatowano także nad tym, w jakim stopniu szkolne nauczanie matematyki powinno ujmować istotę pracy twórczego matematyka (Stevens 2000).

Główne nurty badań akcentowanych w rozważanym okresie odzwierciedlają także zainteresowanie filozofią matematyki i jej związkami z problemami nauczania i uczenia się (Sowder 1989). W latach 90. zaczęto zwracać uwagę na ewentualny wpływ środowiska społecznego i kulturalnego (zakorzenionych w tym samym kontekście co matematyczna aktywność ucznia) na nauczanie-uczenie się matematyki (Brousseau 1986; Bishop 1988; Schoenfeld 1989). Dominującym paradygmatem był konstruktywizm społeczny, który opierał się na przełomowej pracy Wygotskiego i Wittgensteina (Ernest 1994), określającej konstruktywistyczne podejście do nauczania-uczenia się matematyki (von Glaserfeld 1990; Steffe, Gale 1995; Hejný 2001).

Rozważaniom teoretycznym w dydaktyce matematyki (prowadzonym w oparciu o teorie psychologiczne) towarzyszyły próby implementacji ich wyników dla potrzeb praktyki, co poskutkowało sformułowaniem kilku koncepcji konstruowania i przebiegu procesu nauczania-uczenia się matematyki. Wśród nich można wymienić:

- Metodę czynnościowego nauczania matematyki (Krygowska 1950, 1957, 1977);
- Teorię Sytuacji Dydaktycznych (Brousseau1986).

Analiza kierunków badań dydaktycznych przedstawiona przez Lermana (2001) ujawnia istnienie w tym czasie różnorodnych teorii ukierunkowanych na traktowanie rezultatów edukacji matematycznej jako złożonego produktu społecznego. Badania w edukacji matematycznej widziano nawet jako część antropologii (Chevallard 1992). Niektóre badania skupiły się zatem na drobiazgowych analizach interakcji między nauczycielem i uczniami i próbowały opisać jej specyficzne cechy (np. Cobb, Bauersfeld 1995) lub opisywały zjawiska w szerszym kontekście systemów społecznych (Steinbring 2005).

Wszystkie zarysowane kierunki badawcze znalazły swoje odzwierciedlenie również w polskiej dydaktyce matematyki. Przeglądu tych dokonań dostarcza lektura kolejnych tomów „Dydaktyki Matematyki", czasopisma ukazującego się od 1981 roku[12], zamieszczającego oryginalne prace z dziedziny dydaktyki matematyki, sprawozdania z prowadzonych badań naukowych, artykuły dotyczące koncepcji matematycznego kształcenia na różnych poziomach, stanu i rozwoju dydaktyki matematyki, sprawozdania z konferencji, omówienia i recenzje książek z zakresu dydaktyki matematyki itd.

Światowa ewolucja badań w dziedzinie dydaktyki matematyki wciąż trwa na tle ugruntowanej perspektywy koncepcyjnej, historycznej, teoretycznej i metodologicznej (Sierpińska, 2009), a ich problematyka wydaje się wciąż rozszerzać i komplikować.

[12] Od roku 2009 czasopismo nosi nazwę „Didactica Mathematicae".

Rozdział 2

Antropomatematyka jako kierunek badań w dydaktyce matematyki

Konieczność powszechnego matematycznego kształcenia nie podlega dyskusji. Natomiast ciągłych, głębokich i wieloaspektowych dyskusji wymaga doprecyzowanie wspólnego (dla osób zainteresowanych procesem kształcenia matematycznego i potencjalnymi jego rezultatami) poglądu na temat tego, czym powinna być matematyka szkolna, aby mogła stanowić element takiego powszechnego szkolnego kształcenia, przynoszącego dodatkowo głównie pozytywne efekty. Ważne jest też założenie, że chcemy mówić nie o *nauczaniu matematyki*, ale bardziej o *kształceniu przez matematykę* (Krygowska 1981, s. 22).

Dyskusja na ten temat musi dotykać kilku zasadniczych kwestii. Bez wątpienia musi się ona odbywać w odniesieniu do sensu i przedmiotu matematyki jako dziedziny nauki, jej metod, języka, mechanizmów rozwoju, kryteriów weryfikacji jej tez oraz relacji tych wszystkich zagadnień ze szkolnym ujęciem rozważanej dziedziny akademickiej. Drugą równie ważną kwestią jest pytanie o naturę wiedzy matematycznej i jej związki ze światem realnym, czyli wzajemne odniesienia tzw. matematyki czystej oraz matematyki stosowanej, a co za tym idzie, przeniesienie odpowiedniego obrazu matematyki na grunt szkolny. Wzajemne relacje tych dwóch ujęć matematyki są przedmiotem dyskusji matematyków od wielu lat. H. Steinhaus przedstawił kiedyś pogląd o ciągłej koegzystencji w debatach tego typu dwóch potencjalnych „partnerów". Jednym z nich jest matematyk uprawiający matematykę czystą, którego ani „matematyka realna", ani „świat materialny" nie interesuje. Drugim „empiryk", który

> *uważa formalne myślenie za niepotrzebny luksus, a którego wykształcenie nie pozwala nawet wyobrazić sobie, czym jest matematyka i jak należy ją stosować* (za: Krygowska 1981, s. 98).

Oczywiście żadne z tak zarysowanych kategorycznych stanowisk nie jest w pełni do przyjęcia, a już w szczególności nie może być podstawą szkolnego ujęcia matematyki. W nauczaniu należy znaleźć kompromis pomiędzy tak skrajnymi poglądami na zastosowanie matematyki.

Kolejny nurt dyskusji wiąże się z zagadnieniem użyteczności kształcenia matematycznego w życiu każdego dorosłego człowieka, czyli problemem istnienia bądź nieistnienia transferu wiedzy i umiejętności o charakterze matematycznym na co-dzienne funkcjonowanie jednostki w społeczeństwie. Mówi się, że matematyka może być „lokalnie nieużyteczna", ale jest „globalnie nieodzowna" zarówno dla nauki, jak społeczeństwa i jednostki (Krygowska 1981). Faktycznie, większość z konkretnie wymienianych w szkolnym programie matematyki szczegółowych haseł dotyczy elementów wiedzy nieprzydatnych bezpośrednio w życiu i w wielu zawodach. Matematyka szkolna jest jednak „globalnie nieodzowna", ponieważ każdemu potrzebne jest logiczne i krytyczne myślenie, wnikliwe dociekanie przyczyn pewnych zjawisk i badanie ich logicznych następstw oraz aktywna postawa wobec problemu, które to umiejętności – jak się powszechnie sądzi – rozwija właśnie uczenie się matematyki.

Ten nurt dyskusji dotyczy obszernej tematyki związanej z określaniem, realizacją i weryfikacją osiągania celów edukacji matematycznej. Zagadnienia dotyczące celów nauczania matematyki są postawą rozmaitych opracowań, czasem różniących się między sobą (Krygowska 1986; Turnau 1990; Niemierko 1994; Niss 1996; Hejný 1998, Hejný, Kuřina 2001; Ciosek, Turnau 2004, Żeromska 2003), ale wszystkie one są zgodne co do założenia o użyteczności kształcenia matematycznego w przyszłym życiu każdego ucznia.

Wyrazem aktualności wszystkich kwestii wspomnianych wyżej są częste zmiany podstaw programowych oraz programów nauczania matematyki w Polsce i zagranicą. Naukowcy i praktycy nauczania wciąż próbują dać odpowiedź na pytanie: jak i jakiej matematyki uczyć, by rezultaty procesu kształcenia były jak najbardziej zadowalające.

Aktualność tematu jest również genezą powstania niniejszej monografii. Myślę, że zasadny jest powrót do dyskusji na temat szkolnego ujęcia matematyki, być może częściowe zrewidowanie poglądów w kwestii jej natury przedstawianej uczniom (czasem w sposób w dużej mierze nieuświadomiony) w trakcie całego procesu kształcenia matematycznego.

Jednym z rezultatów moich rozważań na ten temat, wyłaniających się z obserwacji praktyki nauczania, ze studiów literatury oraz z przeprowadzonych badań dydaktycznych, jest nadanie znaczenia określeniu *antropomatematyka*, jako pewnego specyficznego ujęcia matematyki, jako dziedziny poznawczej, w szczególności w kontekście edukacyjnym.

2.1. Antropomatematyka – próba definicji

Założenia konieczne do nadania znaczenia terminowi antropomatematyka zacznę od kilku refleksji natury ogólnej. Nie będę w tym miejscu oczywiście rozstrzygać wszystkich tematów dyskusyjnych zasygnalizowanych wcześniej[1], odniosę się jednak

[1] W szczególności nie będę rozstrzygać stosunku matematyki czystej do stosowanej oraz rozważać rozlicznych problemów dotyczących ewentualnej użyteczności kształcenia matematycznego w życiu człowieka. Skoncentruję się na kwestiach dotyczących natury matematyki jako nauki oraz

do niektórych przekonań co do natury matematyki jako nauki, gdyż taka baza potrzebna mi będzie w dalszych ustaleniach.

Bez wątpienia o tym, czym jest matematyka, powinni decydować głównie ci, którzy ją tworzą, a zatem zawodowi matematycy. A wśród ich poglądów na temat natury matematyki na pierwszy plan wysuwają się między wieloma innymi[2] dwa nurty. Pierwszy z nich to zespół opinii o matematyce odcinających ją od udziału czynnika ludzkiego (matematyka opisuje rzeczywistość idealną), a tym samym obiektywizujących wiedzę matematyczną (Platon, Descartes, Frege) określając ją jako

> *naukę o wielkościach, czyli o stosunkach ilościowych i formach przestrzennych istniejących niezależnie od ludzkiego bytu* (Brown 1995, s. 16).

Wtedy poznanie opiera się na intuicji i dedukcji i prowadzi do „prawd absolutnych". W rozważaniach naukowców funkcjonuje też odmienny pogląd (Proklos, Kant, Poincaré, Lakatos), uznaje się matematykę za wytwór ludzkiego umysłu, a wtedy jest ona

> *otwartym, stale uzupełnianym przez człowieka zasobem rozumowań, […] nauką poznawczą badającą pewne abstrakcyjne twory przy użyciu rozumowań jako narzędzia badawczego* (Białynicki-Birula 2006, s. 17).

Matematyka opisuje w takim ujęciu rzeczywistość doznawaną przez człowieka, a obiekty matematyczne są wytworem aktu twórczego; nie istnieją niezależnie od tej aktywności. E. Kant stwierdził:

> *Przekonujemy się jednak, że wszelkie poznanie matematyczne posiada tę swoistą cechę, że pojęcie swoje musi najpierw przedstawić w naoczności, i to a priori, więc w takiej naoczności, która nie jest empiryczna, lecz czysta* (za: Murawski 1986, s. 110).

L. Kronecker napisał, że:

> *Bóg stworzył liczby całkowite; reszta jest wytworem człowieka* (za: Dunham 1994, s. 15).

Także P. Davies zanotował:

> *Matematyka jest jednym z największych wytworów ludzkiej wyobraźni* (za: Kuřina 1998, s. 86).

---

społecznego charakteru edukacji matematycznej. Rozważania nie mają więc na celu komplementarnego wyczerpania poruszanego zagadnienia, stanowią wyraz subiektywnie potraktowanej selekcji poglądów istotnych dla dalszych założeń monografii.

[2] Poglądy na ten temat są podzielone i w literaturze można spotkać różne typologie postaw wobec matematyki, np. A. Sierpińska wymienia trzy takie postawy: empiryzm intuicyjny, formalizm, empiryzm dyskursywny (Sierpińska 1990).

Oba omawiane poglądy koegzystują w naukowych rozważaniach matematyków oraz filozofów matematyki. Jednym z opisów dotyczących dyskursu na temat natury matematyki jest praca M. Hellera, pt. *Co to jest matematyka?* (2001). Autor stwierdza w niej, że światu należy przypisać pewną obiektywną cechę, dzięki której skutecznie można go badać przy pomocy matematyki. Cechę tę Heller nazywa matematycznością świata, zakładając tym samym właśnie obiektywizm istnienia struktur matematycznych. Uważa, że gdyby matematyka była tylko tworem ludzkiego umysłu, trudno byłoby wyjaśnić, jak świat mógłby obiektywnie posiadać cechę matematyczności. Innymi słowy, przez matematykę powinniśmy rozumieć

> *abstrakcyjne prawidłowości, które nasze formuły i równania tylko w jakiś sposób ujmują,*

wtedy

> *tak rozumianej matematyce [możemy] przypisywać przynajmniej pewien stopień niezależności od naszego umysłu* (Heller 2001, s. 71).

Ten pogląd wyrażało i wyraża – w tej lub podobnej formie – wielu słynnych filozofów, od Platona począwszy.

Tymczasem wśród naukowców panuje równie szeroko rozpowszechnione (wspomniane już wcześniej) przeciwstawne przekonanie, że matematyka jest właśnie nierozerwalnie związana z człowiekiem i w całości jest wytworem ludzkiego umysłu. Każde z tych stanowisk opiera się na odmiennym traktowaniu wiedzy matematycznej, źródła jej pochodzenia i roli człowieka w opisywaniu bądź tworzeniu tej wiedzy.

Sporne dyskusje trwają niemal tak długo, jak istnieje sama matematyka, i trudno mówić o ustaleniu jedynie słusznego porządku w tej kwestii.

> *Definicja matematyki się zmienia. Każde pokolenie, a w pokoleniu każdy myślący matematyk tworzy definicję odpowiadającą jego poglądom* (Davis, Hersh 1994, s. 18).

Interesujące jest natomiast przeniesienie pytania o naturę, przedmiot i metody matematyki na grunt jej nauczania-uczenia się. Niełatwo bowiem rozmawiać o celach, treściach i sposobach nauczania bez uprzedniego ustalenia poglądów na temat tego, co ma być przedmiotem tego nauczania oraz tego, jaki obraz matematyki chcemy u uczniów ukształtować. W szczególności istotna jest konieczność uwypuklenia roli aktywnej działalności człowieka w konstytuowaniu się jego wiedzy matematycznej. Większość teorii metamatematycznych traktuje matematykę jako wiedzę gotową[3] (obiektywnie istniejącą lub wytworzoną przez człowieka), już spisa-

[3] H. Freudenthal przeciwstawia matematykę gotową matematyce pojmowanej jako specyficzna działalność. Pisze: *o tym, że obok matematyki gotowej istnieje jeszcze matematyka jako działalność, wie każdy matematyk podświadomie, ale wydaje się, że niewielu z nich jest tego świadomych,*

ną w podręcznikach i monografiach matematycznych, do której ewentualnie należy dodać to, co istnieje, a czego matematycy jeszcze nie zdążyli opisać (lub chwilowo brak im odpowiednich środków takiego opisu). Dla celów nauczania matematyka nie może być taką gotową wiedzą, którą nauczyciel ma jedynie „włożyć do głowy ucznia". W aspekcie edukacyjnym udział człowieka w tworzeniu się wiedzy matematycznej i natura tej wiedzy nabierają więc szczególnego znaczenia.

Nie podlega dyskusji, że warto wciąż na nowo rozważać istotę wiedzy matematycznej w ujęciu szkolnym, dokonywać pewnych przewartościowań i akcentowania kompetencji jednostki ludzkiej w tworzeniu tej wiedzy, uskuteczniając w ten sposób przyszłe funkcjonowanie człowieka w dynamicznie rozwijającym się świecie. To ważne szczególnie w obliczu intensywnych zmian kulturowych i społecznych zachodzących w świecie o innym niż kiedyś sposobie i tempie przepływu informacji. Takie zmiany z kolei mogą być podstawą stopniowego zmieniania i udoskonalania praktyki nauczania matematyki, a ewentualne przeobrażenia można rozumieć na wiele sposobów, czasem od samej czystej matematyki stosunkowo odległych, ocierających się o sferę przekonań, emocji i wartości, co daje nową perspektywę patrzenia na zamierzone rezultaty nauczania[4].

Zarysowana powyżej sytuacja usprawiedliwia podjęcie przeze mnie rozważań dotyczących takiego ujęcia matematyki, które mogłoby służyć szeroko rozumianemu celowi (teoretycznemu i praktycznemu) związanemu z edukacją matematyczną, celowi pozytywnie odpowiadającemu na oczekiwania naukowe i społeczne, łączącemu różne dydaktyczne nurty badawcze.

Wynik tych przemyśleń to nadanie znaczenia terminowi antropomatematyka[5]. Przyjęte przeze mnie stanowisko teoretyczne zakłada, że w ujęciu antropomatematycznym na matematykę patrzymy, jak na działalność (nie „wiedzę gotową") intelektualną człowieka, traktujemy ją jako przedmiot i wynik procesu poznawczego[6] nierozerwalnie związanego z człowiekiem – jednostką czynnie poznającą, uznając – i akcentując jednocześnie – fakt zachodzenia procesu poznania w określonych warunkach społecznych. Jako badacze edukacji matematycznej, o czym była już

---

a ponieważ rzadko jest to podkreślane, niematematycy wcale tego nie widzą (za: Krygowska 1981, s. 25).

[4] W szczególności możemy zauważyć trudności w kształtowaniu pojęć obiektywizmu i prawdy matematycznej zmieniających się wraz z perspektywą kulturowo-historyczną (Radford 2006). Kwestia np. konstytuowania się wartości, jaką jest prawda, na lekcjach matematyki jest kwestią otwartą i w niewielkim stopniu rozpoznaną (Bishop 1999; Żeromska 2010b).

[5] Terminu tego używają uczestnicy Seminarium z Dydaktyki Matematyki w Uniwersytecie Karola w Pradze, które prowadzi prof. Milan Hejný. Znaczenie tego określenia było objaśniane przeze mnie również w innych pracach (zob. Żeromska 2009a, 2009b).

[6] Użycie określenia proces poznawczy obliguje do uwzględnienia faktu, że mówimy tu o przyswajaniu informacji ze świata zewnętrznego: od postrzegania tej informacji, poprzez jej przetwarzanie, kategoryzowanie i zapamiętywanie oraz korzystanie z zasobów informacji, komunikacji, aż do zachowania jej w pamięci trwałej (Nęcka, Orzechowski, Szymura 2006).

mowa, jesteśmy żywo zainteresowani szeroko rozumianą współzależnością pomiędzy matematyką a człowiekiem uczącym się[7]. Taka jest przecież właśnie natura procesów edukacyjnych.

A zatem podejście antropomatematyczne koncentruje się na zjawiskach towarzyszących procesowi poznawczemu, w którym podmiotem poznania jest człowiek (*anthropos*), a przedmiotem tego poznania jest matematyka (*mathematika*)[8]. Najistotniejsze założenie, jakie przyjmuję, wyróżniając i nazywając wspomniany obszar badawczy, jest takie, że w kręgu zainteresowań antropomatematycznych leżą wszelkie zjawiska mocno związane z naturą matematyki jako przedmiotu poznania, ale n i e i s t n i e j ą c e a u t o n o m i c z n i e i n i e z a l e ż n i e od podmiotu poznającego, jakim jest człowiek[9]. Zakładam więc, że matematyka o tyle istnieje, o ile jest przedmiotem intelektualnej działalności poznawczej człowieka.

Kolejne zasadnicze założenie określające antropomatematyczne podejście teoretyczno-badawcze jest takie, że proces nauczania-uczenia się matematyki przebiega najczęściej w pewnym kontekście społecznym (rzadko ma charakter spontanicznego procesu indywidualnego uczenia się jednostki). W tym rozumieniu matematyka jest nauką społeczną i ujęcie antropomatematyczne silnie tę cechę akcentuje. Równie ważnym założeniem jest uwzględnienie wzajemnych związków wiedzy potocznej stosowanej przez człowieka w środowisku pozamatematycznym oraz wiedzy naukowej w obrębie matematyki. W szczególności istotny jest wpływ codziennie stosowanych schematów myślenia i działania człowieka na tworzenie i wykorzystywanie takich schematów w jego działalności matematycznej.

Reasumując, stawiam tezę, że matematyka w ujęciu antropomatematycznym ma charakter nauki humanistycznej[10] i społecznej[11], a na tworzenie się wiedzy matematycznej człowieka w sposób istotny wpływają doświadczenia i wiedza pozamatematyczna, mająca swoje źródło w życiu codziennym. Taka wiedza może być źródłem wielu, często nieuświadomionych, przekonań, mających duży wpływ na sposób myślenia człowieka stosowany poza matematyką, jak i w jej obrębie.

Pogląd ten jest o tyle nowy, że scala ze sobą nurty badawcze w dydaktyce matematyki: badania na temat dydaktycznej transpozycji wiedzy matematycznej, rozwa-

---

[7] Na poziomie filozoficznym istnieje wiele sposobów rozumienia tego, co to jest matematyka i wiele sposobów rozumienia, co to znaczy być człowiekiem. Ma to poważne konsekwencje dla sposobu rozumienia praktyki uprawiania tej dziedziny naukowej (Brown 2008).

[8] Słowo *mathematika* pochodzi z języka greckiego, gdzie *mathema* oznacza naukę, wiedzę i poznanie, zaś *mathesis* oznacza uczyć się przez rozmyślanie. Dla myślicieli starożytnych matematyka była zatem utożsamiana z nauką, poznaniem i rozumowaniem.

[9] Do tak określonego obszaru nie należą zatem na przykład zagadnienia związane z problemami wzajemnych związków matematyki czystej czy stosowanej.

[10] Humanistycznej w tym sensie, że zajmuje się sprawami dotyczącymi człowieka i jego aktywności na określonym polu ludzkiej działalności.

[11] Społecznej, ponieważ dotyczy serii zjawisk najczęściej mających miejsce w pewnych systemach społecznych i posiadających wpływ na osobowość jednostki bądź grupy społecznej.

żania badawcze dotyczące społecznego wymiaru matematyki (podkreślające widzenie matematyki jako produktu społecznego) oraz badania skupione na zagadnieniach dotyczących procesów poznawczych jednostki uczącej się, uwzględniających istotny wpływ wielu pozamerytorycznych czynników tych procesów.

2.2. Szkolny Układ Antropomatematyczny (SUA)

Skonkretyzujmy antropomatematyczne ujęcie badawcze na przykładzie szkolnego procesu nauczania-uczenia się matematyki. Wyraźnie stwierdzamy, że ten proces nosi wszelkie znamiona procesu poznawczego przebiegającego w pewnym kontekście społecznym. Podmiotem tego procesu poznawczego jest uczeń, a jego przedmiotem jest matematyka (w jej szkolnej transpozycji)[12]. Cały zaś proces toczy się w określonym układzie społecznym, jakim jest (najczęściej) klasa szkolna. Proces ten nie przebiega w płaszczyźnie jedynie merytorycznej, odnoszącej się do istoty przedmiotu poznania. Badania w obrębie dydaktyki matematyki coraz częściej akcentują istotność sfery emocjonalno-motywacyjnej, mającej ogromny, a czasem wręcz decydujący wpływ na przebieg i rezultaty tego procesu poznawczego (Kilpatrick 1992; McLeod 1992; Leron i Hazzan 1997; Mason i in. 1998; Czajkowska 2002; Żeromska 2004). W tak ujmowanym procesie poznawczym czynnikiem istotnym jest wpływ nauczyciela, który najczęściej ten proces inspiruje (czasem wręcz wymusza) i nim steruje. Tu akcentujemy powtórnie społeczny charakter omawianego procesu, wyróżniając dwie płaszczyzny kontekstu społecznego: uczeń – klasa szkolna oraz uczeń – nauczyciel.

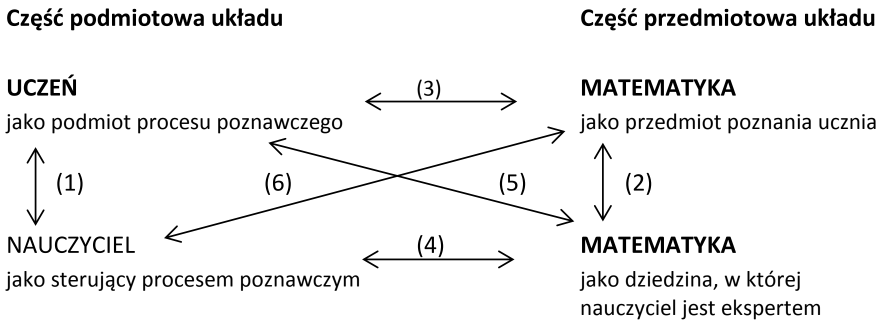
Reasumując, mamy do czynienia z procesem poznawczym, w którym podmiot nie funkcjonuje autonomicznie, jest pod dużym – czasem dominującym – wpływem innego współpodmiotu tego procesu, nauczyciela, integralnie z tym procesem związanego. Jest to pewna osobliwość tego ujęcia. Oznacza konieczność uwzględnienia w rozważanym procesie poznawczym dwóch elementów części podmiotowej, pomiędzy którymi istnieje wiele skomplikowanych współzależności. Takie założenie ma swoje konsekwencje w uwzględnianiu dużego, czasem decydującego wpływu nauczyciela i systemu jego wiedzy na rezultaty rozważanego procesu poznawczego. Sytuację dodatkowo komplikuje fakt, że oba współpodmioty – nauczyciel i uczeń – często nie są w pełni świadome wzajemnych wpływów na wyniki poznania matematycznego, szczególnie w kontekście pozamerytorycznych sfer tego poznania.

Podobnie skomplikowany charakter ma przedmiot rozważanego procesu poznawczego w jego szkolnym ujęciu antropomatematycznym. Bezpośrednim przedmiotem poznania jest oczywiście matematyka. Ale nie jest to zwykłe przeniesienie istoty tej dyscypliny naukowej. Jest to pewna dydaktyczna transpozycja matematy-

[12] Tak określony proces poznawczy obejmuje szereg zjawisk wchodzących w jego skład, począwszy od postrzegania informacji, poprzez jej przetwarzanie, do włączenia nowej informacji do istniejącego systemu wiedzy podmiotu poznającego.

ki, uwarunkowana przez wiele czynników; od instytucjonalnych po osobowościowe, w tym zarówno od strony ucznia, jak i nauczyciela.

Zilustrujmy całą tę sytuację schematycznie, uwzględniając najbardziej istotne relacje między zasadniczymi komponentami procesu szkolnego nauczania-uczenia się matematyki. Układ przedstawiony poniżej nazywać będziemy Szkolnym Układem Antropomatematycznym (w skrócie SUA).



Schemat 2. Szkolny Układ Antropomatematyczny (SUA)

Schemat 2 wymaga objaśnień. Składa się on z dwóch części: podmiotowej, którą stanowią uczeń i nauczyciel oraz przedmiotowej, którą tworzą dwa ujęcia matematyki: jako dziedziny naukowej w rozumieniu akademickim i jako przedmiotu nauczania[13].

Strzałki (1) – (6) na schemacie SUA obrazują wpływy i zależności poszczególnych elementów, symbolizują różnorodne, pozostające we wzajemnym związku płaszczyzny badawcze. Dodatkowo trzeba uwzględnić fakt, że na wynik procesów poznawczych przebiegających w układzie SUA ma wpływ również codzienna, pozamerytoryczna wiedza, ucznia oraz nauczyciela. Ten fakt ma duże znaczenie z perspektywy antropomatematycznej. Spektrum możliwych przedmiotów i obiektów badań w układzie SUA jest więc niezmiernie szerokie. Oczywiście nie jest możliwe objęcie całego tego bogactwa jednym zamysłem i podejściem badawczym.

Wielowątkowość tematyki badawczej związanej z układem SUA można zilustrować używając jednego tylko (bardzo istotnego w ujęciu antropomatematycznym) psychologiczno-dydaktycznego pojęcia *postawa podmiotu wobec przedmiotu poznania*. Nie będę w tym miejscu rozstrzygać istoty zjawiska *postawa* (a więc zawartości jego poszczególnych komponentów oraz ich wzajemnych zależności i wpływów), to

[13] Wyróżnienie takich dwóch części w opisie podejścia antropomatematycznego ma swoją genezę w budowie niektórych kategorii psychologiczno-pedagogicznych stanowiących o relacjach pomiędzy człowiekiem a otaczającą go rzeczywistością. Jednostka ludzka jest opisywana w tych kategoriach jako podmiot danej relacji, a jej drugi element określa się jako przedmiot (patrz np. *pedagogiczno-psychologiczna postawa*).

było przedmiotem innych, między innymi moich prac[14]. Przyjmijmy jednak założenie, że fenomen nazywany istnieje, jest wyrazem stosunku podmiotu do przedmiotu, charakteryzuje się pewną stałością i ma wpływ na zachowanie człowieka w różnych sytuacjach.

W układzie SUA część podmiotowa obejmuje dwóch uczestników procesu poznawczego: ucznia i nauczyciela, można więc rozważać postawy o dwóch różnych podmiotach, ale jednakowym przedmiocie, jakim jest np. matematyka w ujęciu szkolnym. Można się spodziewać, że zarówno uczeń ma jakiś własny stosunek do tak określonego przedmiotu procesu poznawczego (niestety nierzadko zabarwiony negatywnymi emocjami), jak i zapewne jakiś stosunek ma nauczyciel. Obaj mogą mieć natomiast odrębne nastawienia do matematyki traktowanej jako akademicka wiedza naukowa. To właśnie dwuelementowość części przedmiotowej SUA rozszerza zakres możliwości ustalania przedmiotów postaw. I tak w odniesieniu do płaszczyzny badawczej oznaczonej na schemacie 2 numerem (3) możemy badać i opisywać postawy uczniów wobec matematyki ujętej jako przedmiot nauczania lub jeszcze bardziej uszczegółowić obiekt badań rozważając poszczególne „składniki" matematyki szkolnej, np. badać postawy uczniów wobec problemowych zadań matematycznych. Płaszczyzna oznaczona numerem (5) w kontekście postaw określa fenomen postaw uczniów wobec matematyki jako dziedziny naukowej, temat badawczy ciekawy i bardzo mało eksplorowany. Podobnie, jeśli chodzi o nauczyciela, możemy mówić o jego postawie wobec matematyki szkolnej (6), która bez wątpienia ma ścisły związek z jego postawą wobec matematyki jako nauki (4). Ciekawym i rzadko podejmowanym zagadnieniem badawczym jest inferencja w warunkach szkolnych tych różnych postaw na siebie (Mason i in. 1998; Bishop 1999; Hannula 2011). Psychologia poznawcza posługuje się terminem *syndrom postaw*[15] dla zespołu zjawisk stowarzyszonych z procesem poznawczym prowadzonym przez jednostkę ludzką w pewnym układzie społecznym (Holly 1976), i myślę, że określenie to dobrze oddaje bogactwo nakreślonych powyżej zagadnień badawczych.

Podobna obfitość tematów wyłania się na płaszczyznach oznaczonych (1) i (2).

Powyżej przybliżyłam tylko jedno z możliwych pól badawczych zarysowujących się w układzie SUA, takich podejść można wyróżnić oczywiście znacznie więcej. Niniejsza praca nie obejmuje opisu całości antropomatematycznego podejścia badawczego związanego z funkcjonowaniem układu SUA. Z konieczności spektrum zainteresowań zostało odpowiednio zawężone. Rezultat tego zawężenia będzie przedmiotem szczegółowego opisu w rozdziale 4. W tym miejscu natomiast, aby uzupełnić

[14] Opisy badań dydaktycznych w odniesieniu do postaw uczniów wobec matematyki można znaleźć m.in. w moich pracach (Żeromska 1998, 2001, 2004).

[15] Zbiór postaw podobnych do siebie pod jakimś względem (np. podobna treść przedmiotowa, ta sama ważność itd.) tworzy syndrom postaw, który może zawierać się w innych syndromach i wzajemnie krzyżować się z nimi (Holly 1976, s. 68).

oraz zilustrować opis podejścia antropomatematycznego w badaniach dydaktycznych, podam dwa przykłady badań wpisujących się w ten nurt.

2.3. Przykłady własnych badań ilustrujących antropomatematyczne podejście badawcze

Antropomatematyczne podejście badawcze najlepiej zilustrują konkretne przykłady badań realizujących ten zamysł badawczy. Przyjrzymy się więc dwóm przykładom moich badań oddających naturę podejścia antropomatematycznego.

Przykład 1 (Badanie P)

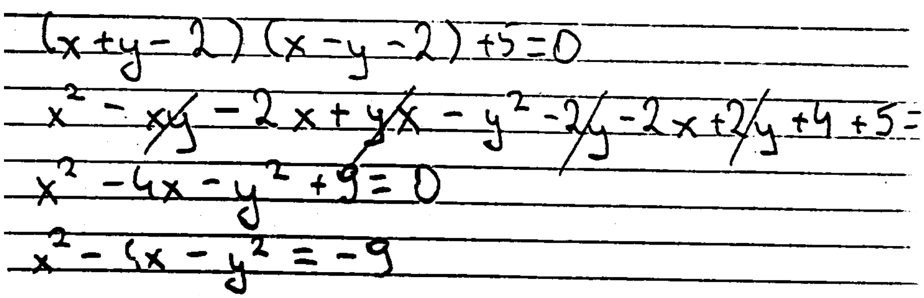
Antropomatematyczne założenia badawcze postulują m.in. rozwijanie bardziej rozumiejącej pozycji badaczy i nauczycieli odnoszącej się do uczniowskich poglądów i odczuć towarzyszących poczynaniom uczniów w trakcie ich działalności związanej z matematyką. O konieczności uwzględniania pozamatematycznej sfery uczniowskich zmagań w trakcie ich działań w obrębie matematyki (zwłaszcza, jeśli uczeń działa w jakimś układzie społecznym) przekonał mnie przykład opisany w mojej nieopublikowanej rozprawie doktorskiej[16]. Przypomnę ten przykład pokrótce.

Uczniowie (w wieku 14–15 lat) byli przeze mnie obserwowani w trakcie rozwiązywania następującego zadania matematycznego.

Zad. P1

Podać pary liczb całkowitych spełniających równanie: *(x + y - 2) (x - y - 2) + 5 = 0.*

Dwóch spośród obserwowanych uczniów przedstawiło niemal identyczne rozwiązania (rys. 1 i rys. 2).



Rys. 1

[16] *Wybrane cele nauczania matematyki a proces rozwiązywania zadań*, Kraków 2001.

$$(x+y-2)(x-y-2)+5=0$$
$$x^2-\cancel{xy}-2x+\cancel{xy}-y^2-\cancel{2y}-2x+\cancel{2y}+4+5=0$$
$$x^2-2x-y^2-2x+9=0$$
$$x^2-4x-y^2+3=0$$

Rys. 2

Nauczyciel, którego zadaniem byłoby ocenić te pisemne prace, widziałby to samo i oceniłby uczniów tak samo. Tymczasem prowadzona przez mnie obserwacja, a przede wszystkim rozmowa z uczniami, pozwoliła dostrzec zasadnicze różnice w ich sposobie myślenia i przyczynach postępowania. Przedstawię krótki zarys przebiegu obydwu procesów rozwiązywania.

Tabela 2.3.1.

<table>
<tr><td></td><td>Postępowanie ucznia U1 (rys. 1)</td><td>Postępowanie ucznia U2 (rys. 2)</td></tr>
<tr><td>1.</td><td colspan="2">Uczniowie rozpoczynają pracę nad zadaniem i przepisują dane w zadaniu równanie: (x + y - 2) (x - y -2) + 5 = 0.</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Uczeń U1 mówi: Tu trzeba rozwiązać równanie.</td><td>Uczeń U2 mówi: Co ja tu mogę zrobić... Mogę wymnożyć nawiasy.</td></tr>
<tr><td>3.</td><td colspan="2">Uczniowie wymnażają wyrażenia algebraiczne znajdujące się w nawiasach równania po jego lewej stronie i zapisują: $x^2 - xy - 2x + yx - y^2 - 2y - 2x + 2y + 4 + 5 = 0$.</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Uczeń U1 (w milczeniu) zapisuje:
$x^2 - 4x - y^2 + 9 = 0$
$x^2 - 4x - y^2 = -9$</td><td>Uczeń U2 mówi: jeszcze muszę zredukować wyrazy podobne i zapisuje:
$x^2 - 2x - y^2 - 2x + 9 = 0$
$x^2 - 4x - y^2 + 9 = 0$</td></tr>
<tr><td>5.</td><td colspan="2">Obaj uczniowie otrzymują równanie drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi, a więc równanie, którego nie potrafią rozwiązać (na swoim etapie nauki).</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Uczeń U1 mówi (z przekonaniem i pewnością w głosie): Zwykle równania się tak dawały rozwiązywać. Widocznie to jest jakieś inne, nie umiem go rozwiązać.</td><td>Uczeń U2 mówi (z wyraźną rezygnacją): Nie mam pojęcia, jak to zrobić! Nie lubię takich zadań.</td></tr>
</table>

Skoncentrujmy się krótko na różnicach w postępowaniach uczniów U1 i U2, istotnych z antropomatematycznego punktu widzenia. Przede wszystkim odrębne wydają się decyzje leżące u podstaw czynności obu obserwowanych opisanej w rubryce numer 3 tabeli 2.3.1. Uczeń U1 (bez widocznego namysłu) stwierdza, że musi rozwiązać dane mu w zadaniu równanie. Przekształcenia algebraiczne, które wykonuje później, są konsekwencją uświadomionej decyzji o rozwiązywaniu równania. Gdyby udało mu się to równanie rozwiązać – próba zakończyłaby się sukcesem. Ten uczeń zastosował strategię postępowania, którą można nazwać *strategią próby stosowania znanego schematu* (Żeromska 1998)[17]. Oznacza to, że uczeń skojarzył postawioną przed nim sytuację zadaniową ze znanym sobie (z wcześniejszych doświadczeń) schematem postępowania stosowanego w celu znajdowania liczb spełniających równanie.

Inne natomiast podejście zaprezentował uczeń U2. Otóż po krótkiej, wręcz niezauważalnej chwili namysłu, wykonał pierwszą czynność, jaka prawdopodobnie skojarzyła mu się z postacią wyrażenia algebraicznego znajdującego się po lewej stronie równania danego w temacie zadania. Występowanie tam dwóch nawiasów i znaku mnożenia pomiędzy nimi okazało się dla tego ucznia silnym sygnałem do wykonania czynności „wymnażania". Trudno powiedzieć, czy zastanawiał się nad tym, czy wykonanie tych czynności doprowadzi go do rozwiązania zadania – być może wykonał po prostu jedyną czynność, jaka skojarzyła mu się z budową syntaktyczną występującego w temacie wyrażenia algebraicznego. Jego postępowanie w tym momencie procesu rozwiązywania można nazwać wykonaniem *strategii pierwszego sygnału* (Hejný 1992)[18]. Prawdopodobnie działanie ucznia nie było wcale ukierunkowane na rozwiązanie równania, nie myślał on o tym, że powinien poprzez swoje działanie dążyć do „wyliczenia" wartości niewiadomych x i y. Wykonał pierwszą (i być może jedyną) czynność, którą zasugerowała mu forma podanego wyrażenia algebraicznego. Tę hipotezę potwierdza również późniejsze postępowanie ucznia.

Kolejna istotna różnica w omawianych rozumowaniach to refleksje obu uczniów w momencie napotkania przez nich na przeszkodę w postaci równania drugiego stopnia z dwiema niewiadomymi (rubryki 4 i 5 tabeli 2.3.1.). Uczeń U1 (konsekwentnie dążąc do rozwiązania równania) „przenosi" niewiadome na jedną, a wiadome na drugą stronę tego równania. Następnie wyraża swoje zdziwienie mówiąc: *zwykle równania się tak dawały rozwiązywać* (rubryka 6 w tabeli). Widać tu wyraźne ukierunkowanie ucznia na wykorzystanie znanych mu dobrze schematów postępowania. Nie podejmuje on już, co prawda, innej próby rozwiązania tego zadania, ale jest prawdopodobnie przekonany, iż taka możliwość istnieje. Uczeń U2 wykonał natomiast wszystkie możliwe znane sobie i kojarzące mu się w danej chwili operacje algebraiczne, łącznie z redukcją wyrazów podobnych, przy której to czynności używa słowa *muszę*. Następnie stwierdza bardzo dobitnie: *Nie mam pojęcia, jak to zrobić!* Ta wypowiedź świadczy o odczuwaniu bezradności.

[17] Użyty termin oznacza często stosowany przez uczniów schemat postępowania: dopasowanie nowej sytuacji do systemu znanych, często stosowanych, algorytmicznych sposobów postępowania.

[18] Jest to termin użyty przez M. Hejnego (1992) (*the strategy of the first signal*) dla nazwania postępowania ucznia polegającego na tym, że przystępując do rozwiązywania zadania wykonuje on pierwszą czynność, jaka mu się w danej chwili narzuca, mimo iż może ona być zupełnie nieefektywna.

Rozmowa z obydwoma uczniami potwierdziła różnicę w ich podejściu do rozwiązywania tego zadania, leżącą w sferze uczuć i emocji. Podczas rozmowy uczeń U1 stwierdził: *Właściwie rozwiązywanie zadań algebraicznych dosyć lubię. Zwykle mi wychodzą. Tylko to zadanie było jakieś dziwne*. Możemy wnioskować, że uczeń ten ma pozytywny stosunek do rozwiązywania zadań (w tym przypadku zadań algebraicznych). Jest on, co prawda, dosyć silnie nastawiony na wykorzystywanie w tych rozwiązaniach schematów, ale wykazuje jednak pewną aktywność; gdyby skojarzył z tym zadaniem jeszcze jakiś inny znany schemat postępowania, być może podjąłby nową próbę. Z rozmowy z uczniem U2 wynika natomiast, że od początku niezbyt chętnie zaczął rozwiązywać zadanie. Zrobił to być może tylko dlatego, iż przebywał sam na sam z obserwatorem, co zmusiło go do podjęcia jakiegoś działania. Jeśli tak było, to potwierdzałoby to istotność społecznego charakteru obserwowanego procesu. Gdyby to zadanie rozwiązywane było w innym układzie społecznym (na przykład na lekcji w klasie), być może uczeń U2 nie podjąłby żadnej aktywności. W rozmowie powiedział: *Nigdy nie umiałem rozwiązywać zadań. Nie wychodzi mi to*. Można wnioskować, że uczeń U2 podszedł do rozwiązywania zadania z nastawieniem na poniesienie nieuchronnej klęski. Dążył do przerwania pracy.

Główny wniosek płynący z przedstawionego przykładu jest taki, że poza umiejętnym stosowaniem metod, schematów i strategii w rozwiązywaniu zadań matematycznych istnieją jeszcze inne komponenty tego procesu, mające istotny wpływ na osiągnięcie sukcesu lub poniesienie porażki przez rozwiązującego. Jest to m.in. nastawienie ucznia do tego typu sytuacji, do jej kontekstu społecznego, będące prawdopodobnie sumą wcześniejszych doświadczeń. Jeśli zaś podstawą oceny pracy ucznia przez nauczyciela są tylko czynności obserwowalne (w tym przypadku pisemne rozwiązania), może zdarzyć się, iż nie dotrze on do prawdziwych przyczyn niepowodzeń uczniowskich, a zatem nie będzie w stanie podjąć prawidłowego postępowania reedukacyjnego.

Opisany przykład (oraz wiele innych sytuacji obserwowanych na lekcjach matematyki w klasach szkolnych) stał się genezą moich badań dydaktycznych dotyczących psychologiczno-dydaktycznego zjawiska – postawy ucznia wobec zadań matematycznych[19]. Te badania akcentowały decydujący wpływ emocjonalnej sfery poznania matematycznego na wynik tego poznania. Okazało się, że zasadniczych zmian w komponencie poznawczo-behawioralnym ucznia wobec zadań matematycznych można dokonać ingerując w komponent emocjonalno-motywacyjny takiej postawy. To ważna wskazówka dla nauczycieli, którzy dostrzegają niedostatki w rezultatach prowadzonej przez siebie edukacji matematycznej.

---

[19] Badania te zostały szczegółowo opisane w moich artykułach (z roku 1998 i 2004) oraz nieopublikowanej rozprawie doktorskiej (2001).

Zarysowane tu krótko moje podejście badawcze rozwinęło się w wyniku dalszych dociekań do całościowo traktowanego ujęcia antropomatematycznego[20].

Pozamatematyczna sfera aktywności uczniów i studentów w zakresie uczenia się przez nich matematyki poddawana jest niektórym badaniom dydaktycznym. Przykładem mogą być badania opisane w pracy pt. *The World According to Johny: A Coping Perspective in Mathematics Education* (Leron, Hazzan 1997). Badacze analizują poznawcze aspekty myślenia uczniów podczas rozwiązywania zadań matematycznych, próbując wniknąć w uczniowski punkt widzenia, przejawiając badawczą postawę empatyczną (*empatithic attitude*). Badacze biorą zatem pod uwagę punkt widzenia „radzenia sobie w danej sytuacji" przez ucznia (*coping perspective*), próbując wniknąć niejako „do wewnątrz" jego myślenia, poprzez odtwarzanie stanów umysłowych ucznia w trakcie rozwiązywania zadań matematycznych. Co ważne, badacze nie mają na myśli jedynie myślowych czynności poznawczych odnoszących się do aspektów merytorycznych danego zadania. Chodzi o odsłanianie uczniowskim wewnętrznym głosem jego działań i odczuć ukierunkowanych na „przetrwanie" w danej sytuacji, na wybrnięcie z trudności i wyjście z niej z twarzą. Autorzy tego podejścia badawczego próbują odtwarzać subiektywne stany umysłowe ucznia, odsłaniając te stany uczniowskim wewnętrznym głosem tak, żeby móc zidentyfikować i nazwać momenty nielogicznych błądzeń czy nieporozumień myślowych formułowanych w postaci domyślnych odczuć ucznia, np.: *poplątało mi się, nie wiem, co robić, nie wiem, czego ten nauczyciel ode mnie oczekuje, czego on ode mnie chce?, jak mogę do tego dojść, co mam wykorzystać?, co zrobić, żeby to zaliczyć?, myślę, że mam...* itp. Prezentowane w tym artykule podejście badawcze jest próbą głębokiego wniknięcia w przebieg procesu rozwiązywania zadania, wychodzącą daleko poza analizę zachowań ucznia odnoszących się do merytorycznego ujęcia problemu. Przykłady badań wspomniane powyżej można potraktować jako pewną ilustrację szczególnej, antropomatematycznej perspektywy badawczej.

Rozważmy jeszcze jeden przykład badań tego typu. Tym razem będą to badania antropomatematyczne podkreślające rolę nauczyciela w szkolnym układzie antropomatematycznym SUA. Badania zostały przeprowadzone przeze mnie wśród nauczycieli matematyki na poziomie gimnazjalnym.

Przykład 2 (Badanie N1)

Tytułem wstępu warto krótko przypomnieć, że teoretycy i praktycy badań nad edukacją matematyczną podkreślają istnienie jakości określanej *nauczycielską wiedzą przedmiotową*, a w szczególności jej części odnoszącej się do wiedzy matematycznej w nauczaniu (w odróżnieniu od wiedzy pedagogicznej) (Shulman 1986; Adler, Davis 2006). Tej właśnie relacji pomiędzy matematyką jako wiedzą posiadaną przez nauczyciela a matematyką jako wiedzą przekazywaną uczniowi (zwłaszcza zniekształ-

[20] Inspiracją dla tych rozważań były rozmowy z prof. M. Hejnym z Uniwersytetu Karola w Pradze, za które przy tej okazji serdecznie dziękuję.

ceniom mającym miejsce w trakcie tego przekazu i w konsekwencji w układzie SUA), dotyczy następujący przykład badań[21].

Nauczycielom matematyki w gimnazjach (82 osobom) przedstawiono 5 różnych szkiców propozycji dydaktycznych lekcji szkolnych (A, B, C, D, E), których głównym celem było wprowadzenie twierdzenia Pitagorasa. Przypomnijmy, że jest to pierwsze twierdzenie pojawiające się w szkole jawnie, wraz z nazwą i objaśnieniami dotyczącymi jego implikacyjnej postaci oraz ewentualnym dowodem prawdziwości (podawanym w różnej formie ścisłości, w zależności od podręcznika i nauczyciela). Po przeanalizowaniu i wspólnym przedyskutowaniu każdej z wersji lekcji nauczyciele biorący udział w badaniu proszeni byli o odpowiedź na dwa pytania:

1. Której z przedstawionych propozycji najbliższy jest Twój sposób realizacji tego tematu w klasie?

2. Którą z przedstawionych propozycji uważasz za najlepszą?

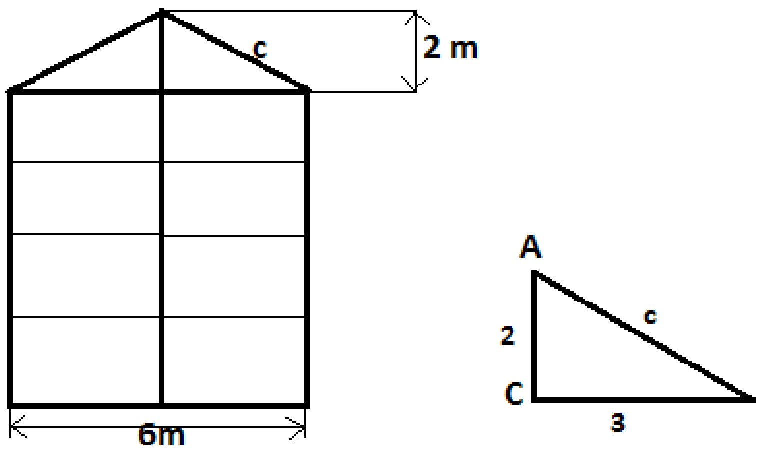
Aby zobrazować spektrum wersji lekcji danych nauczycielom do wyboru, pokażmy ich ogólne ramy.

Wersja A

Lekcja rozpoczyna się od wspólnego rozwiązania dwu następujących zadań.

Zad. 1

Przeczytaj wskazówkę i oblicz długość c spadku dachu budynku tak jak na rysunku:



Rys. 3

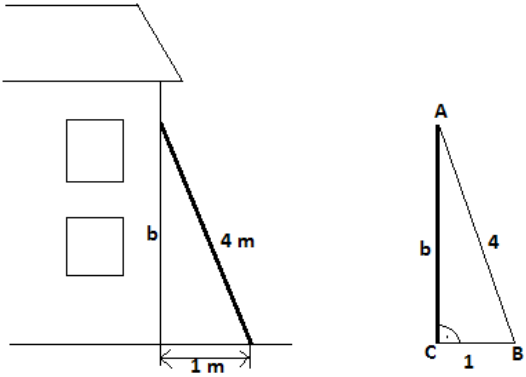
Wskazówka:

W trójkącie prostokątnym ABC wyliczymy długość c przeciwprostokątnej według wzoru: $c = \sqrt{3^2 + 2^2}$.

[21] Podejście badawcze zastosowane w tym badaniu jest wzorowane na badaniu opisanym przez M. Hejný i F. Kuřina (2001).

Zad. 2

Do jakiej wysokości b sięga drabina długości 4m oparta 1m od ściany? (zobacz rysunek poniżej).



Rys. 4

Wskazówka:

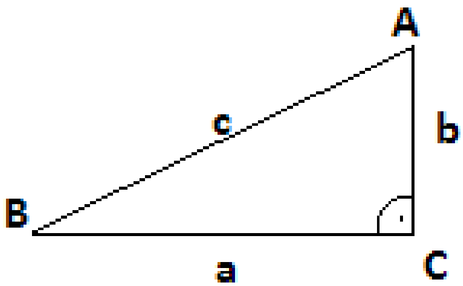
W trójkącie prostokątnym ABC wyliczymy długość przyprostokątnej b według wzoru: $b = \sqrt{4^2 - 1^2}$.

Po rozwiązaniu zadań nauczyciel formułuje twierdzenie, które wykorzystano we wskazówkach do zadań.

W trójkącie prostokątnym ABC o przeciwprostokątnej długości c oraz przyprostokątnymi długości a i b zachodzi TWIERDZENIE PITAGORASA:

$c^2 = a^2 + b^2 \qquad a^2 = c^2 - b^2 \qquad b^2 = c^2 - a^2$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$

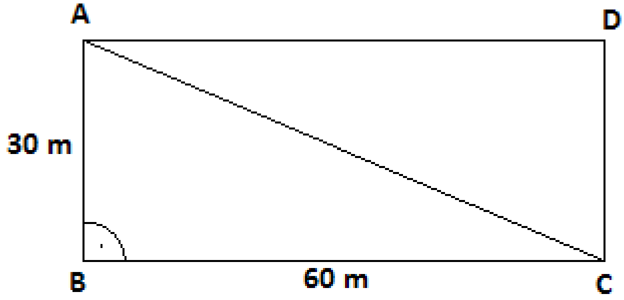


Rys. 5

Podane twierdzenie zostaje zastosowane w następnym zadaniu.

Zad. 3

Która droga z budynku A do budynku C na placu narysowanym poniżej jest najkrótsza? O ile metrów jest krótsza droga AC niż droga ABC?



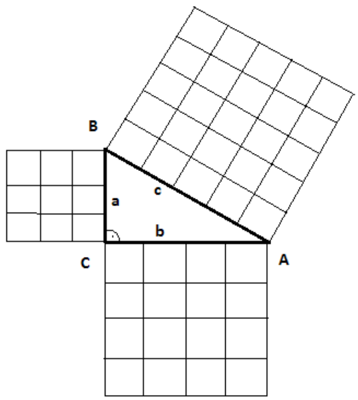
Rys. 6

Wersja B

Lekcja rozpoczyna się od podania twierdzenia wraz z jego wybraną ilustracją.

Twierdzenie Pitagorasa

W dowolnym trójkącie prostokątnym ABC z przeciwprostokątną długości c oraz przyprostokątnymi długości a i b zachodzi równość: $a^2 + b^2 = c^2$



Rys. 7

Po wprowadzeniu twierdzenia nauczyciel przechodzi do rozwiązania następujących zadań mających przekonać uczniów o prawdziwości wprowadzonego twierdzenia.

Zad. 1

Narysuj trójkąty prostokątne o przyprostokątnych równych a i b [cm] tak jak w tabelce. Zmierz długość boku c i przekonaj się, że zachodzi równość z twierdzenia Pitagorasa.

a	6	15	5	7
b	8	20	12	24
c				

Zad. 2

Wypełnij tabelkę stosując twierdzenie Pitagorasa. Sprawdź mierzeniem na rysunku.

Długość przyprostokątnej a [w mm]	10	10	20	100	80	40	**a**
Długość przyprostokątnej b [w mm]	10	20	30	120	100	140	**b**
Długość przeciwprostokątnej c [w mm]							$c = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}$

Zad.3

Uzupełnij tabelkę robiąc obliczenia za pomocą kalkulatora. Wybrany trójkąt narysuj i sprawdź mierząc, czy dobrze obliczyłeś.

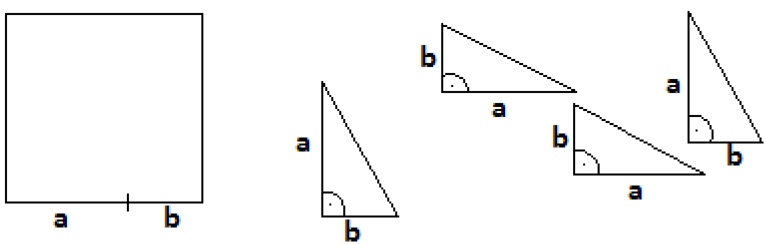
Długość przyprostokątnej a [w mm]	10	13	10,4		4		27
Długość przyprostokątnej b [w mm]	20	18	12,5	4		25	
Długość przeciwprostokątnej c [w mm]				10	10	100	253

Wersja C

Lekcja rozpoczyna się od rozwiązania następujących zadań geometrycznych będących w zamyśle formą „geometrycznego odkrywania” twierdzenia.

Zad. 1

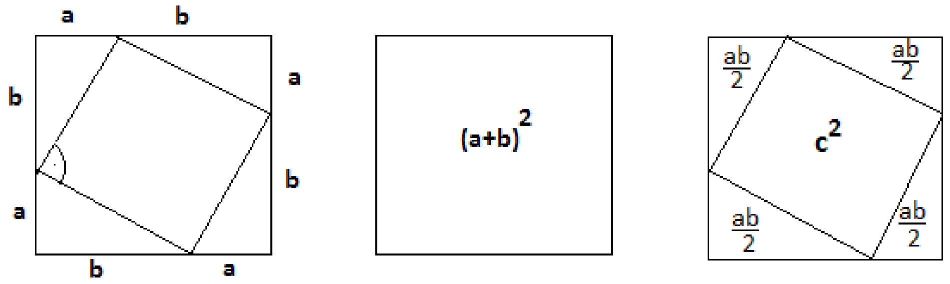
Wytnij 8 jednakowych trójkątów prostokątnych z długościami przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątną równą c. Narysuj 2 kwadraty o boku długości a + b. Umieść na kilka sposobów w każdym kwadracie 4 trójkąty tak, aby w prosty sposób móc obliczyć pole niezakrytej części kwadratu.



Rys. 8

Zad. 2

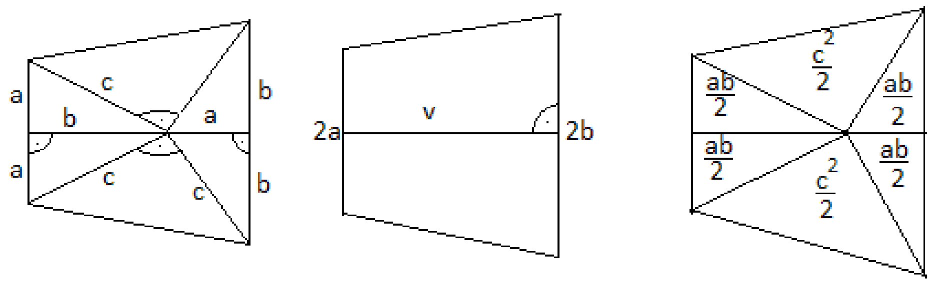
Oblicz pole kwadratu o boku a + b (pomagając sobie poniższymi rysunkami) i porównaj wyniki.



Rys. 9

Zad. 3

Oblicz pole trapezu (sugerując się poniższymi rysunkami) i porównaj wyniki.

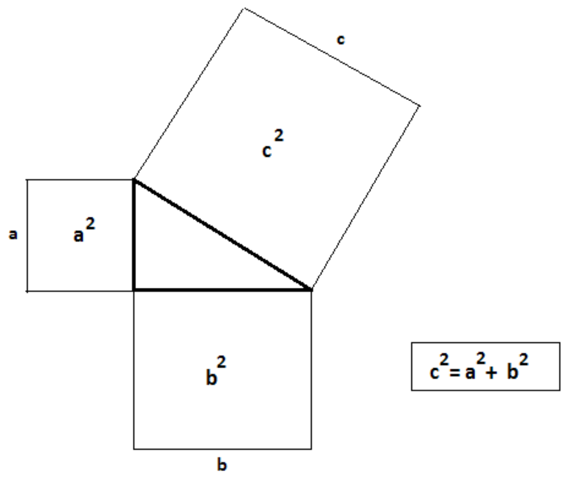


Rys. 10

Po rozwiązaniu zadań następuje wprowadzenie treści twierdzenia Pitagorasa przez nauczyciela.

Twierdzenie Pitagorasa

W każdym trójkącie prostokątnym o długościach przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej długości c zachodzi prawidłowość: pole kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej jest równe sumie pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych.

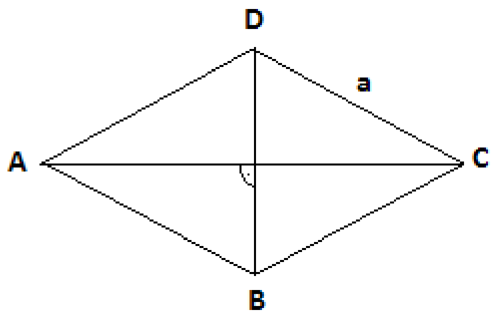


Rys. 11

Jako zastosowanie powyższego twierdzenia nauczyciel podaje uczniom następujące zadanie.

Zad. 4

Oblicz długości boków rombu, którego przekątne mają długości: e = 6 cm, f = 10 cm.



Rys. 12

Wersja D

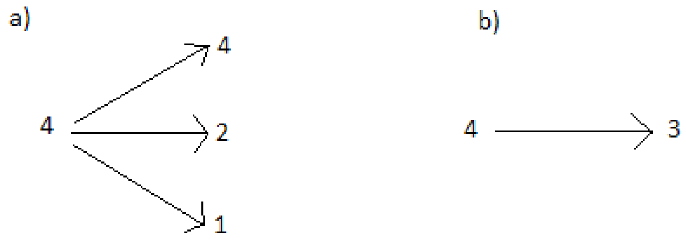
Lekcja zaczyna się od następujących zadań przypominających uczniom wybrane zasady matematycznych przyporządkowań.

Zad. 1

Rozważ dwa przyporządkowania:

a) liczbie przypisujemy jej dzielniki;

b) liczbie przypisujemy liczbę jej dzielników. Na przykładzie:



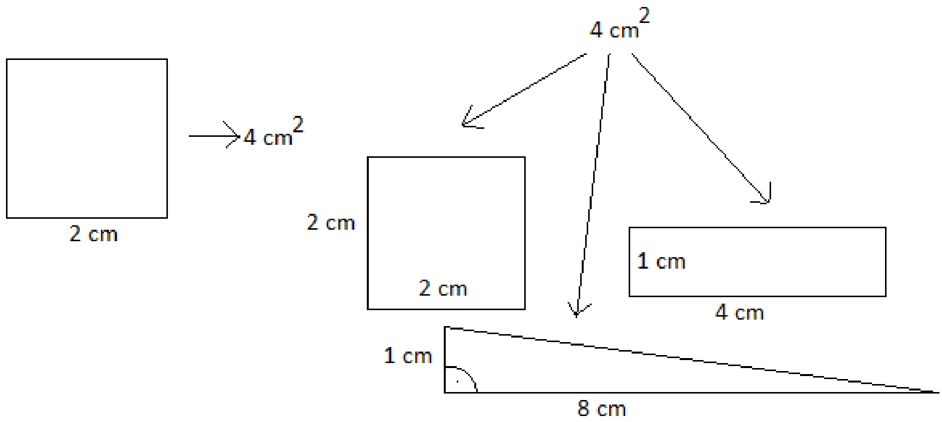
Rys. 13

W pierwszym przykładzie jednej liczbie przyporządkowujemy kilka dalszych liczb, w drugim przyporządkowujemy dokładnie jedną liczbę. Podobne konstrukcje występują również w geometrii.

Zad. 2

a) Oblicz pole wielokąta na rysunku.

b) Jakie wielokąty mają pole wyrażające się daną liczbą?



Rys. 14

Zad. 3

Skonstruuj kilka prostokątnych trójkątów z przyprostokątnymi a = 3 cm, b = 2 cm. Zauważ, że wszystkie te trójkąty są przystające. Długość przeciwprostokątnej jest jednoznacznie wyznaczona przez długości przyprostokątnych. Tę długość można „wyznaczyć" rysowaniem, a czy można też tę długość wyliczyć?

Zad. 4

W sieci kwadratowej narysuj kwadraty o bokach mających długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego:

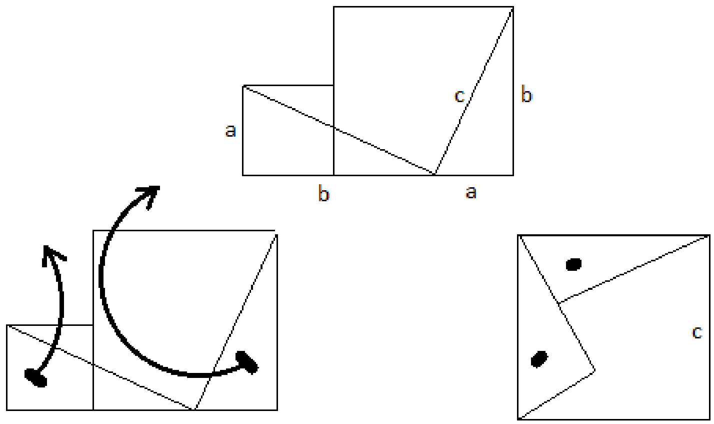
a) równoramiennego o ramionach długości 3 cm;

b) o przyprostokątnych długości 2 cm i 3 cm. Co zauważyłeś?

Zad. 5

Tu następuje sformułowanie twierdzenia Pitagorasa wraz z jego pewnym geometrycznym dowodem.

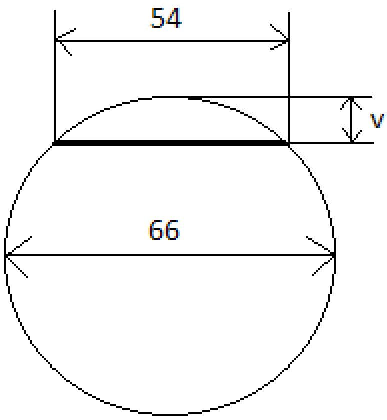
W każdym trójkącie prostokątnym z przyprostokątnymi długości a i b oraz przeciwprostokątną długości c zachodzi równość: $c^2 = a^2 + b^2$. Dlaczego?



Rys. 15

Zad. 6

Oblicz długość odcinka v dla części koła zaznaczonej na rysunku:



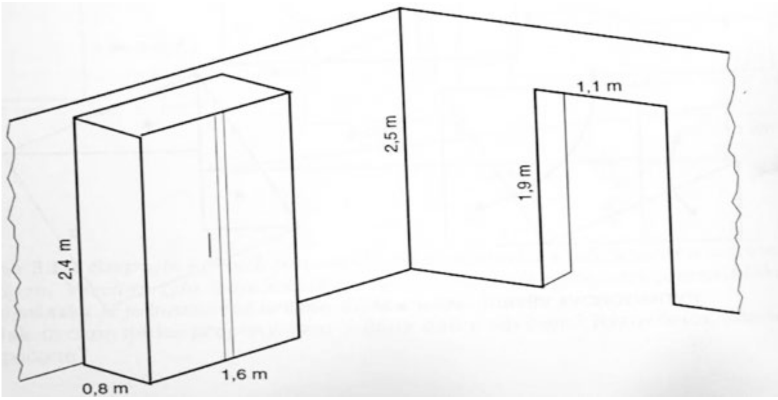
Rys. 16

Wersja E

Lekcja rozpoczyna się od wprowadzenia pewnego problemu mogącego mieć miejsce w życiu.

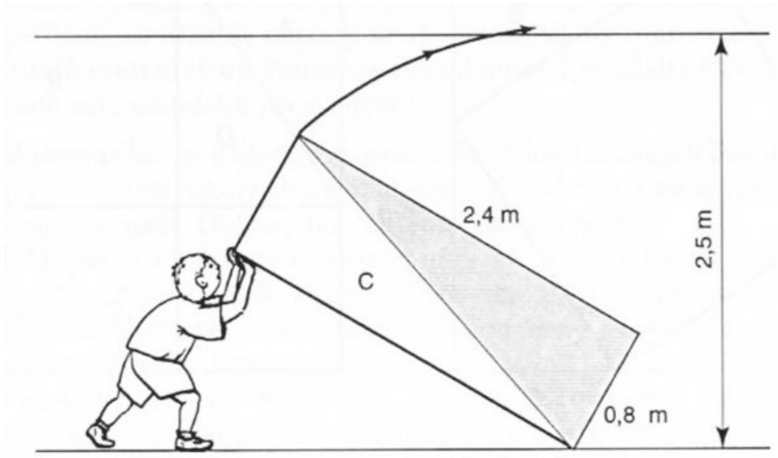
Zad. 1

Czy możemy ustawić szafę w pokoju tak, jak na obrazku?



Rys. 17

O możliwości ustawienia szafy w pokoju decyduje długość c przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a = 0,8 m i b = 2,4 m (popatrz na rysunek poniżej).



Rys. 18

Problem

Jaka jest zależność długości przeciwprostokątnej c w prostokątnym trójkącie o przyprostokątnych długości a i b?

Zad. 2

Narysuj trójkąty prostokątne o zadanych długościach przyprostokątnych a i b (tak jak w tabelce). Zmierz za każdym razem długość boku c i wypełnij tabelkę:

a	3	6	8	5	7	10
b	4	8	15	12	24	24
c						
$a^2 + b^2$						
c^2						

Hipoteza

Zostaje postawiona przez uczniów na podstawie obserwacji tabeli z zad. 2.

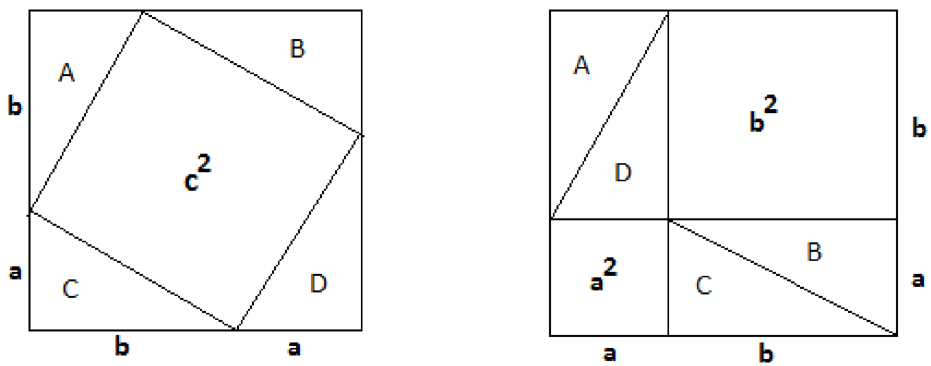
W trójkącie prostokątnym o długościach przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątną długości c zachodzi równość:

$c^2 = a^2 + b^2$

Skonstruuj swój dowolny przykład (lub kilka przykładów) trójkąta prostokątnego, zmierz odpowiednie boki i przeprowadź sprawdzenie hipotezy za pomocą kalkulatora.

Zad. 3

Uzasadnij równość sformułowaną w naszej hipotezie. Pomóż sobie poniższymi rysunkami:

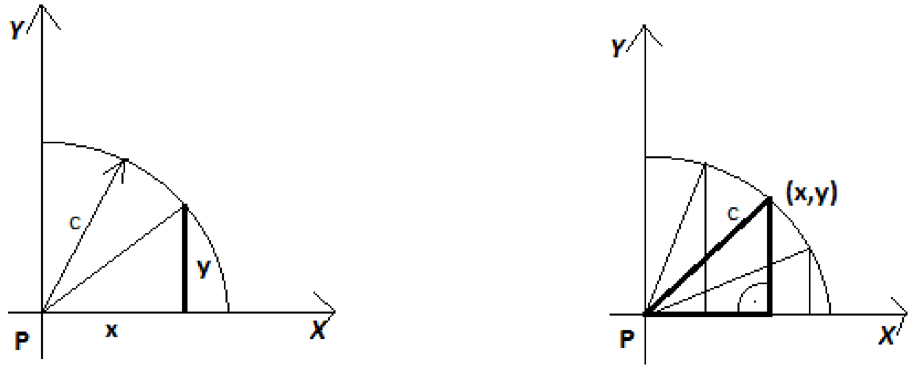


Rys. 19

Po geometrycznym dowodzie twierdzenia następuje jego następująca interpretacja w zadaniu 4.

Zad. 4

Zaobserwuj, jak zależy długość y przyprostokątnej trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej długości c od długości drugiej przyprostokątnej x.



Rys. 20

(współrzędne x i y spełniają równanie okręgu: $x^2 + y^2 = c^2$).

Scharakteryzujmy krótko podejścia dydaktyczne przedstawione w poszczególnych propozycjach A – E.

Koncepcja A jest oparta na często występujących w szkolnych podręcznikach przykładach praktycznych zastosowań twierdzenia Pitagorasa. Te zastosowania w zamierzeniu autorów koncepcji A mogą stanowić motywację do wprowadzenia tego twierdzenia, a proces jego wprowadzenia odbywa się w formie podania gotowych instrukcji postępowania, ustrukturyzowanej wypowiedzi twierdzenia (bez dowodu) i wskazania innych jeszcze niż na początku zastosowań.

Koncepcja B oddaje myśl o pięknie gotowej, dobrze skonstruowanej i klarownie zilustrowanej matematyki, elegancji syntaktycznej budowy wprowadzanego twierdzenia i obliczeń dzięki niemu wykonywanych. Dowód matematyczny mogą, zdaniem autorów wersji B, zastąpić liczne empiryczne przykłady sprawdzania przez ucznia równości zawartej w tezie twierdzenia. Zastosowania twierdzenia Pitagorasa są w koncepcji B nieistotne.

Kolejna koncepcja (C) opiera się na konkretnym i myślowym manipulowaniu geometrycznymi kształtami. W wyniku tych manipulacji uczeń powinien odkryć równość pól kwadratów zbudowanych na bokach trójkąta prostokątnego, a wcześniejsze czynności ucznia są pewną formą uprawomocnienia twierdzenia Pitagorasa. Zastosowania realne nie są tu akcentowane, istotne są zaś zastosowania twierdzenia Pitagorasa w samej, matematycznie ujmowanej, geometrii.

Wersja D lekcji wprowadzającej twierdzenie Pitagorasa różni się nieco od pozostałych. Zaczyna się od przedstawienia uczniowi przykładów przyporządkowań funkcyjnych i innych. Prowokuje się go w ten sposób do refleksji o jednoznaczności wyznaczania długości przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym przez ustalenie długości obu przyprostokątnych tego trójkąta. Pojawia się więc pytanie, jak ustalić sposób wyliczania nieznanej długości (przeciwprostokątnej) przy pomocy długości znanych (obu przyprostokątnych). Ten sposób zostaje podany przez nauczyciela. Zadaniem uczniów jest odpowiedzieć na pytanie: dlaczego badana zależność ma sugerowaną postać? Dostrzeżenie właściwych zależności poprzez manipulowanie odpowiednimi figurami geometrycznymi powinno pozwolić uczniowi dać odpowiedź na to pytanie.

Ostatnia koncepcja (E) rozpoczyna się od przedstawienia uczniowi pewnego realnego problemu, mogącego stanowić genezę i (co ważne!) motywację do poszukiwania zależności pomiędzy długościami boków trójkąta prostokątnego. Postać tej zależności (teza twierdzenia Pitagorasa) może być następnie odkryta i sformułowana w postaci hipotezy na podstawie kilku doświadczeń empirycznych, a potwierdzona geometrycznym dowodem twierdzenia Pitagorasa. Pozostaje jeszcze zilustrować ją ciekawym zastosowaniem w geometrii.

Wyniki badania N1 zestawione zostały w tabeli 2.3. W pierwszej kolumnie podano nazwy propozycji lekcji przedstawionych badanym nauczycielom, natomiast w drugiej i trzeciej liczbę osób wybierających daną wersję lekcji jako odpowiedź na pytanie1 i na pytanie 2.

Liczbowy rozkład odpowiedzi na przedstawia się następująco:

Tabela 2.3.2.

	Pytanie 1	Pytanie 2
Wersja A	15 osób	9 osób
Wersja B	37 osób	16 osób
Wersja C	15 osób	9 osób
Wersja D	5 osób	8 osób
Wersja E	10 osób	40 osób

Widzimy, że najwięcej badanych nauczycieli uznało swój własny sposób wprowadzania twierdzenia Pitagorasa w szkole (w odniesieniu do pytania 1) za podobny do podanego w wersji B. Przypomnijmy, że jest to propozycja polegająca na „wykładowym" wprowadzeniu gotowego twierdzenia, a następnie pokazaniu jego typowych zastosowań w zadaniach. Nazwijmy ją dla uproszczenia następnych opisów wersją mechanistyczną. Najmniej nauczycieli uznało, że w praktyce starają się wprowadzać twierdzenie Pitagorasa opierając się na strukturalistycznej koncepcji nauczania matematyki (analogicznie do wersji D). Propozycje A i C, w odpowiedzi na pytanie 1, wybrała taka sama liczba badanych, natomiast wersję E wybrało tylko 10 osób.

Przypomnijmy, że wersja E polega na próbie wytworzenia w klasie klimatu, w którym dostrzeżenie równości występującej w tezie twierdzenia Pitagorasa jest konsekwencją rozwiązania pewnego problemu realnego. Następnie otrzymana równość podlega wielokrotnej weryfikacji empirycznej, aż w końcu zostaje uprawomocniona dowodem geometrycznym. Zauważmy, że spośród koncepcji lekcji danych nauczycielom do wglądu właśnie wersja E wydaje się najbardziej interesująca i zgodna z tendencją maksymalnego wiązania matematyki szkolnej z rzeczywistością otaczającą ucznia. Nazwijmy ją wersją realistyczną.

Przeanalizujmy rozkład liczbowy odpowiedzi badanych osób na pytanie 2. Widzimy, że nastąpiły znaczne przesunięcia co do liczby osób udzielających poszczególnych odpowiedzi. Tym razem aż 40 badanych nauczycieli decyduje się wybrać *wersję* realistyczną jako tę, która wydaje im się najlepsza. Wersję mechanistyczną, poprzednio wybieraną przez najliczniejszą grupę badanych, tym razem wskazuje tylko 16 nauczycieli. Wersje A i C wybiera mniej osób niż poprzednio, natomiast o 3 osoby więcej decydują, że wersja D jest godna zainteresowania.

Aby całościowo porównać oba zestawienia (tabela 2.3.2.) i wyciągnąć z tego porównania wnioski, zilustrujmy uzyskane dane na następującym diagramie.

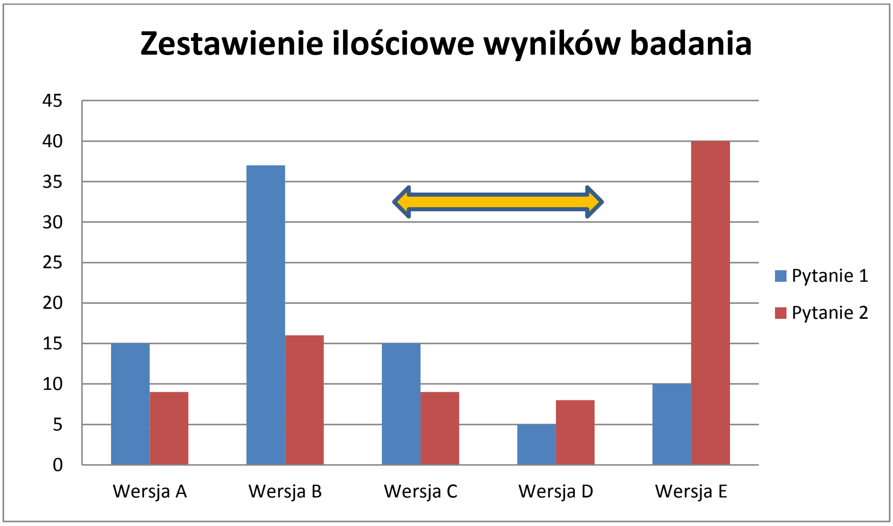


Diagram 1. Wyniki ilościowe badania N1

Diagram ukazuje dysproporcje pomiędzy liczebnością osób udzielających odpowiedzi na pytanie 1 i pytanie 2. Największą różnicę widzimy pomiędzy słupkami diagramu ilustrującymi wybór wersji B (mechanistycznej) i E (realistycznej) w odpowiedzi odpowiednio na pytania 1 i 2 (na diagramie zaznaczono to strzałką). Okazuje się, że mimo iż 40 osób uznało, że wersja realistyczna najbardziej się im podoba, to jednak tylko 16 z nich stwierdziło podobieństwo tego sposobu do używanych przez nich w praktyce. Z drugiej strony, choć 37 osób uznało, że wersja mechanistyczna jest im bliska pod względem metod stosowanych we własnej praktyce nauczania, to tylko 15 osób uważa, że jest to wersja najlepsza.

Takie przesunięcia ilościowe pokazują, że istnieją niespójności pomiędzy poglądami nauczycieli na matematykę w ogóle (w sensie jej użyteczności, aplikowalności oraz genezy niektórych pojęć i własności) a poglądami na matematykę, która nadaje się do nauczania. To ważne z antropomatematycznego punktu widzenia. To badanie pokazuje, że relacja oznaczona strzałką o numerze (2) w układzie SUA (patrz schemat 2) jest bardzo skomplikowana. Możliwa jest następująca sytuacja: nauczyciel dostrzega związki matematyki z rzeczywistością, docenia piękno odkrywania tych związków i matematycznego modelowania sytuacji z życia codziennego, jednak istnieją powody, dla których nie przekazuje uczniom takiego obrazu matematyki w swojej praktyce. Możliwe, że na matematykę „zdatną do nauczania" niektórzy nauczyciele patrzą jako na gotowy zbiór faktów do przekazania, a jej nauczanie jest nauczaniem transmisywnym (*transmisivní edukační styl*) (Hejný, Stehliková 1999). Wtedy strategia nauczania jest ukierunkowana na wprowadzanie gotowych schematów postępowania (Hejný 2008). Prawdopodobnie jest to według tych osób sposób najbardziej efektywny i sprawdzający się w praktyce. Takie przekonania nauczycieli mogą być powodem ważnych i niezauważalnych bezpośrednio zakłóceń w układzie SUA.

Badania uwarunkowane podejściem antropomatematycznym mają zwrócić uwagę na to, że proces kształcenia matematycznego jest determinowany wieloma skomplikowanymi okolicznościami, między innymi istnieniem pewnych przeświadczeń nauczyciela wynikających z przebiegu jego praktyki pedagogicznej, z jego własnych doświadczeń szkolnych i przekonań dotyczących natury matematyki. Może zdarzyć się, że obraz matematyki, jaki nauczyciele kształtują w umysłach swoich uczniów, daleki jest od ich własnego wyobrażenia na temat matematyki i jej natury.

Rozdział 3

Metodologia matematyki

Niezależnie od tego, który ze wspominanych poprzednio poglądów na istotę matematyki uznajemy i który z nich następnie będziemy implementować dla celów edukacyjnych, nie unikniemy konieczności wcześniejszej refleksji nad metodologią tej nauki, cechą najbardziej dla niej charakterystyczną. To właśnie o sposobie funkcjonowania istniejących i powstawania nowych elementów wiedzy matematycznej decyduje metodologia matematyki[1]. Zawodowi matematycy są w dużej mierze zgodni, co należy zaliczyć do gotowych „wytworów" matematyki jako nauki, różnie natomiast interpretują takie terminy jak *aktywność matematyczna*, *matematyczna intuicja* czy *metoda matematyczna* (Krygowska 1981). Natomiast dla celów szkolnego nauczania matematyki w miarę precyzyjne określenie powyższych terminów jest nieodzowne. Mamy uczyć matematyki, ale jakiej? Co jest istotne w metodologii tej nauki, ważne dla jej zrozumienia, warte włączenia jako ważny element do ogólnej kultury społeczeństwa? Nie chodzi tu przecież tylko o dobór treści, ale o stwierdzenie,

> *w czym wyraża się specyfika matematycznego myślenia, matematycznego aktu twórczego* (Krygowska 1981, s. 24),

a także czy i jaki transfer istnieje pomiędzy myśleniem człowieka w obrębie matematyki a jego funkcjonowaniem w życiu codziennym.

Celem niniejszego rozdziału jest wskazanie i uzasadnienie szerokiej konceptualizacji odnoszącej się do sformułowania *metodologia matematyki*[2]. Będzie to (z konieczności skrótowe i jedynie fragmentaryczne) wprowadzenie w niezmiernie bogatą

---

[1] Metodologia matematyki jest przedmiotem zainteresowań działu wiedzy badającej matematykę jej własnymi, matematycznymi środkami, czyli metamatematyki. Metamatematyka, jako dział badań nad podstawami matematyki, wyodrębniła się na przełomie XIX i XX wieku. Jej powstanie jest związane z tzw. programem Hilberta, którego celem było podanie dowodu niesprzeczności matematyki środkami finitystycznymi (Woleński 1984). Termin metamatematyka oznacza ogół rozważań nad systemami sformalizowanymi przy pomocy środków matematycznych. Nauka ta zajmuje się zatem analizą budowy i własności teorii i metod matematycznych (Tarski 1994). Niniejsze opracowanie nie pretenduje do komplementarności opisu całości zagadnień związanych z pozycją metodologii matematyki w ujęciu metamatematycznym.

[2] W odniesieniu do matematyki, mówiąc o metodologii mówimy zarówno o metodach badań w zakresie samej matematyki, jak i o metodach przekazu wyników tych badań (Turnau 1984).

tematykę zagadnień związanych z budową i sposobem funkcjonowania tej struktury wiedzy. Temat jest celowo ujęty szeroko, a dyskusja nie będzie miała charakteru klasycznego przeglądu literatury, który jest zazwyczaj podawany w encyklopedycznym zestawieniu indywidualnych określeń, poglądów czy wyników[3]. Przedstawione zostaną natomiast wybrane stanowiska, opinie i refleksje dotyczące elementów metodologii matematyki, nieodzowne dla dalszych dociekań opisywanych w tej pracy.

3.1. Elementy metody matematycznej i jej dydaktyczne odniesienia

Matematyka jest pewną teorią lub zbiorem takich wzajemnie ze sobą powiązanych teorii niezależnie od subiektywnych poglądów na genezę i istotę tej dziedziny nauki[4]. Teorią zaś logika matematyczna nazywa każdy niesprzeczny zbiór zdań formułowanych w języku tej teorii. Niesprzeczność układu zdań oznacza, że w ich zbiorze nie istnieje zdanie (zapisane w języku rozważanej teorii) takie, że w ramach tej teorii można dowieść zarówno tego zdania, jak i jego zaprzeczenia. Pozostaje tylko nadać znaczenie terminowi *dowodzi*[5], co będzie sukcesywnie przedmiotem dalszych rozważań.

Problem dowodzenia i uzasadniania stwierdzeń odnoszących się do obiektów matematycznych i relacji między nimi jest od bardzo dawna ważnym zagadnieniem w filozofii matematyki i metamatematyce oraz samej matematyce. Tradycyjnie zasadnicza idea budowy wiedzy matematycznej (przedstawiona już przez Euklidesa) polega na przyjęciu (bez logicznego uzasadnienia) skończonej liczby pojęć podstawowych (tzw. pierwotnych) oraz skończonej liczby zdań określających relacje między tymi pojęciami (tzw. aksjomatów) przyjmowanych jako oczywiste, czyli prawdziwe (Tarski 1994). Zatem kwestia dowodzenia w tym ujęciu rozwiązywana jest poprzez wyszczególnienie zbioru prawd oczywistych i wywodzenie wszystkich innych stwierdzeń z tego zbioru przy pomocy niekwestionowanych zasad logiki[6].

---

[3] Przystępny opis tej tematyki znajduje się w pracy A. Tarskiego pt. *Wprowadzenie do logiki i do metodologii nauk dedukcyjnych* (1994), dostępnej także w wersji elektronicznej.

[4] Opis struktury wiedzy oraz metody aksjomatyczno-dedukcyjnej znajdujemy już w słynnym dziele Euklidesa na przykładzie geometrii. Jednak należy pamiętać, że u Euklidesa istniały pewne luki w systemie aksjomatów, a jego dowody nie odpowiadają dzisiejszym standardom (Semadeni 2004).

[5] Do sfery zagadnień, które metamatematyka zalicza do kwestii związanych z metodologią matematyki, należą jeszcze inne, np. dotyczące definicji i warunków jej poprawności oraz roli aksjomatów w teorii dedukcyjnej. Nie będą one jednak przedmiotem rozważań w tej pracy.

[6] Matematycy jednak nie są zgodni w kwestii ustalenia jednego i niepodważalnego zbioru aksjomatów, a nawet tego co należy uznać za akceptowalne zasady wnioskowania. Inne poglądy na ten temat mieli w przeszłości logicy (np. Russel), inne formaliści (np. Hilbert), jeszcze inne intuicjoniści (np. Brouwer) (Prus-Wiśniowska 1995).

> *Geometria euklidesowa, która była pierwszym przykładem sformalizowanego systemu dedukcyjnego, stała się modelem wszystkich takich systemów. Geometria była wielkim poligonem doświadczalnym myślenia logicznego, a naukę geometrii traktowano, słusznie lub nie, jako podstawę do ćwiczenia się ucznia w takim myśleniu* (Davies, Hersh 1994, s. 18).

Uznanie aksjomatów oraz odpowiedniego sposobu wnioskowania oznacza, że należy uznać za poprawne wszelkie zdania otrzymywane z tych aksjomatów (lub innych zdań uznanych już w teorii) poprzez przyjęty sposób wnioskowania. Ten sposób wnioskowania w teorii matematycznej określany jest dedukcją, a cały sposób budowania tej teorii nazywamy właśnie aksjomatyczno-dedukcyjnym (Tocki 2000)[7]. Takie ujęcie tematu wyraźnie identyfikuje metodę matematyczną z wnioskowaniem typu dedukcyjnego i taki właśnie pogląd reprezentuje większość matematyków. Dążą oni do rygorystycznego przestrzegania dedukcji jako podstawowego sposobu działania w obrębie matematyki; chcą widzieć matematykę jako naukę o wynikaniu; przyjmują zatem pewne (czasem nawet dowolne) założenia i badają, co z nich wynika, a każdy wniosek z założeń – jeśli ma być przyjęty jako słuszny – musi być uprawomocniony dowodem.

> *W opinii niektórych dowód jest istotą matematycznego postępowania, bez dowodu nie ma matematyki. W opinii innych jest to nonsens, w matematyce jest wiele rodzajów postępowania* (Davies, Hersh 1994, s. 131).

Aby zdanie nazwać twierdzeniem teorii matematycznej, muszą zatem zostać spełnione określone formalne warunki konstatowania jego poprawności, czyli musi być przeprowadzony dowód, co jest często zadaniem trudnym, czasami wręcz wydaje się nieosiągalnym, pomimo powszechnego przekonania o prawdziwości hipotezy będącej przedmiotem tego dowodu[8]. *Słownik szkolny matematyka* podaje, że twierdzenie jest to

> *zdanie, którego prawdziwość została uzasadniona dowodem w danej teorii matematycznej* (Ciesielska, Edigarian, Kordyka, Witecka 2003, s. 227).

Kwestią dyskusyjną jest stopień formalizacji takiego dowodu matematycznego. Formalny dowód musi być wyrażony w formalnym języku, oparty na formalnych aksjomatach, a rozumowanie w takim dowodzie musi być oparte na formalnych regułach wnioskowania. Oczywiście dowód może być sformalizowany w różnym stopniu, wpływają na to liczne czynniki, w tym poziom doświadczenia matematycznego odbiorców tego dowodu. I tu pamiętajmy, że

---

[7] Okazuje się jednak, że rzecz nie jest tak oczywista, jeśli weźmiemy pod uwagę wcześniej już wspominane poglądy I. Lakatosa o quasi-empirycznym charakterze metod, którymi czasem posługuje się matematyka.

[8] Np. hipoteza Riemanna, hipoteza Poincaré'go, hipoteza Eulera.

> *prawdziwa miara długości dowodu musi uwzględniać nie tylko liczbę wierszy argumentacji, lecz także liczbę niezbędnych stron matematyki poprzedzającej te wiersze* (Dunham 1994, s. 125).

W języku potocznym termin *dowód* także bywa dosyć często używany; mówimy na przykład, że ktoś swym postępowaniem dał dowód głupoty. W *Encyklopedii PWN* (Sajko 2004) możemy przeczytać, że dowód jest to

> *środek służący do wykazania prawdziwości okoliczności ważnych dla rozstrzygnięcia sprawy* (s. 213).

Takie użycie jest już bliższe sensowi matematycznemu, ale uświadamia nam, że jest to termin funkcjonujący także poza matematyką i w związku z tym może nieść ze sobą pewne skojarzenia potoczne.

Dowód w matematyce jest jednym z zasadniczych jej pojęć, znaczenie poprawności dowodu jest wręcz decydujące. Dowód jest przecież argumentem, który uzasadnia prawdziwość twierdzenia, z którego potem będziemy korzystać nie zastanawiając się już nad prawomocnością tego zastosowania. W takim rozumieniu jest on najbardziej pewną i dokładną metodą uzasadniania zdań, jakimi rozporządza nauka (Pogorzelski, Słupecki 1970). Jedno z określeń dowodu w matematyce jest następujące:

> *dowód sformalizowany wyrażenia p na gruncie zbioru wyrażeń X polega na kolejnym przekształcaniu wyrażeń należących do X zgodnie z prawami przekształcania i wnioskowania tak, aby w wyniku tych operacji otrzymać wyrażenie p* (Turnau 1984).

W tym sformułowaniu użyto terminu *wnioskowanie*, często używanego także w języku potocznym. W węższym rozumieniu wnioskowanie oznacza dobieranie następstw dla zdań pewnych, już uznanych za prawdziwe. W szerszym rozumieniu jest to proces myślowy, w którym na podstawie zdań już przyjętych dochodzi się do nowego zdania, które było dotąd nieuznawane, a jego pewność nie musi być bezsprzeczna, może być jedynie potwierdzona częściowo. Wszelkie wnioskowania dzielą się zatem na niezawodne i zawodne, pełniące jedynie funkcję „uprawdopodobniającą". Do niezawodnych (według powszechnego mniemania) należy wnioskowanie dedukcyjne, a wśród różnych rodzajów wnioskowań zawodnych wyróżnia się wnioskowanie indukcyjne i wnioskowanie przez analogię.

Pogorzelski i Słupecki (1970) analizę pojęcia dowodu rozpoczynają od zwrócenia uwagi, że terminowi dowód nieodłącznie musi towarzyszyć termin przesłanka i niejawne założenie o jej prawdziwości. Przesłankami dowodu mogą być aksjomaty danej teorii, jej definicje (lub ich podstawienia) oraz podstawienia praw logicznych. Autorzy podają następującą definicję dowodu matematycznego:

dowodem wyrażenia a *na gruncie zbioru wyrażeń X jest skończony ciąg wyrażeń* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$ *(*$1 \leq k \leq n$*),* $\alpha_n = \alpha$*, wyrazy* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *są przesłankami. Dla każdego zaś i takiego że:* $k < i \leq n$*, wyraz* a_i *wynika z wcześniejszych wyrazów ciągu. Przesłankami dowodu mogą być te (i tylko te) wyrażenia, które są elementami zbioru X lub ich podstawieniami praw logicznych* (Pogorzelski, Słupecki, 1970, s. 73).

Prowadzenie dowodu matematycznego w myśl takich autorytarnych poglądów oznacza konieczność oderwania się od empirycznego lub heurystycznego rozumowania. Każdy krok takiego dowodu musi jasno wynikać z poprzednich lub być przyjętym aksjomatem bądź wcześniej udowodnionym twierdzeniem; rozumowanie niespełniające tego warunku nie jest dowodem. Ostatnim krokiem dowodu powinno być zdanie, które podlega procesowi dowodzenia, które w ten sposób staje się nowym twierdzeniem danej teorii (zgodnie z definicją terminu twierdzenie podaną przez A. Mostowskiego[9]). To właśnie żelazna, potencjalnie niepodważalna logika dowodów powoduje powszechne pojmowanie matematyki jako domeny prawd absolutnych, według niektórych myślicieli prawd niezależnych od człowieka.

Pogląd K. Poppera (za: Duda 1995), który twierdzi, że żadne dowody ani też inne potwierdzenia nie odgrywają w procedurach badawczych w matematyce tak istotnej roli, jaką im się powszechnie przypisuje, poddaje w wątpliwość tę nieomylność. Jeśli teoria przeszła pomyślnie przez kolejne próby obalenia, znaczy to tylko tyle, że nadal powinniśmy takie próby kontynuować, nie znaczy to natomiast, że którykolwiek z elementów naszego systemu należy traktować jako ustalony, nie możemy go traktować jako absolutnie prawdziwy[10]. V. Arnold, przychylając się do poglądu, że dowody nie odgrywają w matematyce najważniejszej roli, pisał:

Dowody w matematyce są tym, czym „spelling" (a nawet kaligrafia) w poezji. Pomyłki są ważne i kształcące, błędy są może i tak samo ważne jak dowody. Najważniejsze jest zrozumienie (za: Szurek 2006 s. 167).

---

[9] Wg, A. Mostowskiego (1948) *wyrażenie T nazywamy twierdzeniem w teorii matematycznej Q, jeżeli istnieje skończony ciąg funkcji zdaniowych w tej teorii* $T_0, T_1, T_2, \ldots T_n$*, czyniący zadość następującym warunkom:*

1. T_n *jest identyczne z T,*

2. Dla $i \leq n$ *wyrażenie* T_i *jest albo aksjomatem teorii Q, albo powstaje z tautologii rachunku zdań przez podstawienie za zmienne zdaniowe funkcji zdaniowych teorii Q, albo jest podstawieniem aksjomatu definicyjnego albo aksjomatu ekstencjonalności, albo wreszcie* T_i *powstaje z jednej lub dwu funkcji zdaniowych* T_j*,* T_k *poprzedzających* T_i w ciągu $T_0, T_1, T_2, \ldots T_n$ *przez jedną z operacji: podstawiania, odrywania, opuszczania kwantyfikatorów, dołączania kwantyfikatorów, uogólniania.*

[10] Zasada sformułowana przez K. Poppera nosi nazwę *zasady falsyfikacjonizmu* i jest przez wielu naukowców uważana za kryterium naukowości (Duda 1995). Podobnych poglądów jest znacznie więcej wśród filozofów i matematyków.

Taki punkt widzenia zwraca uwagę na to, że zarówno rygorystyczność rozumowań dowodowych, jak i „odczłowieczone" pojmowanie prawd matematyki nabierają drugorzędnego znaczenia.

> *Potoczne wyobrażenie o matematycznym dowodzie jako konstrukcji skończonej i doskonałej, będącej błyskiem geniuszu, nie odpowiada codziennej matematycznej rzeczywistości. Matematycy to wszak ludzie, dowodzenie jest działalnością ludzką, a więc nosi wszystkie jej cechy* (Turnau 2001, s. 29).

Ten cytat akcentuje udział czynnika ludzkiego w tej charakterystycznej twórczości matematycznej. Jeśli nawet otaczający nas świat ma obiektywną, niezależną od człowieka cechę nazywaną matematycznością, to już prowadzenie dowodów i weryfikacja ich poprawności mają swoją genezę tylko i wyłącznie w wysublimowanych potrzebach człowieka. Oznacza to, że powinniśmy traktować gotowe dowody matematyczne jako wytwory o szczególnej formie, demonstrowane i kierowane do określonego środowiska społecznego w celu uzyskania wspólnej oceny poprawności w tym środowisku w danym czasie. Dowody są więc wyjaśnieniami o pewnej szczególnej konstrukcji wypowiedzi ukierunkowanej na komunikację w danym środowisku społecznym, zgodną ze ściśle określonym zestawem reguł w tym środowisku przyjętych (Balacheff 1987).

Za koniecznym udziałem czynnika ludzkiego w procesie prowadzenia i uznawania nieomylności dowodów matematycznych przemawiają także poglądy zgodne ze stanowiskiem Kartezjusza, dla którego fundamentalne znaczenie ma kryterium prawdy obejmujące jej intelektualnie ujmowaną oczywistość (za: Wójtowicz 2007). Czy dla uznania danego stwierdzenia za prawdziwe, wystarczy, aby potwierdzało tę prawdziwość jedynie formalnie poprawne rozumowanie? Metodologicznie poprawna i merytorycznie trafna definicja obiektywnej prawdy powinna uwzględniać również intuicje, które są zawarte w tak zwanym *klasycznym ujęciu pojęcia prawdy*, według którego „prawdziwy" znaczy tyle, co „zgodny z rzeczywistością" (Tarski 1995)[11]. Wielu myślicieli twierdzi, że pierwotny sposób ujmowania prawdy ma właśnie charakter nieformalny, oparty na intuicji i subiektywnie odczuwanej prawdziwości weryfikowanego stwierdzenia. Najkrócej mówiąc, oznacza to, że przyjmujemy prawdziwość czegoś przy pomocy intuicji, natomiast wnioski konstatujemy przy pomocy dedukcji, ale jest ona wciąż przeplatana postrzeganiem intuicyjnym.

> *Kartezjusz pisze o ciągłym ruchu myśli, w ramach którego w intuicyjny i wyraźny sposób ujmujemy poszczególne etapy (człony) rozumowania* (Wójtowicz 2007, s. 4).

[11] Tymczasem brak jest definicji prawdy w języku potocznym: *na gruncie języka potocznego (i w odniesieniu do niego) niemożliwa jest nie tylko ścisła definicja pojęcia prawdy, lecz wręcz wykluczone jest konsekwentne operowanie tym pojęciem. […] Ścisła definicja prawdy jest możliwa tylko w odniesieniu do nauk sformalizowanych* (Tarski 1995, s. 79).

Trzeba podkreślić, że to właśnie intuicja czasem ma decydujące znaczenie w uznawaniu prawdziwości; dedukcja nie ma takiej siły (Fischbein 1982). Bywa, że niektórzy ludzie, mimo zapoznania się z formalnym dowodem jakiegoś faktu, intuicyjnie nie przyjmują tej prawdziwości do swojej świadomości. Na przykład studenci pierwszego roku studiów matematycznych (jeśli są na tyle odważni) mówią, że formalny dowód nie przekonuje ich, że liczb naturalnych jest tyle samo, co liczb parzystych i tyle samo, co wszystkich liczb wymiernych. Nawet wielki matematyk Cantor pisał w liście do innego wielkiego matematyka Dedekinda na temat wzajemnie jednoznacznego odwzorowania odcinka na kwadrat:

> *Widzę, ale nie wierzę* (za: Turnau 2001).

Tego typu obserwacje upoważniają do refleksji, że chociaż dedukcja i rozumowania formalne pretendują do niepodważalnego i autorytarnego stwierdzania prawd absolutnych, a wśród filozofów matematyki przeważa rygorystyczna opinia, że podstawowym celem aksjomatyczno-dedukcyjnego ujmowania wiedzy matematycznej jest właśnie jej oddzielenie od intuicyjnych lub empirycznych treści[12] (Tocki 2000), to jednak właśnie intuicja ma dla człowieka znaczenie pierwszorzędne przy analizowaniu, komunikowaniu i przyjmowaniu prawdziwości stwierdzeń matematycznych.

> *Często słyszymy, że matematyka polega głównie na „dowodzeniu twierdzeń". Czy pisanie polega głównie na „pisaniu zdań"? Praca matematyka to przede wszystkim plątanina zgadywania, analogii, myślenia życzeniowego i frustracji: dowodzenie, dalekie od istoty odkrywania, jest najczęściej sposobem upewnienia się, że umysł z nami nie igra. […] Opanować matematykę to opanować nieuchwytny widok, to przyswoić sobie biegłość wirtuoza, który nie może przecież opierać swojej sztuki na kryteriach* (Davis, Hersh 1994, s. 11).

Te kwestie są szczególnie istotne dla zagadnień związanych z nauczaniem-uczeniem się matematyki. Dla celów edukacyjnych powinniśmy pamiętać, że najistotniejszą cechą, którą powinien zachować nawet sformalizowany dowód, jest jego natura objaśniająca (Hanna 1989; Hersh 1993). Może się zdarzyć, że dowód formalnie poprawny i elegancki nie wnosi nic do zrozumienia twierdzenia i wręcz może nie być przekonujący (Hanna 1989).

Przegląd literatury z zakresu dydaktyki matematyki pokazuje ciągle trwające zainteresowanie badaczy tematyką ukierunkowaną na rozumowania typu dowodowego w szkolnej matematyce. Obserwujemy stały wzrost liczby prac badawczych skierowanych na nauczanie i uczenie się dowodu, dotyczących zarówno teorii, jak i praktycznych jej zastosowań w szkole. Wyrazem aktualności tematu są również wciąż trwające

[12] Ukoronowaniem takiego podejścia jest uprawianie matematyki tylko i wyłącznie metodą aksjomatyczną. Doprowadzenie tej metody do granic możliwości to czysta formalizacja (patrz grupa Bourbakistów), która zmienia uprawianie matematyki w grę symboli nieskażonych żadną interpretacją.

przesunięcia tematyki z tym obszarem związanej w planach i programach nauczania matematyki. Miejsce dowodu i dowodzenia nie jest w tych dokumentach kwestią raz na zawsze ustaloną i bezsporną. Reformy dotyczące edukacji matematycznej przeprowadzane od wielu lat na całym świecie, aktualne i dzisiaj, zmieniały traktowanie tych tematów przez dokumenty oświatowe sterujące nauczaniem matematyki w wielu krajach świata. Zmiany dotyczą wyraźnego (lub mniej wyraźnego) ukazywania rygoryzmu i formalizmu rozumowań matematycznych. Jak można się domyślić, te tendencje mają dwa rozbieżne kierunki. Jeden trend dotyczy akcentowania w nauczaniu matematyki intuicyjnych rozumowań bez dowodów. Głoszący ten pogląd dydaktycy i nauczyciele utrzymują, że z powodu trudnych warunków nauczania-uczenia się matematyki w systemie klasowo-lekcyjnym należy dokonać wyboru pomiędzy kształtowaniem u uczniów umiejętności dowodzenia i uzasadniania a rozwijaniem ich kompetencji w zakresie rozwiązywania zadań i problemów matematycznych, które decydenci uznają za bardziej użyteczne w życiu człowieka. Taki pogląd, jeśli jest radykalny, traktuje dowody i dowodzenie jako przeszkodę na drodze do zrozumienia matematycznego, a nie drogę do tego rozumienia (Hanna 2000). Funkcjonują nawet poglądy dosyć ekstremalne; ubolewa się np., że:

> *dowody to okropności wymagane przez czasopisma naukowe, […] czy naprawdę potrzebujemy dowodu w ogóle? Szczególnie w szkołach? [...] Dlaczego na ziemi nie możemy – zdecydowana większość nas – po prostu przyjmować, że coś jest intuicyjne lub bardzo prawdopodobnie prawdziwe, lub po prostu oczywiste?* (Barnard za: Hanna 2000).

Przeciwstawną tendencją zmian wizerunku metody matematycznej w nauczaniu jest podkreślanie uzasadnień i dowodów jako koniecznego i niezbędnego elementu kształcenia matematycznego. Uznaje się, że dowodzenie, a nawet uczenie się gotowych dowodów, nie jest pozbawione ważnej wartości edukacyjnej. Takie idee przyświecały reformom przeprowadzanym w nauczaniu szkolnym w latach 1958–1972. W niektórych krajach Europy Zachodniej, m.in. w Belgii, Francji i w Niemczech, nastąpiła wówczas fala zmian w zakresie treści programowych i odzwierciedlania tych treści w stylu i warunkach nauczania. Zmiany te miały ukazać matematykę w nauczaniu jako dynamicznie, abstrakcyjnie i autonomicznie rozwijającą się dziedzinę nauki posługującą się dedukcją formalną jako swoim głównym narzędziem rozwoju (zgodnie z teorią Hilberta popieraną przez Bourbakistów) (Krygowska 1958). Zdania na temat możliwości adaptacji takiej filozofii w nauczaniu szkolnym były podzielone, a poglądy i reformy za nimi idące nieraz bardzo radykalne. Reformami tymi zajmowali się wybitni matematycy i psychologowie, np. J. Piaget (1955), G. Choquet (1967), G. Papy (1962). W Polsce reformy lat 60. nie były zbyt radykalne[13]. Lata 70. natomiast cechowało powolne odwracanie się od trendów reformatorskich w Europie. W Polsce

[13] Znalazły swój wyraz m.in. w tym, że w programie II klasy szkoły średniej z 1966 r. pojawił się cały blok tematów związanych z logiką, z zastrzeżeniem, iż tylko dokładne przyswojenie tych

ten odwrót wyraźnie widać np. w konstrukcji programu nauczania dla liceum ogólnokształcącego z roku 1984, w którym nie ma już jawnie zawartych elementów logiki, natomiast z dedukcji globalnej w geometrii rezygnuje się całkowicie. Tendencja do rezygnacji z akcentowania dedukcji i dowodzenia w polskich programach nauczania matematyki w następnych latach się pogłębiła, we współczesnych wskazaniach programowych ta tematyka występuje wręcz szczątkowo (będzie to przedmiotem opisu w rozdziale 6).

Nie we wszystkich krajach kierunek zmian jest taki sam. Na przykład National Council of Teachers of Mathematics (USA) w dokumencie z 2000 roku pt. *Principles and Standards for School Mathematics* (w przeciwieństwie do dokumentu poprzedniego, z 1989 roku, gdzie pojęcie dowodu praktycznie zniknęło z programu nauczania) zaleca prowadzenie rozumowań i dowodów jako część programu nauczania matematyki na wszystkich poziomach tego nauczania:

> *uczniowie powinni umieć:*
> • *rozpoznać rozumowanie i dowód jako fundamentalne aspekty matematyczne;*
> • *badać matematyczne przypuszczenia i stawiać hipotezy;*
> • *rozwijać i oceniać matematyczne argumenty i dowody;*
> •*wybierać i używać różnych rodzajów rozumowania i metod dowodzenia* (Hanna 2000).

Są to bardzo wyraźne wskazania dla autorów programów nauczania i nauczycieli, którzy te programy realizują.

Wiele prac naukowych w dziedzinie dydaktyki matematyki pokazuje, że niestety nauczanie matematyki odnoszące się do dowodu matematycznego wydaje się być nieefektywne w wielu krajach, niezależnie od tego jak to opisują ich dokumenty oświatowe i jak jest ta nauka zorganizowana. Bogaty przegląd tytułów i autorów prac dotyczących tej tematyki (zestawiony m.in. na stronie internetowej: http://www-didactique.imag.fr/preuve/) pokazuje, że uczniowie na wszystkich poziomach (łącznie ze studiami matematycznymi) mają zauważalne trudności z uzmysłowieniem sobie sensu i przebiegu rozumowania typu dowodowego. W literaturze dydaktycznej wyróżnia się siedem głównych źródeł tych trudności. Stwierdza się, że uczniowie i studenci:

1. nie znają definicji potrzebnych pojęć, nie potrafią z nich korzystać;
2. słabo rozumieją pojęcia matematyczne na poziomie intuicyjnym;
3. mają niewystarczające wyobrażenia o obiektach matematycznych, aby przeprowadzać dowody z ich użyciem;
4. nie są zdolni (lub nie są chętni) do generowania i wykorzystywania własnych przykładów;
5. nie potrafią pojmować całkowitej struktury dowodu;

---

tematów będzie warunkiem osiągania pozytywnych wyników w dalszym nauczaniu matematyki. Geometria w dalszym ciągu traktowana była w nauczaniu jako przykład teorii globalnie dedukcyjnej.

6. nie rozumieją i nie potrafią używać języka matematycznego i symboli;

7. nie wiedzą, jak rozpoczynać dowody[14].

Wśród tych przyczyn nie wymienia się ważnego aspektu trudności uczących się, związanej z częstym zafałszowanym i negatywnym postrzeganiem roli i genezy dowodów w uprawianiu matematyki kształtowanym w trakcie nauczania i funkcjonujących w związku z tym różnych uprzedzeń i negatywnych przekonań.

Najbardziej typowa sytuacja, z jaką spotyka się uczeń na lekcjach matematyki, to „ćwiczenia na dowodzenie" (Prus-Wiśniowska 1995), w których to, co ma być przedmiotem rozumowania dowodowego, jest bezpośrednio wskazane i jednoznaczne.

> *Nie ma w nich nawet śladu niepewności, intuicji, wejścia na błędną drogę ani pomyłek, które nieodłącznie towarzyszą nawet wybitnemu matematykowi, kiedy próbuje rozwiązać nowy dla niego problem. Większość problemów matematycznych, w przeciwieństwie do zadań w podręcznikach, rodzi się z niejasnych i niepewnych sytuacji; następnie pojawia się bardziej wykrystalizowana idea, sensowne przypuszczenie – wynik, o którym matematyk myśli, że jest prawdziwy. […] Następnie, kiedy teza jest już sformułowana, trzeba podjąć następny krok, nie mniej ważny i nie mniej trudny: w drodze logicznej argumentacji trzeba pokazać, że prawdziwość owej tezy jest konieczną konsekwencją założeń* (Prus-Wiśniowska 1995, s. 168).

Pozostaje otwarte (i w pewnym sensie retoryczne) pytanie: czy nasz przekaz matematyki szkolnej oddaje ową niepewność stwierdzeń matematycznych, potrzebę ich testowania przy użyciu różnych metod (niekoniecznie ścisłych, formalnych)? Ta nieuporządkowana i naturalna faza twórczości matematycznej jest często skrzętnie ukrywana (zarówno przez zawodowego matematyka, jak i nauczyciela lub podręcznik), a uczniowie pozostają przekonani o konieczności posiadania nadzwyczajnych zdolności i umiejętności dla prowadzenia rozumowań omawianego typu. A przecież naturalna droga rozumowania matematyka bardzo różni się od tej elegancko przedstawionej w podręczniku, ta droga bywa kręta i nielogiczna, a cel działania ukryty i niekoniecznie zgodny z racjonalnym myśleniem.

> *Tak więc matematyka jest przedmiotem, w którym są dowody. […] Na uniwersytecie typowy wykład zaawansowanej matematyki, zwłaszcza prowadzony przez wykładowcę o zainteresowaniach „czystych", składa się wyłącznie z definicji, twierdzenia, dowodu, definicji, twierdzenia, dowodu – wypisywanych uroczyście i monotonnie. Dlaczego tak się dzieje? Jeśli, jak się twierdzi, dowód jest uprawomocnieniem i poświadczeniem, to można by pomyśleć, że z chwilą kiedy raz został przyjęty przez kompetentną grupę uczonych, reszta uczonego świata powinna powitać to z zadowoleniem i iść dalej. Dlaczego matematycy i ich uczniowie uznają za rzecz wartościową dowodzenie po raz któryś z kolei twierdzenia Pitagorasa itd.?* (Davis, Hersh 1994, s. 133).

W podtekście zacytowanego stwierdzenia można się domyślić retoryczności zadanego pytania.

[14] Na podstawie opracowania R. Moore (1994).

3.2. Aspekty i funkcje dowodów matematycznych w teorii i praktyce uprawiania matematyki

Studia z filozofii i historii matematyki pokazują, że występowały i występują sprzeczne opinie na temat roli dowodu w matematyce, o czym była już mowa. Wielu autorów w sposób szczególny zajmuje się tematyką związaną z badaniem roli i znaczenia dowodu w uprawianiu matematyki i jej nauczaniu. Podkreślają oni istnienie społecznego aspektu dowodu matematycznego, przejawiającego się w potrzebie komunikowania wyników pracy matematyków. N. Balacheff (1987, 1990) wyróżnia dwa aspekty dowodu, odnosząc je do funkcji, jaką pełni dowód w różnych układach interakcji społecznej. Możemy wyróżnić (za autorem) różne takie układy odniesienia. Pierwszy dotyczy dowodu w szerokim kontekście jego funkcjonowania w społeczności osób zainteresowanych (np. w społeczności matematyków). Wówczas możemy zauważyć, że na dowody matematycznych zdań ogólnych możemy patrzeć przez pryzmat ich aspektu poznawczego *(cognitive aspect of proof)* i aspektu społecznego *(social aspect of proof)*. Oba aspekty wieloma cechami się zasadniczo od siebie różnią. Poznawcze spojrzenie na rolę i budowę dowodów matematycznych każe zauważać, że nie polegają one jedynie na zwykłej werbalizacji właściwości obiektów matematycznych i relacji pomiędzy nimi. Na tym poziomie rozpatrywania dowodów matematycznych wymaga się szczególnego stanu użytej wiedzy, która powinna być dobrze zorganizowana w teorii i przedstawiana z użyciem odpowiedniego języka oraz uznawalności reguł dedukcyjnych i faktów poprzednio uznanych. Akcentuje się w ten sposób przede wszystkim formalną stronę dowodu matematycznego. Takie poznawcze spojrzenie na dowód powoduje ograniczenie jego znaczenia do rozwijania wewnętrznej struktury wiedzy matematycznej, a jeśli chcemy dostrzec jakiś czynnik ludzki, to ogranicza się on jedynie do używania dowodów jako środka komunikacji pomiędzy matematykami.

Oprócz aspektu poznawczego Balacheff każe na rolę dowodu matematycznego patrzeć przez pryzmat odniesienia społecznego. W aspekcie społecznym dowód służy człowiekowi do przekonywania innych ludzi o prawdziwości stwierdzeń o charakterze matematycznym, czyli jest narzędziem i środkiem stwierdzania faktu społecznego uznania prawdziwości danego stwierdzenia. W takim ujęciu na plan pierwszy wysuwa się funkcja komunikacji (niekoniecznie pomiędzy zawodowymi matematykami) ukierunkowanej na zrozumienie treści oraz społecznej walidacji dowodu matematycznego. Dowód w tym rozumieniu jest środkiem retoryki mającej stwierdzić fakt społecznego uznania prawdziwości danego stwierdzenia, jego poprawność formalna schodzi na plan dalszy.

Społeczny aspekt dowodu i dowodzenia dostrzegają też inni autorzy, m.in. wspominany już wcześniej W. Thurston (1994). Podkreśla on rolę komunikowania wyników procesu dowodzenia, w jego opinii ten sposób komunikowania (m.in. stopień ścisłości i formalizacji dowodu) determinowany jest przez społeczność, do której odnosi się komunikacja. Natomiast główną siłę dowodu postrzega w zastosowaniach bogactwa idei zawartych w tym dowodzie, mając wciąż na myśli jego społeczny aspekt.

Pogląd, że dowód matematyczny jest środkiem komunikacji społecznej, a jego ważną rolą jest wzbogacenie intuicyjnego rozumienia faktu, o którym mówi twierdzenie, posiada ważne implikacje dla określenia roli, jaką dowód może pełnić w danym procesie poznania jednostki (patrz: Davis, Hersh 1981; Schoenfeld 1985; Hanna 1989 i in.). Rozważając ten cel w ujęciu dialektycznym możemy mówić o dowodzie pragmatycznym *(pragmatic proof)* i dowodzie intelektualnym *(intellectual proof)* (Balacheff 1987). Dowód pragmatyczny to proces, który polega na działaniu, a celem tego działania jest weryfikacja poprawności badanej hipotezy[15]. Zarówno środki, jak i język używany w trakcie takiego działania nie muszą i zwykle nie spełniają wymogów formalnej ścisłości rozumowania dedukcyjnego. Takie dowody polegają na obserwacji powodów prawdziwości stwierdzenia ogólnego bez konieczności ich sformułowania. Jest to „potwierdzanie przez działanie, a nie przez mowę" (Balacheff 1987, s.158). Na wyższym poziomie rozumowania te przyczyny prawdziwości mogą być już werbalizowane, ale nadal są silnie związane z czynnościami wykonywanymi np. na jakimś przykładzie (reprezentującym cechy ogólności). Dowód intelektualny natomiast wykorzystuje już werbalizację właściwości obiektów i ich relacji, nie polega na zwykłym tłumaczeniu działania słowami, ale wymaga poprawnego języka matematycznego i stosowania reguł rozumowania przyjętych jako obowiązujące. Jest w pewnym sensie produktem gotowym, ukształtowaną formą wyników działania.

Inni autorzy jeszcze bardziej szczegółowo różnicują funkcje, jakie w konstrukcji i rozwoju teorii matematycznej pełni dowód matematyczny (Bell 1976; Hanna, Jahnke 1996; De Villers 1999; Hanna 2000). I tak dowód w teorii i praktyce uprawiania matematyki może pełnić następujące funkcje:

1. weryfikacyjną (orzeczenie poprawności hipotezy);
2. wyjaśniającą (badanie powodu, dla którego dane stwierdzenie jest prawdą);
3. przekonującą (dowodzenie dla społecznej aprobaty);
4. systematyzacyjną (porządkowanie różnych wyników zgodnie z systemem głównych pojęć i twierdzeń);
5. komunikacyjną (negocjacja znaczeń i przekazywanie gotowych wyników);
6. estetyczną (elegancja i klarowność rozumowań);
7. satysfakcjonującą (przeprowadzenie dowodu może być wyzwaniem intelektualnym, towarzyszy temu poczucie satysfakcji i odniesienia sukcesu);
8. transferową (dowody mogą zaoferować techniki do „atakowania" innych problemów i zrozumienie dla innych zagadnień).

---

[15] Balacheff używa sformułowań: *dowód w akcji (proof in action)* powołując się na Z. Semadeniego (1984) oraz *twierdzenie w akcji* (*théorème-en-acte,)* podkreślając w ten sposób aktualność procesu walidacji hipotezy.

Poszczególne funkcje dowodu opiszę i zilustruję odpowiednimi przykładami.

Pojawianie się pomysłów w trakcie działalności matematycznej, czy to na niskim, czy na wysokim poziomie uprawiania matematyki, wiąże się często z koniecznością stawiania hipotez, a następnie z ich weryfikacją (Mason 2005). Wszyscy oczywiście wiemy o tym, że każda taka hipoteza – jeśli nie jest już wcześniej przyjętym w teorii twierdzeniem – nie może zostać uznana jako prawdziwa, dopóki nie zostanie precyzyjnie uzasadniona. W ten sposób uwypuklona zostaje *funkcja weryfikacyjna* dowodu matematycznego. Kiedy pojawia się potrzeba podjęcia decyzji co do prawdziwości jakiegoś stwierdzenia natury ogólnej, musimy podjąć próbę uzasadnienia tej prawdziwości przeprowadzając dowód, który pełni wówczas właśnie rolę weryfikacyjną. Taka sytuacja może często mieć miejsce w trakcie szkolnego nauczania-uczenia się matematyki. Np. rozwiązanie nawet prostego zadania, polegającego na konieczności odpowiedzi na pytanie:

> *Która z liczb jest większa: $2n$ czy n^2?*

wymusza na uczniu rozwiązującym to zadanie postawienie hipotezy (prawdopodobnie na podstawie podstawienia za zmienną n kilku początkowych liczb naturalnych) oraz jej weryfikację poprzez uzasadnienie typu dowodowego.

Czasem hipoteza w zadaniu już jest postawiona, a jej weryfikacja ma właśnie charakter dowodu matematycznego. Rozważmy na przykład stwierdzenia:

> • *Złożenie jednokładności o tym samym środku O jest jednokładnością o środku w punkcie O.*
> • *Jeżeli każda z dwóch liczb k i l jest podzielna przez m, to również suma tych dwóch liczb jest podzielna przez m.*

Zadaniem rozwiązujących uczniów jest za każdym razem przeprowadzenie rozumowania, które usunie ewentualne wątpliwości co do poprawności hipotez. To rozumowanie będzie wówczas dowodem pełniącym funkcję weryfikacyjną.

Funkcja wyjaśniająca dowodu matematycznego jest funkcją najbardziej akcentowaną w twórczości zawodowych matematyków (Dunham 1994; Hanna 2006). Czasem pytanie: d l a c z e g o coś jest prawdą, interesuje matematyków bardziej od pytania: c z y jest to prawdą. Potwierdzają to np. dowody tzw. twierdzeń oczywistych, takich jak:

> *Średnica dzieli okrąg na dwie równe części;*
> $1<2$;
> $(-1)\times(-1)=1$.

Dowód tego drugiego i trzeciego twierdzenia pojawia się czasem w kursie analizy matematycznej na pierwszym roku studiów, a studenci są szalenie zdziwieni, że w ogóle ktoś może odczuwać potrzebę, żeby taki „fakt” udowodnić.

Oczywiście czymś więcej dowód matematyczny staje się w sytuacjach, gdzie stwierdzenia są o wiele mniej oczywiste, np.

Ciąg liczb pierwszych nie jest skończony.

W przypadku tego twierdzenia szczególnie wyraźnie widać przedkładanie przez matematyków funkcji wyjaśniającej nad funkcję weryfikacyjną. Gdyby bowiem wystarczyło jednorazowe stwierdzenie, że wspomniane twierdzenie jest prawdziwe, po cóż tworzono by różne inne dowody? A tymczasem dowodów na to twierdzenie jest wiele. W *Dowodach z Księgi* (Aigner, Ziegler 2002) podano sześć 6 różnych przykładów. Wszystkie one odpowiadają na to samo pytanie: d l a c z e g o?, ale różnią się wykorzystanymi środkami i narzędziami matematycznymi, a cel tworzenia takiej różnorodności wychodzi poza jedynie weryfikację prawdziwości tego twierdzenia. Oczywiście można zastanawiać się nad sensem dowodzenia tego samego twierdzenia różnymi sposobami i pytać, czy inne dowody (dodatkowe) są konieczne, jeśli jeden dobry dowód już mamy? W pragmatycznym ujęciu nie ma sensu tworzenia innych dowodów, tzn. nie ma logicznej konieczności uzasadniania twierdzenia więcej niż raz.

> *Jednak istnieje motywacja estetyczna do przebadania tego samego w inny sposób. Przecież fakt, że kiedyś napisano i wykonano jakąś pieśń miłosną, nie zapobiega śpiewaniu o miłości przez innych pieśniarzy, aczkolwiek z inną muzyką, może innymi słowami, w innym rytmie. Podobnie wszystkie te różne dowody […] odsłaniają różne matematyczne linie melodyczne i rytmy, i nie dlatego mogą być mniej piękne, że dotyczą starego tematu* (Dunham 1994, s. 133).

Zacytowana wypowiedź, oprócz różnorodności metod dowodu, dotyka też kwestii jego estetyki, nadając funkcji estetycznej odcień subiektywizmu. Na przykład dowód nie wprost jest dla niektórych osób elegancki, a dla innych jest tylko próbą ominięcia trudności z przeprowadzeniem dowodu wprost.

Rozważanie dowodu matematycznego przez pryzmat jego *funkcji przekonującej* wyraźnie wskazuje na istnienie co najmniej dwóch stron procesu przekonywania, musi być osoba (lub osoby) przekonywane oraz element przekonujący (np. inna osoba lub gotowy tekst dowodu). Przykładem dowodu pełniącego funkcję przekonującą jest np. dowód, że:

$0,(9)=1.$

Często nawet dla studentów kierunku matematyka to stwierdzenie nie jest oczywiste. Bywa, że nawet po przeanalizowaniu formalnego dowodu tej równości intuicje studentów i tak pozostają z nim w sprzeczności. Podobna sytuacja ma miejsce, gdy trzeba przekonać kogoś, że parzystych liczb naturalnych jest tyle samo, co wszystkich liczb naturalnych, czyli że:

Zbiór liczb parzystych jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.

Gdyby nasi uczniowie (czy studenci) byli odważniejsi, zapytaliby: *jak to możliwe? Przecież rozważając liczy parzyste biorę „co drugą" naturalną, więc jak może ich być tyle samo?* Rozważana funkcja dowodu matematycznego wykracza poza merytoryczną stronę wiedzy matematycznej. Dotyka sfery przekonań, wierzeń i postaw uczących się i leży na granicy tych obszarów.

Funkcja systematyzacyjna dowodu matematycznego polega na możliwości wykorzystania tego dowodu jako elementu pomagającego dedukcyjnie zorganizować jakiś fragment matematycznej teorii. Myślę, że dobrym przykładem będzie tu *zasada abstrakcji* pozwalająca przewidywać postać zbiorów ilorazowych powstałych w wyniku klasyfikacji wyjściowego zbioru elementów i odpowiedniego określenia relacji równoważnościowej pomiędzy tymi elementami. Jeśli raz poznaliśmy budowę i sposób działania zasady abstrakcji (Rasiowa 1968), przekonaliśmy się o poprawności poszczególnych jej kroków, wystarczy później (w odniesieniu do jakiegoś konkretnego zbioru) jedynie informacja o równoważności zdefiniowanej relacji pomiędzy elementami rozważanego zbioru, by móc zastosować schemat konstrukcji zbioru ilorazowego i wiedzieć jak (w ścisłym związku z omawianym sposobem postępowania) możemy definiować niektóre pojęcia matematyczne. Taki sposób rozumowania określa pewien schemat pozwalający wyróżnić charakterystyczny sposób rozumowania dla definiowania klas pojęciowych a dowód ustala relacje i powiązania pomiędzy faktami, które bez dowodu wydawałyby się niespójne.

Kolejna wymieniana w literaturze funkcja dowodu matematycznego to jego *funkcja komunikacyjna*. Ta perspektywa patrzenia na dowód ponownie (podobnie jak funkcja przekonująca) akcentuje czynnik ludzki w procesie dowodzenia i posługiwania się gotowymi dowodami stwierdzeń matematycznych. Chodzi tu o negocjację znaczeń użytych elementów języka matematycznego pomiędzy dwoma zainteresowanymi stronami komunikacji i przekazywanie sobie matematycznej wiedzy poprzez gotowe wytwory. Gotowy, zredagowany dowód matematyczny nie oddaje procesu jego tworzenia, jest komunikatem dla innych (matematyków bądź osób uczących się) o prawdziwości twierdzenia, które w ten sposób zostaje przyjęte do teorii. Komunikacja, o której tu mowa, może być prowadzona na różnych poziomach wiedzy matematycznej i w różnych celach tego przekazu. Na wysokim poziomie twórczości matematycy przekazują swojej społeczności np. nowe dowody twierdzeń już uznanych za prawdziwe lub też dowody twierdzeń dotąd nieudowodnionych. W takiej sytuacji chodzi o wspólne uznanie prawdziwości twierdzenia przez zaaprobowanie go przez odpowiednią grupę społeczną.

Funkcja estetyczna dowodu dotyczy w sposób bardzo istotny sfery emocjonalno-uczuciowej poznania matematycznego. Zdaniem niektórych matematyków (i nie tylko) piękno matematyki objawia się właśnie w klarowności rozumowań przeprowadzanych przy rygorystycznym przestrzeganiu reguł logiki. Niektóre dowody matematyczne, choć uznane za poprawne, bywają przez matematyków uznawane za brzydkie, jeśli są np. zbyt długie lub zawiłe. Poczucie piękna dowodu matematycznego nie polega najczęściej na jego złożoności, ale wręcz przeciwnie, na prostocie środków i reprezentacji tego dowodu. To właśnie stanowi siłę napędową tworzenia różnych dowodów już wcześniej dowiedzionych twierdzeń (Dunham 1994).

> *Niedostrzeganie elementu estetycznego w matematyce jest szeroko rozpowszechnione i może rodzić wrażenie, że matematyka jest sucha jak kurz, ekscytująca jak książka telefoniczna itd. Na odwrót zaś, uznanie tego elementu sprawia, że przedmiot cudownie ożywa i rozkwita jak żadne inne dzieło ludzkiego umysłu* (Davis, Hersh 1994, s. 150).

Swoją *funkcję satysfakcjonującą* dowód matematyczny pełni głównie w sensie sprostania przez człowieka wyzwaniu intelektualnemu, jakim jest poprawne przeprowadzenie tego dowodu. Odnosi się więc znowu wyraźnie do czynnika ludzkiego w trakcie procesu dowodzenia. Takie uczucie satysfakcji może pojawiać się na różnym poziomie wiedzy i doświadczenia matematycznego człowieka; zarówno w przypadku wielkich i zaawansowanych, trudnych do uzasadnienia twierdzeń, jak i na niższym, szkolnym poziomie uprawiania matematyki. Uczniowi gimnazjum, który przeprowadzi (lub tylko zrozumie) dowód twierdzenia Pitagorasa, także towarzyszy poczucie satysfakcji i ma on wrażenie odniesienia sukcesu. Omawiana funkcja dowodu matematycznego wykracza poza sferę merytorycznej poprawności czy niepoprawności dowodu. Mówimy tu znów o sferze emocjonalno-motywacyjnej procesu poznawczego, sferze, o istotnym znaczeniu której pisze wielu dydaktyków matematyki na całym świecie, a która w praktyce nauczania matematyki wciąż bywa zaniedbywana.

Dowody twierdzeń matematycznych mogą zaoferować techniki przydatne w rozwiązywaniu innych problemów i zrozumieniu innych zagadnień. W tym sensie przyjmuje się, że pełnią one *funkcję transferową* w schematach działania i rozwoju wiedzy matematycznej. Przykładem tego jest dowód wykorzystujący zasadę indukcji matematycznej (schemat możliwy do wykorzystania, gdy mamy do udowodnienia jakąś własność dotyczącą liczb naturalnych, a nie mamy innego pomysłu na „zaatakowanie" problemu). Dotykamy wykorzystywania potencjalnych analogii pomiędzy przedmiotami rozumowań i technikami dowodów. Ta analogia może dotyczyć też podobieństwa pomiędzy środkami i narzędziami matematycznymi możliwymi do wykorzystania w odrębnych (z pozoru) sytuacjach. Tę funkcję podkreśla cytowany już kilkakrotnie W. Thurston (1994), który w niej właśnie upatruje główną siłę dowodu matematycznego.

Świadomość istnienia wielorakich funkcji dowodu matematycznego jest ważna, szczególnie gdy próbuje się celowo zaplanować wprowadzanie dowodu w sposób systematyczny w nauczaniu matematyki (Hanna 2000). Skoro tak wielostronna jest możliwa perspektywa patrzenia na miejsce dowodu w matematyce, skoro chcemy podjąć próbę wprowadzania uczniów w metodologię matematyki, powinniśmy pozwolić im stopniowo doświadczać różnych funkcji dowodu matematycznego w trakcie całego szkolnego nauczania. Inaczej doświadczenie ucznia nie będzie pełne.

Oczywiście, nie wszystkie omówione funkcje są istotne dla uczenia się matematyki w tym samym stopniu (Hersh 1993). Ale ważny jest fakt, że tak różnorodne pojmowanie roli dowodów mogło powstać wyłącznie jako produkt długiego rozwoju historycznego. Każdy uczeń powinien w miarę upływu lat nauki mieć szanse doświadczyć wszystkich kontekstów, zaczynając oczywiście od podstawowych funkcji dowodu: weryfikacji i wyjaśnienia. Podstawowe pytanie, na które dowód powinien odpowiadać w klasie, brzmi z pewnością: dlaczego? To pytanie pojawia się w klasie stosunkowo często, rzadziej (niestety) nauczyciel pyta uczniów, czy zachodzi jakiś warunek? – spodziewając się w odpowiedzi uzasadnienia typu dowodowego. Zwróćmy uwagę, że w sytuacji szkolnej nie każda odpowiedź na pytanie dlaczego ma jednakową wartość edukacyjną (przeciwnie niż to jest w zaawansowanym uprawianiu matematyki – tam każdy poprawny dowód jest jednakowo użyteczny). W kontekście nauczania-uczenia się największą wartość ma taki dowód, który najlepiej służy zrozumieniu rozważanego zakresu matematyki, który uczniowi pomaga wyjaśnić skomplikowane związki i relacje, natomiast różnorodność dowodów, ich walory estetyczne mają znaczenie drugorzędne.

3.3. Wyjaśnianie, argumentowanie, uzasadnianie i dowodzenie jako terminy używane w szkolnym nauczaniu-uczeniu się matematyki

W języku polskim używa się wielu terminów dla określenia umiejętności myślenia przyczynowo-skutkowego i uprawomocniania matematycznych zdań o charakterze ogólnym, np. wyjaśnianie, przekonywanie, argumentowanie, wywodzenie, motywowanie, uzasadnianie, potwierdzanie czy dowodzenie.

Mamy do czynienia z pewnym chaosem terminologicznym, który w mojej opinii może być jedną z przyczyn uczniowskich problemów związanych z uzasadnianiem w warunkach szkolnych. Można sobie bowiem łatwo wyobrazić taką sytuację, gdzie nauczyciel wydaje uczniowi polecenie, którego wykonanie uczeń rozumie inaczej niż on. Sytuacja może dotyczyć odmiennego rozumienia przez nauczyciela i ucznia sposobu wykonania polecenia typu *uzasadnij, że…* W sposób trochę żartobliwy ilustruje to rys. 21.

Rys. 21

Nauczyciel wydaje uczniowi polecenie: *uzasadnij, że…*, ma przy tym na myśli coś, czego nie wyartykułował. Oczekuje od ucznia przeprowadzenia rozumowania typu dedukcyjnego, uzasadniającego nowy fakt przy wykorzystaniu faktów przyjętych już wcześniej jako znane i prawdziwe. Stosując terminologię Balacheffa (1990), można przypuszczać, że nauczyciel ma na myśli poznawczy aspekt oczekiwanego od ucznia rozumowania. Jednak czy tak samo myśli uczeń? Być może uczeń poszukuje w umyśle argumentów mających przekonać nauczyciela o prawdziwości danego stwierdzenia, argumentów jakichkolwiek, w sposób niekoniecznie akceptowalny metodologicznie. Uczeń jest na społecznej płaszczyźnie rozumowania. Taka sytuacja często ma miejsce w klasie szkolnej. Nauczyciel używa różnych słów na określenie tej samej czynności ucznia – uzasadnienia ukierunkowanego dedukcyjnie – natomiast uczeń nie z każdym terminem użytym przez nauczyciela wiąże ten sam metodologiczny kontekst.

W zasadzie wszystkie terminy wymienione na początku tego podrozdziału mogą być użyte do określenia logicznej zależności pomiędzy pytaniem i odpowiedzią. Najczęstsze pytanie, które kojarzy się z tymi terminami, to pytanie: dlaczego? Jest to pytanie na tyle ogólne, że odpowiedź może być bardzo różna. Może chodzić o podanie formalnego dowodu matematycznego albo o podanie jakiegokolwiek argumentu pozwalającego zwizualizować sytuację, wyjaśnić ją wykazując się matematycznym rozumieniem używanych pojęć i własności. Dlatego konieczna wydaje się głęboka dydaktyczna refleksja autorów programów i podręczników oraz nauczycieli nad możliwymi nieporozumieniami wynikającymi z różnorodności używanej terminologii.

Rozważmy na przykład pewne relacje między terminem *dowodzenie* i *argumentowanie*. Jeden ze słowników języka polskiego (Bańko 2000) czynność argumentowania określa w następujący sposób:

> *1) Jeśli argumentujemy za czymś lub przeciw czemuś, to przedstawiamy argumenty przemawiające za tym lub przeciw temu […].*
> *2) Jeśli argumentujemy jakąś tezę lub stanowisko to uzasadniamy je* (s. 41).

Argument określony został jako:

> *1) fakt, który przytaczamy, aby uzasadnić lub obalić jakąś tezę, albo środek, którego używamy w dyskusji lub sporze, aby przekonać lub nakłonić kogoś do czegoś […].*
> *2) fakt, który przesądza o naszym wyborze […].*
> *3) matematyczny argument to zmienna niezależna funkcji, termin specjalistyczny* (s. 42).

Czynność dowodzenia określona została w następujący sposób:

> *1) Jeśli dowiedliśmy, że coś jest prawdą, to wykazaliśmy to za pomocą jakichś argumentów lub swojego postępowania […].*
> *2) Jeśli coś dowodzi jakiegoś faktu, to świadczy o nim, nie pozostawiając żadnych wątpliwości co do niego* (s. 311).

Dowód to:

> *1) [...] okoliczność lub rzecz, która dowodzi czegoś lub świadczy o czymś […].*
> *2) Jeśli robimy coś w dowód lub na dowód czegoś, to robimy to w celu udowodnienia tego […].*
> *3) Dowód to dokument urzędowy stwierdzający coś […].*
> *4) Dowód to także ciąg zdań, które uzasadniają prawdziwość jakiegoś twierdzenia. Termin logiczny i matematyczny* (s. 312).

Inne słowniki języka polskiego podają podobne zakresy stosowania analizowanych słów. Z pozoru cytowane opisy są zbliżone do siebie, ale można zauważyć pewną złożoność relacji pomiędzy tymi znaczeniami, co może mieć wpływ na ich użycie w sytuacjach szkolnych. Zauważmy, że argumentowanie jest czynnością mającą miejsce podczas komunikacji, np. werbalnej, dotyczy sytuacji istnienia jakiejś rozbieżności co do przedmiotu tej argumentacji. Jej celem jest przekonanie opozycyjnej strony sporu do własnego zdania na dany temat. Ważne są zatem dwie okoliczności: istnienie pewnego konfliktu oraz społeczny charakter procesu argumentowania.

Jeśli zaś chodzi o dowodzenie, to mamy najczęściej na myśli sytuację, w której znamy już poprawną odpowiedź na jakieś pytanie, a naszym zadaniem jest wykazanie, że nie ma żadnych wątpliwości co do słuszności tej odpowiedzi, w oparciu o uznaną już wcześniej wiedzę. Taki proces nie wymaga wymiany zdań pomiędzy dwoma stronami różniącymi się w poglądach. Można przypuszczać, że czynność dowodzenia jest ukierunkowana na końcowy efekt w postaci gotowego dowodu, który jest komunikowany jakiejś społeczności. Może to być klasa szkolna lub inna grupa osób, na przykład autorytetów w rozważanej dziedzinie (np. społeczności matematyków).

Okazuje się, że istnienie tego typu rozbieżności i fakt, że mogą one być przyczyną trudności uczniów, jest podkreślany w literaturze dydaktycznej (np. piszą o tym Kratochvílová i Swoboda 2002). N. Balacheff sugeruje nawet, że istnieje przepaść między kulturowym i epistemologicznym znaczeniem argumentacji i dowodu matematycznego:

> *Argumentacja stanowi epistemologiczną przeszkodę dla nauczania dotyczącego dowodu matematycznego, a ogólniej dowodzenia w matematyce* (Balacheff 1999).

Powinniśmy pamiętać, że z czynnością argumentowania spotykamy się na każdym niemal kroku, nie tylko w obrębie nauki. Niemal każde użycie języka ma charakter argumentacyjny, a argumentacja w życiu codziennym to zespół czynności podejmowanych w celu uzasadnienia określonego poglądu i przekonania innych do swoich racji. Trzy główne cele argumentacji w kontekście realnym to: przekonywanie, testowanie hipotez i wyjaśnianie zjawisk (Lambert, Urlich 1980). W nauczaniu-uczeniu się matematyki eksponujemy głównie rolę argumentowania dla wyjaśniania hipotez (czy to sformułowanych samodzielnie, czy też zadanych z góry), najczęściej w sytuacji, kiedy mamy już wcześniej ugruntowaną opinię na temat prawdziwości danej hipotezy. Inaczej postępujemy w życiu codziennym, gdzie zadaniem argumentującego jest zazwyczaj wyrobienie sobie opinii na temat poprawności danej tezy i (lub) przekonanie innych osób do własnych racji. Przekonania odbiorcy o prawdziwości danej tezy T będącej przedmiotem argumentacji mogą być następujące:

- całkowite przekonanie o prawdziwości T,
- przekonanie, że T jest prawdopodobnie prawdziwe,
- brak opinii co do wartości logicznej,
- przekonanie, że T jest prawdopodobnie fałszywe,
- całkowite przekonanie o fałszywości T.

W klasie szkolnej natomiast najczęściej mamy do czynienia z sytuacją, w której uczeń ma:

- całkowite przekonanie o prawdziwości danej hipotezy,
- całkowite przekonanie o fałszywości hipotezy.

Rzadziej sam rozstrzyga, czy dana hipoteza jest prawdziwa, czy też nie. Uczniowie nie mają zbyt wielu okazji do dokonywania wyborów, do badania i samodzielnego stwierdzania prawdy (Bishop 1999). Jest pewna niekonsekwencja, gdy nazywamy argumentowaniem proces, który w istocie polega tylko na wykazaniu stwierdzonej już słuszności jednej wersji odpowiedzi.

Z przedstawionych rozważań wynikają pewne wnioski. Głównym z nich jest ostrzeżenie przed pochopnym i bezrefleksyjnym utożsamianiu terminów argumentowanie, uzasadnianie, dowodzenie. Mogą one bowiem mieć dla ucznia inne znaczenie niż dla nauczyciela lub osoby znajdującej się na bardziej zaawansowanym poziomie wiedzy matematycznej. Powodem różnicy jest kontekst sytuacyjny, w którym potocznie rozważamy czynność argumentowania. Związany on jest z istnieniem odrębnych opinii na temat przedmiotu argumentacji (taki kontekst przeważnie nie towarzyszy czynności dowodzenia, tam chodzi tylko o uzasadnienie uznanej już wspólnie opinii). Argumentacja ma przy tym wymiar społeczny (nie odbywa się jedynie na płaszczyźnie uczeń – matematyka), a społeczny kontekst tego procesu jest zwykle zaniedbywany lub marginalizowany.

Umiejętności dotyczące uzasadniania zdań o charakterze ogólnym w matematyce były zawsze jednym z głównych celów jej szkolnego nauczania. W rozmaitych zestawieniach celów nauczania matematyki, czy to tworzonych dla analiz teoretycznych, czy też w celu ich implementacji do praktyki nauczania, cele związane z wprowadzaniem elementów metody matematycznej zajmują poczesne miejsce. W publikacji zatytułowanej *Koncepcje powszechnego matematycznego kształcenia w reformach programów szkolnych z lat 1960–1980* Z. Krygowska cytuje kilka układów ogólnych celów nauczania matematyki i kształcenia przez matematykę. Warto przytoczyć jedno z cytowanych sformułowań E. Wittmana, który rozróżnia następujące kwalifikacje ogólne niezbędne w nauczaniu matematyki. Są to:

- strategie poznawcze (kognitywne) i
- techniki intelektualne.

O strategiach poznawczych E. Wittman pisze:

> *Uczeń powinien uczyć się* ***argumentowania****. Tu należy zaliczyć: uzasadnianie, porządkowanie logiczne, dyscyplinę wobec przyjętych założeń (np. definicji), badanie alternatywy, ocenianie treści i metod według własnych lub z góry danych kryteriów, testowanie hipotez, kontrolowanie poprawności dowodów, ujawnianie pozornych argumentów, odrzucanie niewłaściwych uogólnień przez podawanie kontrprzykładów, gotowość do wysłuchania argumentów przeciwnika, gotowość do akceptowania niepodważalnych argumentów, wytrwanie przy swoim zdaniu, gdy się ma w pełni o czymś przekonanie* (za: Krygowska 1981, s. 49).

Następnie charakteryzuje strategie poznawcze uczniów:

> *Uczeń powinien uczyć się* ***twórczej postawy*** *[…].*
> *Uczeń powinien uczyć się* ***matematyzowania*** *sytuacji (w szczególności sytuacji rzeczywistych otaczającego go świata). […]*

a także kategorie technik intelektualnych:

> • *klasyfikowanie […],*
> • *porządkowanie […],*

- *specyfikowanie [...],*
- *posługiwanie się analogiami [...],*
- *formalizowanie* (za: Krygowska 1981, s. 50).

Zwróćmy uwagę, że określenie czynności argumentowania wydaje się być w tym ujęciu szersze niż tylko uzasadnianie przy wykorzystaniu wiedzy i znajomości praw logicznych. Mówi się tu o przekonywaniu przeciwnika (lub przyjmowaniu jego argumentacji) oraz umiejętności obrony własnego stanowiska. Takie pojmowanie argumentowania leży w sferze społecznej roli rozumowań uzasadniających.

Jawnie o dowodzeniu Wittman mówi w kontekście kontrolowania poprawności gotowych rozumowań dowodowych, a także wtedy, gdy wspomina o wysuwaniu logicznych wniosków i czynności prowadzenia matematycznego wnioskowania. Rekapitulując, w cytowanym zestawieniu celów nauczania interesujące nas kwestie zostały określone jasno i kategorycznie.

We współczesnych rozprawach dotyczących celów nauczania matematyki na świecie (np. Niss 1996) określa się najczęściej dwie kategorie takich celów: ogólne i szczegółowe. W odniesieniu do ogólnych stwierdza się, między innymi, że edukacja matematyczna powinna wszystkim jej uczestnikom zapewnić podstawowe rozumienie matematyki („matematyki dla wszystkich"), natomiast cele szczegółowe postulują umożliwienie uczniom zrozumienie i zaakceptowanie „specyficznej natury matematyki". Nie mamy tu, co prawda, specjalnych odniesień do metody matematycznej, ale kontekst tych sformułowań pozwala stwierdzić, że elementy wiedzy i umiejętności odnoszących się do metodologii matematycznej powinny być kierowane do wszystkich uczniów w trakcie szkolnego nauczania matematyki. W niektórych dokumentach urzędowych określono zakres kompetencji ucznia:

> *uczeń powinien wyjaśniać i uzasadniać swoje myślenie i uczyć się oceniać krytycznie myślenie innych, umieć opisywać swoje myślenie, stawiać pytania oraz wyjaśniać i uzasadniać idee* (za: Barkai, Levenson 2012, s. 84).

Typologia celów nauczania matematyki przedstawiona przez S. Turnaua (1990) umiejętność logicznego argumentowania sytuuje na najwyższym poziomie celów poznawczych, niezbędnych

> *współczesnemu człowiekowi, niezależnie od dziedziny jego działalności* (s. 30).

W celach poznawczych poziomu drugiego czytamy już bardziej szczegółowo, że istotna jest uczniowska

> *umiejętność przyswojenia sobie dowodu oraz znajdowania i formułowania prostych dowodów* (s. 30).

Interesujące wydaje się spojrzenie na często modyfikowane w ostatnich latach dokumenty oświatowe dotyczące nauczania matematyki (w szczególności na podstawę programową kształcenia ogólnego). Okazuje się, że sukcesywnie zastępowano w nich określenia takie, jak dowód i dowodzenie, innymi słowami bliskoznacznymi, typu argumentowanie, uzasadnianie czy też prowadzenie rozumowań. Z pozoru ta zmiana nie jest bardzo ważna, ale czy tak jest faktycznie?

Poruszany zakres zagadnień ma bardzo duże znaczenie, jeśli zależy nam w nauczaniu matematyki na ukształtowaniu niezafałszowanego obrazu jej natury.

> *Istotę matematyki, a więc to, co powinno najsilniej wyodrębniać tę naukę w oczach ucznia spośród innych przedmiotów nauczania, upatrujemy w roli definicji i dowodu. W pełni abstrakcyjny charakter pojęć matematycznych wymaga, by polegać wyłącznie na ich definicyjnej charakterystyce, a w badaniu ich własności i związków wzajemnych – na dedukcji* (Legutko, Turnau 1989, s. 13–14).

Rozdział 4

Uzasadnianie stwierdzeń matematycznych w ujęciu antropomatematycznym

Dydaktycy matematyki prezentują różne opinie na temat terminologii stosowanej dla określania czynności związanych z uprawomocnianiem ogólnych stwierdzeń matematycznych i zamiennego ich stosowania. Terminologia, choć ważna, jest może mniej istotna od założenia, żeby

> *pojęcie dowodzenia rozumieć dostatecznie szeroko. Nie należy ograniczać się tylko do wypowiedzi formułowanych wyraźnie jako twierdzenia, ale włączyć też całą dedukcyjną aktywność myśli, aż po rachunki, tj. realizację algorytmów. Dowodzenie w nieco węższym sensie wiąże się z użyciem w budowie dowodu zaprawy logicznej, tj. języka rachunku logicznego* (Härtig 1987, s. 77).

W tym rozdziale przedstawię teoretyczne podstawy antropomatematycznego podejścia do rozumowań typu dowodowego. Postaram się rozszerzyć i zinterpretować pojęcie dowodzenia na szkolny użytek uprawiania matematyki. Źródłem inspiracji do napisania tego rozdziału była dla mnie m.in. praca G. Polya pt. *Patterns of plausible inference* (2009)[1]. Niektóre z przemyśleń autora przyjmuję jako teoretyczne założenia własnego ujęcia nurtu badań w dydaktyce matematyki nazwanego antropomatematyką oraz określenia w tym nurcie terminu *rozumowanie uzasadniające*.

Wszelkie założenia poczynione przeze mnie dla antropomatematycznego podejścia badawczego mają w zasadzie jeden cel. Realizują pragnienie przekazania czytelnikowi, a w konsekwencji uwzględnienia w procesie nauczania, że matematyka jest formą ludzkiej wyobraźni i pewnej człowieczej wizji świata dostępnej dla wszystkich. Jest sposobem myślenia człowieka, nie wymaga posiadania jakiejś szczególnej struktury psychicznej i nieprawdą jest, że jest dostępna jedynie garstce powołanych. W takim ujęciu matematyka nie jest domeną prawd absolutnych, co przeczy powszechnie panującemu i przekazywanemu poglądowi[2], a kwestia uznawania prawdziwości matematycznych stwierdzeń ogólnych, choć ma swoje szczególne uwarunkowania, ma także ludzkie oblicze. To fakt, że dowód i rozumowania typu dowodowego są specyficznym dla matematyki narzędziem orzekania o prawdziwości, ale powinniśmy

[1] Po raz pierwszy wydana w 1954, Princeton University Press.

[2] „Matematyczne prezentacje, czy to w podręcznikach, czy w klasie, często postrzegane są jako autorytarne” (Davis, Hersh 1981, s. 282).

przyjąć, że nie jest to jedyny i najważniejszy cel wprowadzania uczniów w metodologię matematyki. Kluczową rolą rozumowań uzasadniających w obrębie antropomatematyki jest promowanie myślenia matematycznego. Myślenia mającego ścisły związek z naturalnym dla człowieka zdroworozsądkowym postrzeganiem świata i wyrażającym się w czynnościach intelektualnych ukierunkowanych na rozwiązywanie matematycznych i niematematycznych zadań i problemów oraz umiejętności argumentowania słuszności własnego zdania.

Rozpocznijmy od przypomnienia, że historycznie uzasadnianie opierało się na przybliżonej zgodności uzyskiwanych wyników z empirią, a z chwilą uzyskania sposobu dochodzenia do pożądanego wyniku – na autorytecie przekazu[3]. Źródłem wiedzy matematycznej były więc obserwacja, doświadczenie, indukcja, analogia, czyli w istocie metody przyrodnicze. Przy takim nastawieniu oczywiście mowy być nie mogło o dedukcji i dowodzeniu, a tym bardziej o aksjomatach i twierdzeniach. Istotna była również rola autorytetu w uznawaniu prawdziwości. Takie były prapoczątki uznawania prawdy stwierdzeń w matematyce. To ważne, by o tym pamiętać, szczególnie w szkolnym nauczaniu, gdzie postuluje się przestrzeganie zasady o indukcyjno-genetycznym rozwoju wiedzy matematycznej.

W późniejszych latach rozwoju matematyki rola empirii i autorytetu w uznawaniu prawdziwości zdań w teorii matematycznej już nie była tak eksponowana, co wcale nie znaczy, że zostały zarzucone. Badania matematyczne, nawet wielkich autorytetów, mają swoje początki właśnie w empirii (co potem nieraz skrzętnie ukrywano), a światło dzienne mają szanse ujrzeć już tylko gotowe wytwory pracy naukowej. Następnie społeczność zawodowych matematyków uznaje poprawność przedstawionego rozumowania i decyduje o tym, że dany dowód jakiejś hipotezy wszyscy odtąd uznajemy za poprawny. Czasem bywa tak, że rozumowanie, które jest powszechnie uznane za dowód jakiegoś twierdzenia, okazuje się rozumowaniem błędnym lub niekompletnym. Historia rozwoju matematyki zna takie przypadki[4].

Już Platon argumentował, że poszukiwanej pewności i niepodważalnej prawdy nie znajdziemy w rozumowych wnioskowaniach dedukcyjnych, gdyż prawdziwość tezy we wnioskowaniu dedukcyjnym jest uzależniona od prawdziwości przesłanek przyjętych jako punkt wyjścia do danego wnioskowania dedukcyjnego: jeżeli przesłanki są prawdziwe, to i wniosek jest prawdziwy. Aby zatem mieć pewność co do prawdziwości wniosków naszych rozumowań dedukcyjnych, musimy mieć pewność co do prawdziwości przyjętych w nich przesłanek. W teorii aksjomatycznej takie ugruntowywanie prawdziwości przesłanek nie może przebiegać w sposób nieograniczony, zatem weryfikacja nie może być pełna.

---

[3] Świadczą o tym często spotykane w źródłach egipskich i babilońskich wyrażenia „czyń podobnie", „postępowałeś słusznie" itp. (Duda 1995).

[4] Np. (wśród wielu innych) rozwiązanie problemu „czterech kolorów" z roku 1879, przyjęte jako poprawne, w 1890 okazało się zawierać błąd. Innym przykładem jest odkrycie przez B. Russella paradoksu w koncepcji aksjomatyzacji arytmetyki sformułowanej przez G. Fregego.

Poszukajmy jeszcze innych przykładów na to, iż pewność wiedzy naukowej w matematyce, zasadzająca się na niepodważalności rozumowań dedukcyjnych, nie gwarantuje bezdyskusyjnej nieomylności tej wiedzy. Rozważania filozoficzne pokazują, że zarówno procedur indukcyjnych, jak i dedukcyjnych nie można uzasadnić bez odwołania się do… nich samych (Chmielewski 2009). Najbardziej znanym przykładem filozoficznej argumentacji, mającej stanowić uzasadnienie dla rozumowania, które samo się uzasadnia, jest posługiwanie się Zasadą Indukcji Matematycznej (można uznać, że ponieważ posługiwanie się tą zasadą powoduje pozytywne skutki w postaci udowodnionych twierdzeń, stanowi to zatem uzasadnienie do posługiwania się zasadą indukcji w przyszłości). Tym sposobem indukcja została uznana na jedyne narzędzie mogące skutecznie uzasadnić ją samą. Z logicznego punktu widzenia mamy tu do czynienia z błędem polegającym na tym, że zakłada się coś, co dopiero mamy wykazać. Zjawisko samouzasadniania K. Popper skomentował tak:

> *To […] co łączy dedukcję i indukcję, można wyrazić następująco: prawomocności dedukcji nie można wykazać w prawomocny sposób, ponieważ sprowadzałoby się to do dowodzenia logiki za pomocą logiki, co jest błędnym kołem. Taki argument jednak, choć polega na błędnym kole, może w istocie rozjaśnić nasze poglądy i umocnić nasze zaufanie we własne siły. To samo dotyczy indukcji. Być może, że indukcja wykracza poza indukcyjne uzasadnienie, jednakże rozumowanie indukcyjne o indukcji jest pożyteczne i pomocne, a może nawet zgoła niezbędne* (za: Chmielewski 2009).

Taka sytuacja wydaje się akceptować przyjmowanie za prawdziwe rozumowań, które nie posiadają prawomocnych uzasadnień (samouzasadnialnych).

U podstaw tych wszystkich poglądów znajduje się świadomość pewnej dwoistości matematyki (Krygowska 1981). Stąd możliwe są więc rozbieżności w interpretowaniu przedmiotu matematyki, jej metod, języka oraz takich pojęć, jak precyzja czy intuicja. Dla nauczania matematyki te rozbieżności nie są obojętne. Zwróćmy uwagę, że na początkowych etapach szkolnego kształcenia te przeciwstawienia matematyki nie mają jeszcze znaczenia. Programowy formalizm redukuje się tu do mniejszych lub większych wymagań dotyczących pewnego stopnia ścisłości. Problem pogłębia się w kolejnych latach nauki.

Te wszystkie niedopowiedzenia i rysy na „nieskazitelnym" wizerunku matematyki powinny mieć wpływ na przenoszenie tego obrazu w szkolnym jej nauczaniu. Może nie należy przywiązywać zbytniej wagi do kształtowania powszechnego przekonania, że wiedza matematyczna jest zawsze niepodważalna i jedynie pewna, a szkolne uzasadnianie stwierdzeń matematycznych nie powinno się koncentrować na bezbłędnym stosowaniu reguł wnioskowania maksymalnie (na ile to możliwe) przypominającego rozumowania formalne. W. Dunham pisze, że aby „pozostać przy zdrowych zmysłach", trzeba uznać, że *dowód jest dowolną argumentacją, ostrożnie żeglującą po oceanie logiki i zmierzającą do tego, aby rozwiać wszelkie wątpliwości i wykazać prawdziwość twierdzenia* (1994, s. 150).

Starajmy się jednak nie rozgraniczać dwóch skrajnych opinii o roli i możliwościach dedukcji w działalności matematycznej, nie tylko na użytek szkolny. Spróbujmy oba te stanowiska pogodzić, narzucając im obu antropomatematyczną perspektywę. Ta perspektywa każe uwzględniać zarówno specyfikę rozumowań matematycznych, dedukcję jako podstawowy sposób rozumowania w matematyce, ale też i naturalne dążenie człowieka do indukcyjnego rozumowania, powszechnego posługiwania się konkretem, wpływ ludzkich intuicji i przekonań na przebieg procesów myślowych oraz, co ważne, społeczny charakter działalności matematycznej.

G. Polya (1954, 1964, 1975) podkreśla szczególną rolę intuicji, indukcji, „racjonalnego zgadywania", dostrzegania analogii i innych nieformalnych zabiegów heurystycznych w uprawianiu matematyki.

Rozważmy schemat postępowania człowieka, który (jak pisze Polya) jest tak ogólny, że można go zauważyć na prawie każdym przykładzie, zarówno wziętym z życia, jak i z matematyki. Zapowiadany schemat przedstawiony jest przez autora na przykładzie rozumowania jednego z większych matematyków. Mowa jest o Eulerze i jego słynnej hipotezie brzmiącej następująco:

Dowolna liczba całkowita postaci $8n + 3$ jest sumą kwadratu liczby całkowitej i dwukrotności liczby pierwszej, czyli: jeśli $n \in \mathbb{N}$ to $8n + 3 = x^2 + 2p$, gdzie x jest liczbą całkowitą, a p jest liczbą pierwszą (Euler 1911, s. 120–121).

Jak mogłaby wyglądać naturalna droga weryfikacji takiej hipotezy? Prawdopodobnie każdy, kto chciałby przekonać się o jej prawdziwości, rozpocząłby od rozważania kolejnych liczb naturalnych *n* i poszukiwania odpowiednich liczb *x* i *p*. Tak postąpił Euler i przede wszystkim zweryfikował ją dla wielu przypadków szczególnych.

Przedstawmy wynik takiej weryfikacji hipotezy dla liczb $n = 1, 2, \ldots, 10$. Mamy:

Tabela 4.1

n	*8n + 3*	*x*	*p*	$x^2 + 2p$
1	11	1	5	1 + 2×5
2	19	3	5	9 + 2×5
3	27	1	13	1 + 2×13
4	35	1 (3) (5)	17 (13) (5)	1 + 2×17 (9 + 2×13) (25 + 2×5)
5	43	3	17	9 + 2×17
6	51	5	13	25 + 2×13
7	59	1 (5) (7)	29 (17) (5)	1 + 2×29 (25 + 2×17) (49 + 2×5)
8	67	3	29	9 + 2×29
9	75	1 (7)	37 (13)	1 + 2×37 (49 + 2×13)
10	83	1 (3) (5) (7)	41 (37) (29) (17)	1 + 2×41 (9 + 2×37) (25 + 2×29) (49 + 2×17)

Gdybyśmy poddali powyższe rozumowanie naturalnemu biegowi ludzkiej myśli, oczywiste jest, że nabieramy intuicyjnego przeświadczenia, że hipoteza jest prawdziwa. Możemy takie empiryczne badanie kontynuować, ale nawet jeśli zweryfikujemy hipotezę dla n = 1000000, jasne jest (dla każdego matematyka), że nie oznacza to, iż jej w ten sposób dowiedliśmy.

Jednak naturalne i przekonujące jest pojawiające się w nas intuicyjne odczucie, że każda kolejna weryfikacja czyni rozważaną hipotezę coraz bardziej wiarygodną.

Przypuśćmy, że kontynuujemy nasze badanie dla n = 11. Wtedy $8n+3 = 91$. Pojawia się pytanie, czy liczba 91 spełnia hipotezę Eulera?

Oczywiście są dwie możliwości: TAK lub NIE. Zapiszmy to symbolicznie oznaczając:

A – hipoteza Eulera;

B – wniosek z hipotezy Eulera (czyli zachodzenie rozważanej własności dla n=11).

Wciąż jednak nie wiemy, czy A i czy B jest prawdą. Wiemy jednak, że prawdziwa jest implikacja: **A⇒B** (dla wszystkich możliwych podstawień logicznych zdań A i B). Mogą zatem zajść dwa przypadki[5]:

1. A⇒B

<u>**B** – fałsz</u>

A – fałsz

W takiej sytuacji mamy klasyczny znany matematykom wzorzec rozumowania *modus tollens* dający bezsprzeczną odpowiedź na pytanie o prawdziwość hipotezy. Ale możliwy jest również przypadek następujący:

2. A⇒B

<u>**B** – prawda</u>

Co się stanie, jeśli B okaże się prawdą?

Sprawdźmy, jak jest w naszym przypadku (kontynuując zapis użyty w tabeli 4.1 dla n = 11). Wtedy mamy:

Tabela 4.2

n	***8n + 3***	***x***	***p***	***$x^2 + 2\cdot p$***
11	91	3 (9)	41 (5)	9 + 2·41 (81 +2·5)

Nie mamy więc niestety wyraźnego, logicznie ugruntowanego końcowego wniosku (tak jak to byłoby, gdyby B okazało się fałszem). Nasza pozytywna weryfikacja konsekwencji B nie dowodzi przecież hipotezy A.

[5] Zapis jest utrzymany w konwencji przyjętej w logice, gdzie wyrażenia nad linią pozostają ze sobą w koniunkcji, a pozioma linia, która je podkreśla, symbolizuje wynikanie.

Jednak każda taka kolejna pozytywna weryfikacja czyni wyjściową hipotezę A bardziej wiarygodną. Otrzymujemy więc (konstatuje Polya) podstawowy schemat myślenia człowieka:

A⇒B
<u>B – prawda</u>
A – bardziej prawdopodobna

Pokazaliśmy tu pewien ogólny wzór myślenia, który Polya nazywa *podstawowym schematem indukcyjnym* (*fundamental inductive pattern*) lub krócej *schematem indukcyjnym*. Taki wzorzec rozumowania nie jest niczym dziwnym. Wręcz przeciwnie, wyraża przekonanie, w które żadna rozsądna osoba zdaje się nie wątpić: każdy kolejny pozytywny wynik weryfikacji danej hipotezy powoduje, że staje się ona bardziej wiarygodna. W taki sposób często przecież rozumujemy w życiu codziennym, w sprawach związanych ze sprawami sądowymi, w nauce itp. Opisy rozumowań tego typu można czasem spotkać w literaturze z zakresu matematyki i jej dydaktyki. Mamy naturalną tendencję do akceptowania jakiejś prawdy, gdy potwierdzają ją w miarę liczne eksperymenty.

Nie zamierzam przekonać czytelnika, że uznawanie prawdziwości wniosków ogólnych na podstawie potwierdzenia dla kilku przypadków szczególnych należy uznawać za matematycznie zadowalający sposób uzasadnienia tej prawdziwości. Chcę jednak podkreślić naturalność i powszechność ludzkiego myślenia bazującego na intuicyjnie przyjmowanym założeniu o regularności lub stałości otaczających nas zjawisk. W odniesieniu do matematyki ludzkie odczuwanie harmonii, regularności i stałości pewnych związków jest naturalne. Czasem bywa ono nieuświadomionym przesłaniem towarzyszącym działalności w obrębie matematyki, na wysokim poziomie tej działalności. Oczywiście w miarę doświadczony matematyk nie zadowoli się jedynie intuicyjnym odczuciem, on zna zasady uznawania prawdziwości w matematyce, a także doświadczył sytuacji, w których pozorna regularność i stałość zawiodła. Jednak i on wie, że takie okoliczności nie są zbyt liczne i częste, a znakomita większość hipotez potwierdzanych zachodzeniem w konkretnych przypadkach szczególnych w ogólnym rozrachunku także okazuje się być prawdziwa.

Na intuicjach związanych ze stałością zjawisk w obrębie matematyki czasem bazuje się w rozważaniach natury dydaktycznej. Przedstawię przykład proponowanego w literaturze postępowania dydaktycznego ukierunkowanego na odkrywanie przez uczniów w klasie szkolnej zasady otrzymywania wyniku mnożenia liczb całkowitych (za Freudenthalem w: Turnau 1990). Zasadę, według której proponuje się tu rozumować, nazywa się *zasadą permanencji*. Wnioskowanie przebiega następująco.

Obserwujemy poniższe serie iloczynów i wnikamy w regularności zachodzące w tych seriach:

-	-
$3 \cdot 3 = 9$	$3 \cdot 3 = 9$
$2 \cdot 3 = 6$	$3 \cdot 2 = 6$
$1 \cdot 3 = 3$	$3 \cdot 1 = 3$
$0 \cdot 3 = 0$	$3 \cdot 0 = 0$

Wyciągamy wniosek, że w każdym kolejnym mnożeniu jeden z czynników tego mnożenia zmniejsza się o 1, a drugi czynnik się nie zmienia. Wynik natomiast za każdym razem zmniejsza się o 3. Nie ma powodu, aby nie miałoby tak być w dalszym ciągu. Zatem kontynuujmy:

-	-
$3 \cdot 3 = 9$	$3 \cdot 3 = 9$
$2 \cdot 3 = 6$	$3 \cdot 2 = 6$
$1 \cdot 3 = 3$	$3 \cdot 1 = 3$
$0 \cdot 3 = 0$	$3 \cdot 0 = 0$
$(-1) \cdot 3 = -3$	$3 \cdot (-1) = -3$
$(-2) \cdot 3 = -6$	$3 \cdot (-2) = -6$
$(-3) \cdot 3 = -9$	$3 \cdot (-3) = -9$
-	-

Otrzymujemy pierwszą zasadę postępowania: jeśli mnożymy liczbę ujemną i dodatnią, to wynik jest ujemną wartością iloczynu modułów czynników mnożenia.

Kontynuując wnioskowanie, rozważamy inne serie działań (wykorzystujących zasadę właśnie odkrytą):

-	-
$(-2) \cdot 3 = -6$	$3 \cdot (-2) = -6$
$(-2) \cdot 2 = -4$	$2 \cdot (-2) = -4$
$(-2) \cdot 1 = -2$	$1 \cdot (-2) = -1$
$(-2) \cdot 0 = 0$	$0 \cdot (-2) = 0$

W kolejnych zapisach jeden z czynników również malał o 1, natomiast wynik za każdym razem wzrastał o 2. Intuicyjne odczucie stałości obserwowanych zmian powoduje, że możemy postulować kontynuowanie tej regularności. Zatem możemy zapisać:

-	-
$(-2) \cdot 3 = -6$	$3 \cdot (-2) = -6$
$(-2) \cdot 2 = -4$	$2 \cdot (-2) = -4$
$(-2) \cdot 1 = -2$	$1 \cdot (-2) = -2$
$(-2) \cdot 0 = 0$	$0 \cdot (-2) = 0$
$(-2) \cdot (-1) = 2$	$(-1) \cdot (-2) = 2$
$(-2) \cdot (-2) = 4$	$(-2) \cdot (-2) = 4$
$(-2) \cdot (-3) = 6$	$(-3) \cdot (-2) = 6$
-	-

Wniosek z takiej obserwacji i zastosowania zasady permanencji jest następujący: mnożąc dwie liczby ujemne otrzymujemy wynik dodatni, będący iloczynem bezwzględnych wartości czynników.

Przedstawione wnioskowanie dalekie jest od poprawnego rozumowania uogólniającego własności działań w zbiorze liczb całkowitych (Turnau 1990, s. 139). Wnioskujemy tutaj bazując na intuicyjnym odczuciu stałości (permanencji) wybranych zależności matematycznych. Idea *geometryczno-algebraicznej zasady permanencji* bywa stosowana w nauczaniu niejednokrotnie i pozwala wyciągać z tej niezmienności daleko idące wnioski. Uczniowi (lub studentowi studiów nauczycielskich) winni jesteśmy odpowiedź na pytanie: dlaczego czasem wolno nam wyciągać wnioski na drodze rozumowania indukcyjnego, podczas kiedy w innych sytuacjach uznajemy takie myślenie za karygodne?

Tej odpowiedzi może oczywiście uczącemu się udzielać m.in. przeżywanie doświadczeń pokazujących zawodność indukcyjnego sposobu wnioskowania. Rozważmy odpowiedni przykład (Dunham 1994, s. 150) i weźmy pod uwagę następującą hipotezę:

Rozkładając dodatnią liczbę całkowitą n na wielomian

$$f(n) = n^7 - 28n^6 + 322n^5 - 1960n^4 + 6769n^3 - 13132n^2 + 13069n - 5040 \quad (*)$$

zawsze w wyniku otrzymamy tę samą liczbę całkowitą n. Oznacza to, że f(n) = n dla dowolnej liczby całkowitej n.

Czytelnik przyzna, że weryfikowana hipoteza ma dość „sztuczną” postać, a jej geneza wymyka się intuicji. Jednak i tu, tak jak poprzednio, oczywistym punktem wyjścia dla oceny prawdziwości hipotezy (dla zdroworozsądkowo postępującego człowieka) jest jej sprawdzenie dla kilku początkowych liczb naturalnych.

Tabela 4.3

n	*f(n)*
1	1+28+322-1960+6769-13132-5040 = 1
2	2^7-28(2)^6+322(2)^5–1960(2)^4+6769(2)^3–13132(2)^2+13069(2)–5040 = 2
3	3^7-28(3)^6+322(3)^5–1960(3)^4+6769(3)^3–13132(3)^2+13069(3)–5040 = 3

Sprawdzanie możemy cierpliwie kontynuować.

Tabela 4.4

n	*f(n)*
4	4^7-28(4)^6+322(4)^5–1960(4)^4+6769(4)^3–13132(4)^2+13069(4)–5040 = 4
5	5^7-28(5)^6+322(5)^5–1960(5)^4+6769(5)^3–13132(5)^2+13069(5)–5040 = 5
6	6^7-28(6)^6+322(6)^5–1960(6)^4+6769(6)^3–13132(6)^2+13069(6)–5040 = 6
7	7^7-28(7)^6+322(7)^5–1960(7)^4+6769(7)^3–13132(7)^2+13069(7)–5040 = 7

Sprawdzenie aż siedmiu przypadków wydaje się nas upewniać (pisze Dunham), że faktycznie hipoteza jest prawdziwa dla dowolnej liczby *n*. Jednak podstawienie *n* = 8 prowadzi do następującej konstatacji:

Tabela 4.5

n	*f(n)*
8	8^7-28(8)^6+322(8)^5–1960(8)^4+6769(8)^3–13132(8)^2+13069(8)–5040 = 5048

Zatem nasza hipoteza upada, pomimo iż wysoce prawdopodobna (aż po siedmiu próbach!) była jej prawdziwość.

Taka sytuacja była do przewidzenia dla autora rozważanej hipotezy, który postać wielomianu poddawanego badaniu otrzymał po przemnożeniu i uporządkowaniu członów wyrażenia:

$$f(n) = n + [(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)] \quad (**).$$

Widać, że dla $n = 1,\dots, 7$ wyrażenie w nawiasie kwadratowym będzie się zerować, co zapewnia nam zachodzenie postulowanej równości: $f(n) = n$. Natomiast już dla $n = 8$ mamy $f(8) = 8 + [7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1] = 8 + 7!$. Podobnie będzie dalej: f(9) =

9 + 8!, f(10) = 10 + 9! itd. Widać, że indukcyjny sposób sprawdzania poprawności badanej hipotezy okazał się zawodny. Sprawiła to pewna przewrotność jej autora. Gdyby bowiem osoba dokonująca weryfikacji znała badaną równość w postaci (**), mogłaby rozumować opierając się nie tylko na jej rachunkowym sprawdzaniu, tak jak to mam miejsce odnośnie (*). Wtedy prawdopodobnie kilka indukcyjnych prób zasugerowałoby fakt zerowania się części wyrażenia w nawiasie kwadratowym.

Dyskusyjna jest kwestia naturalności czy wręcz etyczności przykładów tego typu, choć bez wątpienia spełniają one funkcję poznawczą. Pokazują omylność wnioskowania indukcyjnego. Dzieje się to jednak (przynajmniej w opisanym przypadku) na gruncie nienaturalnym, oderwanym od sfery przekonań i intuicji ludzkich, bo jakież intuicje można mieć patrząc na równość (*)? Takie przykłady nie są interesujące z antropomatematycznego punktu widzenia.

Przedstawione wyżej rozumowanie indukcyjne jest często naiwne i zawodne, ale mimo swej prostoty bardzo wartościowe, szczególnie w kontekście szkolnego nauczania-uczenia się matematyki:

> *Warto z tych instrukcji w nauczaniu matematyki w szerokim zakresie korzystać, słabszym uczniom indukcyjne próby sugerować i ułatwiać im dostrzeganie ogólnego schematu w kilku szczególnych twierdzeniach* (Krygowska 1977, s. 113).

M. Otte pisze:

> *Wiele [obiektów matematycznych] pojawia się przez wyobrażenia i intuicje, czasem przez obserwację… jak przez indukcyjnie otrzymane rezultaty wskazywany jest kierunek dla argumentów dedukcyjnych* (Otte 1994, s. 301).

G. Polya w swojej pracy (2009) poddaje schemat indukcyjny dalszym omówieniom. Pisze mianowicie (i z tym trudno się nie zgodzić), że nie każda pozytywna weryfikacja hipotezy ma jednakową wartość przekonującą dla badającego jej prawdziwość człowieka. Autor stwierdza, że duże znaczenie ma podobieństwo lub ewentualne różnice w formie każdego kolejnego kroku procesu indukcyjnej weryfikacji.

Wróćmy do hipotezy Eulera i wyobraźmy sobie kolejne kroki jej weryfikacji (dla $n > 11$). Dla $n = 12$ mamy:

Tabela 4.6

n	$8n + 3$	x	p	$x^2 + 2 \cdot p$
12	99	5	37	$25 + 2 \cdot 37$

Widzimy, że dla $n = 12$ hipoteza Eulera również zachodzi (sam Euler sprawdził jej prawdziwość kolejno aż do $n = 24$). Ogólnie zapiszmy sposób wnioskowania w tej sytuacji:

A – hipoteza Eulera;

$\mathbf{B_n}$ – wniosek z tej hipotezy dla konkretnej liczby *n* (w naszym przypadku B_{12}).

Otrzymujemy wniosek, który nie różni się zasadniczo od wcześniej analizowanego podstawowego schematu indukcyjnego:

A ⇒$\mathbf{B_n}$

$\underline{\mathbf{B_n}}$ <u>– prawda i, dodatkowo, Bn jest wnioskiem bardzo podobnym do wcześniej zweryfikowanych</u> $\underline{\mathbf{B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}}}$

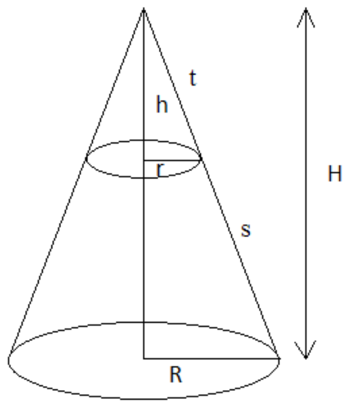
A jest tylko trochę bardziej wiarygodna

Tak myśli człowiek zawsze wtedy, kiedy kolejne sprawdzenie badanej hipotezy jest ze swej natury stosunkowo podobne do poprzednio sprawdzonych. Następne kroki sprawdzania są zbliżone, nie otrzymujemy nic zaskakującego, można sprawdzać dalej, a każda weryfikacja systematycznie uprawdopodabnia badaną hipotezę.

Zasadniczo inna (z punktu widzenia naturalnego odczuwania człowieka) jest sytuacja, kiedy kolejna weryfikacja B_n hipotezy A znacznie różni się od poprzednio wykonanych sprawdzeń B_1, B_2, …, B_{n-1}, jeśli jest zaskakująca. Przekonanie o prawdziwości hipotezy wzrasta silniej. Rozważmy to na przykładzie weryfikacji innej hipotezy:

Pole powierzchni bocznej stożka ściętego wyraża się wzorem (np. rys. 22):

$$P = \pi(R + r)\sqrt{(R-r)^2 + h^2}.$$

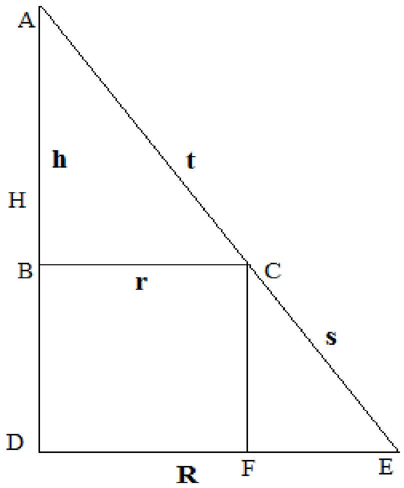


Rys. 22

Zmatematyzowany wywód prawdziwości uzasadnianego wzoru mógłby uwzględnić fakt, że najrozsądniej będzie otrzymać szukaną wielkość odejmując pole małego stożka (o promieniu podstawy *r*) od pola dużego stożka (o promieniu podstawy R). Korzystając ze znanego wzoru na pole powierzchni bocznej stożka mamy wtedy równość:

$$P = R\,(s + t) - \pi rt = \pi Rs + \pi Rt - \pi rt = \pi[Rs + (Rt - rt)].$$

Zmierzając do dowodzonej postaci wzoru, musimy wyeliminować z niego długości tworzących t i s. W tym celu rozważmy rysunek będący przekrojem pionowym wyjściowego stożka (rys. 23):



Rys. 23

Z podobieństwa trójkątów ABC i ADE na tym rysunku wynika równość: $\frac{t}{r} = \frac{s+t}{R}$. Czyli $Rt = r(s + t)$ lub $Rt - rt = rs$. Otrzymane wyrażenie możemy teraz wstawić do wyjściowego wzoru i zapisać:
$P = \pi s\,(R + r)$. Po czym korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CEF mamy równość: $s = \sqrt{(R - r)^2 + h^2}$, co ostatecznie daje wyjściowy i uzasadniany w tym zadaniu wzór:

$$P = \pi(R + r)\sqrt{(R - r)^2 + h^2}.$$

Ktoś mniej wprawny matematycznie i wiedziony chęcią jakiegokolwiek potwierdzenia tego wzoru mógłby weryfikować go poprzez rozpatrywanie różnych możliwych relacji pomiędzy długościami R, r, H i h. Wtedy:

B_1: Jeśli $R = r$ liczymy powierzchnię boczną walca. Wtedy szukane pole wynosi: $P = \pi(2r)\sqrt{h^2} = 2\pi rh$. Otrzymaliśmy znany wzór na pole powierzchni bocznej walca o promieniu r i wysokości h. Wyjściowa hipoteza przeszła pomyślną weryfikację.

B_2: Jeśli $r = 0$ (lub inaczej $h = H$) liczymy powierzchnię stożka o promieniu podstawy R i wysokości h. Otrzymujemy $P = \pi R\sqrt{R^2 + h^2}$. Ten wzór również jest powszechnie znany, zatem kolejna weryfikacja zakończyła się pomyślnie.

B_3: Jeśli $h = H = 0$. Nasza sytuacja redukuje się do znalezienia pola $P = \pi(R + r)\sqrt{(R - r)^2}$, co wobec faktu, że $R \geq r$ daje równość: $P = \pi (R + r)(R - r)$ i w rezultacie: $P = \pi R^2 - \pi r^2$. Otrzymaliśmy znów znany wzór na pole pierścienia na płaszczyźnie. Sprawdzenie ponownie zakończyło się pomyślnie.

B_4: Jeśli $h = H = 0$ i $r = 0$ mamy $P = \pi R\sqrt{R^2} = \pi R^2$. Otrzymany wzór jest najbardziej znanym uczniom wzorem ze wszystkich otrzymanych poprzednio, jest to wzór na pole koła o promieniu R.

Odkrycie wniosku B_4 może mieć dla niewprawnego ucznia dużą wartość przekonującą. Otrzymał dobrze sobie znany i często używany wzór – to może być zaskoczenie i potwierdzenie słuszności analizowanej hipotezy. Zasada myślenia jest tu następująca:

A ⇒ B
B_n – prawda i B_n bardziej różni się od poprzednio zweryfikowanych wniosków B_1, B_2, …, B_{n-1}
A – dużo bardziej prawdopodobna

Oba uszczegółowione wzory indukcyjne mówią (wg G. Polya) o tym, że sprawdzanie każdej konsekwencji wzmacnia naszą wiarę w prawdziwość wyjściowej hipotezy. Jednak weryfikacja pewnych konsekwencji wzmacnia nasze przekonanie bardziej niż inne. To przekonanie jest większe, gdy kolejno weryfikowany wniosek ma postać istotnie różniącą się od zweryfikowanych poprzednio. Im bardziej niewiarygodne jest kolejne sprawdzenie (B_n) hipotezy, tym bardziej staje się ona wiarygodna dla człowieka, który ją weryfikuje.

Faktycznie każdy z nas myśli podobnie w życiu codziennym. Pewne wydarzenia mają silniejszą moc przekonywania niż inne. Polya ilustruje to następującym przykładem. Otóż wyobraźmy sobie, że ktoś zostaje oskarżony o podpalenie jachtu, a dowodem na to jest potwierdzenie zakupu pewnej ilości dynamitu. Taki dowód jest bardzo istotny. Dlaczego? Ponieważ zakup dynamitu przez zwykłego obywatela jest niezwykłym wydarzeniem samym w sobie. Natomiast taki zakup jest całkowicie zrozumiały, jeśli nabywca zamierza wysadzić coś lub kogoś lub zawodowo zajmuje się np. wyburzaniem niepotrzebnych budowli. Wtedy wnioskujemy inaczej.

Jeśli zatem pewna przesłanka jest wręcz niewiarygodna, a przy tym prawdziwa, ma ona dla człowieka większą moc przekonującą. Takie rozumowanie potwierdza istnienie następującego modelu rozumowania:

A ⇒ B
<u>**B – prawda i B jest bardzo mało prawdopodobne**</u>
A – znacznie bardziej wiarygodne

W przeciwieństwie do następującego schematu:

A ⇒ B
<u>**B – prawda i B jest całkiem prawdopodobne**</u>
A – jest tylko trochę bardziej wiarygodne

Te wszystkie schematy indukcyjne pokazują, jak rozumujemy w życiu codziennym. Nie mówią o poprawnym matematycznym uprawomocnianiu stwierdzeń ogólnych. Obrazują one sposób, w jaki człowiek rozumuje o prawdziwości lub fałszywości postawionych hipotez, rozważając w tym celu konkretne przykłady. Oddają naturalny sposób poszukiwania prawdy przez człowieka.

Jest to delikatna i intuicyjna sfera ludzkiego rozumowania, która bywa zaniedbywana w akcie twórczości matematycznej, głównie w warunkach szkolnych. Wyobraźmy sobie bowiem potencjalny klasyczny przykład sytuacji szkolnej, w której uczeń odkrywa jakąś hipotezę albo też zostaje mu ona zasugerowana przez nauczyciela. Przy czym taka sytuacja, w której uczeń samodzielnie formułuje hipotezy, nie jest zdarzeniem częstym na lekcjach matematyki[6]. Tak czy inaczej, w pewnym momencie uczeń zostaje „przymuszony" do weryfikacji postawionej hipotezy (o prawdziwości której najczęściej już jest całkowicie przekonany). Ma on wtedy głównie dwie możliwości:

1. Uzasadnić prawdziwość intuicyjnie, przez odwołanie się do przykładów i intuicyjnie przekonujących rozumowań (których wartość przekonująca jest uzależniona czasem od przebiegu takiego sprawdzania);
2. „Wyprowadzić" nowe prawo z innych praw już wcześniej uznanych (czyli przeprowadzić rozumowanie przynajmniej zbliżone do dedukcyjnego)[7].

[6] Z. Krygowska pisze, że to do zadań nauczyciela należy: „systematyczne organizowanie sytuacji, w których uczeń będzie uczył się dostrzegać i formułować nowe zadania, startując z dobrze poprzednio sformułowanego i rozwiązanego zadania – źródła. W ten sposób zyskuje się to, że uczeń nie znajdzie się od razu w sytuacji zupełnie otwartej. Początkowo zdobywa się na nieznaczne modyfikacje rozwiązanego poprzednio zadania, kurczowo trzymając się znanego już wzorca, ale stopniowo jego odwaga i swoboda wzrastają, matematyczny horyzont się rozszerza, uczeń rozgląda się we wszystkich kierunkach, coraz więcej widzi, coraz więcej faktów kojarzy" (1977, s. 104).

[7] Na niższych etapach edukacji, w szkole podstawowej i gimnazjum, podstawa dedukcji nie jest raz na zawsze ustalona i jawna. Organizujemy dedukcyjnie tyko odpowiednio dobrane partie materiału. Znaczy to, że przyjmujemy w drodze obserwacji i doświadczenia pewne fakty bez dowodu, a dalej na tej podstawie wyprowadzamy kilka następnych twierdzeń już na drodze rozumowania; proces ten po pewnym czasie przerywamy, powracając do metod empirycznych i obserwacji. Cykl ten powinien się powtarzać.

Uczeń musi dokonać wyboru odpowiedniej drogi. Tak naprawdę jednak ten wybór dotyczy rozstrzygnięcia: czy zachować się naturalnie, tzn. odwołać się do intuicji i przykładów, które mają dla ucznia dużą wartość przekonującą, czy też wykonać pewien rytuał, który zadowoli nauczyciela, ale tak naprawdę nic nowego nie wnosi do wiedzy ucznia. Chcę przekonać czytelnika, że to tylko naszym pobożnym życzeniem jest, aby uczeń z własnej woli wybrał tę drugą ze wskazanych dróg postępowania.

Schematy rozumowania opartego na indukcji przedstawione przez G. Polya każą zwrócić uwagę na subtelność myślenia człowieka w sytuacji, kiedy aktywnie bada on wiarygodność jakiegoś stwierdzenia ogólnego, wykorzystując do tego rozumowanie w konkretnym przypadku. Matematycy i nauczyciele w swoich działaniach naukowych i dydaktycznych upraszczają takie rozumowania do dwóch schematów:

1. dla stwierdzenia fałszywości hipotezy **wystarczy** jeden przykład;
2. aby pokazać prawdziwość badanej hipotezy, **nie wystarczy** jeden przykład (lub nawet wiele przykładów).

Takie uproszczenie nie jest dla ucznia oczywiste, wymaga posiadania wielu doświadczeń w posługiwaniu się przykładem w rozumowaniu matematycznym. Idąc śladem przekazu Polya, takie doświadczanie nie może być jednostronne i polegać na konsekwentnym negowaniu posługiwania się przez ucznia przykładem dla uprawomocniania stwierdzeń ogólnych. Natomiast nauczyciele nierzadko sami wyciągają wnioski ogólne na podstawie analizy jednego lub kilku przykładów. Często na szkolnych lekcjach matematyki proces dydaktyczny organizowany przez nauczyciela ma taki właśnie przebieg:

- rozważamy jakąś sytuację realną lub jakiś konkretny przykład,
- analizujemy ten przypadek szczególny i na podstawie tej analizy wysnuwamy wnioski natury ogólnej.

Zilustruję takie postępowanie dydaktyczne przykładem pochodzącym z podręcznika do matematyki dla klasy IV szkoły podstawowej. Przykład dotyczy lekcji, której głównym celem jest odkrycie sposobu postępowania przy mnożeniu liczby naturalnej przez ułamek zwykły. Proponuje się uczniowi (w tym podręczniku) rozstrzygnięcie kwestii ilości soku malinowego przechowywanego w piwnicy przez babcię w półlitrowych butelkach, których na półce stoi 7 sztuk. Postulowane postępowanie ucznia jest następujące:

$$7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1+1+1+1+1+1}{2} = \frac{7}{2}.$$

Otrzymujemy zatem równość (nazwijmy ją **K**): $7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$, skąd płynie prosty wniosek, nazwijmy go **H** (formułowany przez dzieci na podstawie obserwacji tego przykładu):

> *Mnożąc liczbę naturalną przez ułamek, mnożymy ją przez licznik tego ułamka, a mianownik pozostawiamy bez zmian.*

Wniosek ma już naturę ogólną i oczywiście trzeba mieć nadzieję, że nauczyciel odpowiednio zadbał o „eliminację konkretności" tego przykładu (a może tylko rozważono jeszcze inne przykłady?). Jednak istnieje duże prawdopodobieństwo, że dla ucznia sposób wnioskowania był prosty: coś zadziałało na jednym (lub kilku) przykładach, to znaczy, że działa zawsze.

Rozumowanie wyglądało tu następująco:

K⇒H

<u>**K** – prawda</u>

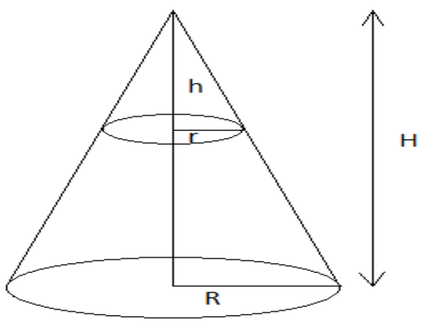
H – prawda.

Jednak o fakcie, że implikacja K⇒H jest prawdziwa, wie w tej sytuacji tylko nauczyciel (na podstawie swojej wiedzy matematycznej), a ta prawdziwość nie wynika z przeprowadzonego tu rozumowania. Dla ucznia jednak cała sytuacja jest (prawdopodobnie nieuświadomionym) wyciąganiem ogólnych wniosków na podstawie rozważania konkretnych przykładów. Jeśli taka sytuacja powtarza się często, uczeń nie wie, jaką rolę naprawdę pełni przykład w uzasadnianiu stwierdzeń natury ogólnej (Frudenthal 1989).

Takie refleksje każą nam bardziej drobiazgowo rozważyć rolę konkretu w rozumowaniu uzasadniającym osób na różnym poziomie wiedzy i doświadczenia matematycznego. Negowanie posługiwania się przykładami w celu argumentowania powoduje zubożenie możliwych do zastosowania środków tej argumentacji i powoduje zbyt duży rozziew pomiędzy stosowaniem umiejętności argumentowania w życiu a jej stosowaniem na gruncie matematyki, szczególnie na etapie żywej twórczości matematycznej, nawet w szkolnym jej ujęciu.

Zgubne skutki takiego postępowania mogą przejawiać się bezradnością uczącego się w momencie, gdy nie potrafi on stworzyć dedukcyjnie ukierunkowanego rozumowania jakiegoś stwierdzenia. Wtedy żaden inny sposób nie przychodzi mu na myśl. Obserwowałam tę bezradność na przykładzie rozwiązywania poniższego zadania przez studentów trzeciego roku nauczycielskich studiów matematycznych.

Znajdź <u>jakiekolwiek</u> uzasadnienie faktu, że obszar powierzchni bocznej stożka ściętego wyraża się wzorem $P = \pi(R + r)$.



Rys. 24

Żaden z 45 studentów nie wyszedł poza próby wyprowadzenia tego wzoru w przypadku ogólnym (próbując badać różnicę pomiędzy polem powierzchni dużego i małego stożka). W szczególności nikt nie przeprowadził badania zbliżonego do opisanego przeze mnie wcześniej (polegającego na badaniu wzoru dla szczególnych wartości *r, R, h i H*). Taka sytuacja może niepokoić w kontekście tego, że badani w przyszłości jako nauczyciele prawdopodobnie będą uczniom przekazywać nieuświadomione przekonanie, że finalnym i jedynym dopuszczalnym efektem rozumowania uzasadniającego ogólne stwierdzenie matematyczne musi być coś na kształt formalnego dowodu matematycznego. Tymczasem

> *ogólność nie jest charakterystyczną cechą dowodów. Opracowywanie przypadków szczególnych lub pojedynczych może być, po pierwsze, bardzo wydajne przy nauczaniu dedukowania, a po drugie, gdy później ma nastąpić uogólnienie, stanowi często główną część pracy, istotną ideę dowodu* (Härtig 1987, s. 80).

Być może studenci, przyszli nauczyciele matematyki, nie rozumieją istoty rozumowania typu uzasadniającego.

Celem powyższych rozważań nie jest próba przekonania czytelnika, że należy zrezygnować z uczenia w szkole rozumowań opartych na klasycznych zasadach wnioskowania dedukcyjnego. Trwamy mocno przy przekonaniu, że dowody i rozumowania dedukcyjne powinny być żywe w nauczaniu matematyki, zgadzając się w pełni ze słowami B. Noweckiego:

> *w dydaktyce metody matematycznej musimy uwzględnić zarówno czynnik intuicyjny jak i formalny. Istotne jest jednak to, iż ze względów czysto dydaktycznych w pewnych okolicznościach dopuszczamy do przewagi intuicji, w innych celowo i świadomie akcentujemy mocno stronę formalną rozumowań. Zachowanie równowagi między doświadczeniem, intuicją, rozumowaniem naturalnym i zmysłowym spostrzeganiem z jednej strony a rozumowaniem formalnym z drugiej w nauczaniu matematyki jest jednym z ważnych problemów współczesnej dydaktyki matematyki* (1978, s. 13).

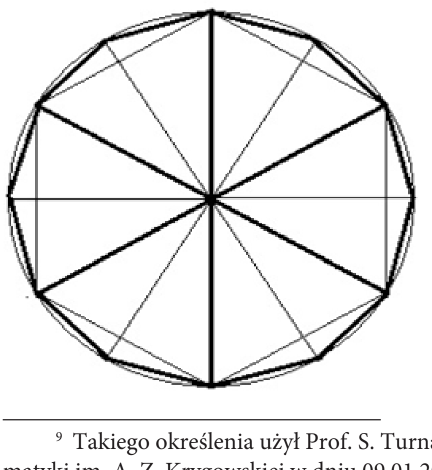
To, co istotnie wynika z antropomatematycznego podejścia do analizowanego zagadnienia, to konieczność świadomego ustalenia zasad i dopuszczalnych sposobów weryfikowania hipotez matematycznych, zarówno przez nauczyciela jak i (co ważniejsze!) przez ucznia. Powinniśmy przestać ufać, że tego typu elementy wiedzy przenikają samoistnie do struktury matematycznego zasobu wiadomości i umiejętności uczniów w trakcie lat nauki szkolnej[8]. Uczenie stosowania matematycznych sposobów uprawniania stwierdzeń natury ogólnej powinno być specjalnie zaplanowane, sukcesywne i długotrwałe, a co najważniejsze – ujawnione i uświadomione uczniom. Póki co brak takiego zaplanowanego procesu, potwierdzają to między innymi moje badania dokumentów oświatowych, które zostaną opisane w rozdziale 6.

[8] Badania dydaktyczne, również te, które będą przedmiotem opisu w rozdziale 6, pokazują, że tak nie jest.

Istniejącą obecnie sytuację można krótko podsumować następująco: na I i II etapach edukacyjnych jawnie o metodzie matematycznej nie mówi się wcale, czasem tylko (z nieznanych uczniowi powodów) nauczyciel wymaga specjalnego sposobu uzasadniania oczywistych dla uczniów faktów. Na III etapie edukacji (w gimnazjum) zaledwie kilkukrotnie (lub wcale) używa się terminów twierdzenie i dowód (przy okazji opracowywania twierdzenia Pitagorasa i Talesa). Uczniowie rozpoczynający naukę w liceach ogólnokształcących lub w technikach spotkają się z tymi słowami już wielokrotnie, ale nie ma tu już miejsca i czasu dla pieczołowitych zabiegów ukazujących istotę tych metamatematycznych sposobów rozumowania. Niektórzy uczniowie rozpoczną potem studia matematyczne (na przykład nauczycielskie), a tam może nastąpić „dedukcyjna deprawacja"[9] studentów polegająca na „zasypaniu" ich wieloma, czasem bardzo skondensowanymi dowodami twierdzeń matematycznych, których studenci często uczą się na pamięć.

Przykładem rozumowania uzasadniającego spełniającego warunki ujęcia antropomatematycznego (służącego uogólnieniu i uzasadnianiu twierdzeń) jest uzmiennianie stałej (Krygowska 1977, t. 3, s. 113). Mówimy tu o rozumowaniu w jednym szczególnym przypadku i dostrzeżeniu, że to rozumowanie pozostanie poprawne przy ogólniejszych danych lub wymaga tylko pewnych niewielkich modyfikacji, aby prowadzić do ogólniejszego rezultatu. Takie rozumowanie godzi naturalność wnioskowania na postawie analizy konkretnego przypadku z wymogami zdroworozsądkowego myślenia matematycznego ukierunkowanego na uzasadnianie.

Rozważmy przykład takiego rozumowania (Krygowska 1977, t. 3, s. 113–114). Wyobraźmy sobie, że uczniowie mają za zadanie obliczyć pole dwunastokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu długości *r* (nie stosując przy tym funkcji trygonometrycznych). Nauczyciel udziela wskazówki: *uzupełnijcie rysunek dwunastokąta foremnego rysunkiem sześciokąta wpisanego w ten sam okrąg tak, aby wierzchołki sześciokąta były jednocześnie wierzchołkami dwunastokąta.* Powstaje rysunek (rys. 25).



Rys. 25

[9] Takiego określenia użył Prof. S. Turnau na Ogólnopolskim Seminarium z Dydaktyki Matematyki im. A. Z. Krygowskiej w dniu 09.01.2012.

Analiza powyższego rysunku prowadzi do odkrycia: pole dwunastokąta jest sumą pól sześciu deltoidów, których przekątne są równe *r*. Szukane pole dwunastokąta jest równe zatem

$$P = 6 \cdot \frac{1}{2} r^2, \text{ czyli } P = 3\,r^2.$$

Nauczyciel proponuje przedłużenie problemu w kierunku uogólnienia, czyli znalezienia sposobu obliczania pola dowolnego wielokąta foremnego o parzystej liczbie boków. Po analizie rozumowania dla dwunastokąta można sformułować twierdzenie:

> *Aby obliczyć pole 2n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu długości r, wystarczy pomnożyć obwód n-kąta foremnego wpisanego w ten okrąg przez* $\frac{1}{2}$ *r.*

Sformułowanie tego twierdzenia wymaga wyeliminowania szczególności deltoidów na rys. 25, których obie przekątne mają charakterystyczną długość *r*. Dla dowolnego n-kąta foremnego jedna z przekątnych deltoidu ma długość *r*, a długość drugiej wynosi $\frac{1}{n}$ obwodu tego n-kąta.

Przedłużenie problemu z dwunastokąta na dowolny $2n$-kąt i dostrzeżenie oraz wykorzystanie analogii pomiędzy tymi dwoma sytuacjami było przykładem ilustrującym *rozumowanie przez uzmiennienie stałej*.

Przedstawię jeszcze jeden przykład pokazujący, że w rozumowaniach tego typu konkretne zadanie spełnia przekonującą rolę dowodu matematycznego, choć nie jest nim w istocie[10]. Tym razem uogólnienie przez uzmiennienie stałej zostało wykorzystane do odkrycia sposobu mnożenia przez siebie dwóch ułamków.

Rozważamy konkretny przykład i pytamy o wynik mnożenia $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = ?$

Musimy rozpocząć od uświadomienia sobie, że to mnożenie możemy zamienić na pytanie: ile to jest $\frac{2}{3}$ z $\frac{4}{5}$? Aby się o tym przekonać, trzeba $\frac{4}{5}$ podzielić na 3 części i wziąć 2 z nich. Mamy zatem: $\frac{2}{3}$ z $\frac{4}{5} = (\frac{4}{5} : 3) \cdot 2$. Licząc dalej (i posługując się wcześniej poznanymi zasadami działań na ułamkach) otrzymujemy: $(\frac{4}{5} : 3) \cdot 2 = (\frac{4}{5 \cdot 3}) \cdot 2 = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3}$. W efekcie mamy poszukiwany sposób postępowania: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3}$. Jeśli nie pozwolimy uczniowi zapisać wyniku mnożenia w liczniku i mianowniku oraz przeanalizujemy rozumowanie powtórnie, zauważymy jego ogólność niezależną od wyboru konkretnych ułamków – uzmiennimy stałą.

[10] Przykład ten został przedstawiony przez Prof. A. Z. Krygowską na spotkaniu Ogólnopolskiego Seminarium z Dydaktyki Matematyki na WSP w Krakowie w dniu 10.03.1986 (materiał pochodzi z notatek uczestników).

Takie postępowanie jest w pewnym sensie naiwne (i oczywiście może być zawodne), ale korzystamy z tego, że w odpowiednio dobranych przykładach tkwi głęboka myśl matematyczna, swoisty „substrakt" dowodu. Takie rozumowanie może już stosunkowo łatwo (na odpowiednim poziomie wiedzy i umiejętności) przerodzić się w bardziej formalny dowód, który potwierdzi uzyskane przekonanie o słuszności wniosku.

Jeśli doprowadzimy do tego, że uczeń rozumując na przykładzie konkretnym w odniesieniu do stwierdzenia natury ogólnej zada sobie pytanie: *dlaczego to się sprawdza w tym przykładzie?* – możemy uznać, że odnieśliśmy sukces we wprowadzaniu ucznia w metodę matematyczną. Potem tylko należy zadbać o odpowiedni rozwój metod, jakich uczeń będzie używał, chcąc na to pytanie odpowiedzieć.

Podsumujmy rozważania tej części pracy próbą określenia na użytek szkolny terminu *rozumowanie uzasadniające* w ujęciu antropomatematycznym.

Rozumowanie uzasadniające jest matematycznym argumentem (lub łańcuchem argumentów) używanym w społecznie pojmowanym procesie nauczania-uczenia się, który spełnia następujące kryteria:

- używa stwierdzeń i określeń już przyjętych przez społeczność klasy (co do których uczniowie już wcześniej nabrali przekonania o prawdziwości);
- jest spójne ze znanymi faktami i przekonaniami uczniów (jego wynik pozostaje w semantycznej zgodności z posiadaną przez uczniów wiedzą);
- stosuje formy rozumowania, które są podane, jawne i uznane we wspólnocie klasowej (przy założeniu o stopniowym i właściwym wprowadzaniu ucznia w wymogi metody matematycznej);
- jest przekazywany w sposób adekwatny do form znanych i dopuszczalnych na odpowiednim etapie edukacyjnym (ma właściwy stopień formalizacji).

Najbardziej dyskusyjny i wymagający komentarza jest trzeci z wyszczególnionych w tym określeniu warunków. Wymaga jawności stosowanych w rozumowaniu kryteriów decydujących o tym, czy dany sposób wyciągania wniosków uznajemy w konkretnej społeczności klasowej za poprawny, czy nie. Jest to kryterium uznawania poprawności rozumowań uzasadniających wymagające ogromnej troski i specjalnie zaplanowanej ewolucji: od narzędzi naiwnych po zaawansowane formalnie dedukcyjnie ustrukturyzowane wnioskowania.

Rozdział 5

Określenie własnej pozycji badawczej

Bogactwo i wielowątkowość obu zakresów tematycznych poruszanych w tej pracy (metodologia matematyki i antropomatematyka) implikują konieczność zawężenia spektrum badawczego dla przedstawianych w tej książce własnych badań antropomatematycznych. Tak się zresztą dzieje zawsze w przypadku, gdy problematyka badawcza dotyka zbyt wielu zagadnień, które mogą zostać włączone do analizy. W tym rozdziale przedstawię w zarysie całą tematykę, a następnie na jej tle wskażę szczegółowe kwestie, które poddaję badaniom własnym.

5.1. Założenia ogólne antropomatematycznego podejścia badawczego

Zasadniczym celem przedstawionych w tym opracowaniu badań jest potwierdzenie, że na wynik szkolnego nauczania odnoszącego się do metody matematycznej ma wpływ wiele czynników. Są wśród czynniki natury merytorycznej, ale – co ważne – również niemerytoryczne składowe procesu nauczania-uczenia się rozpatrywanego w szerokim (m.in. społecznym) kontekście.

Ustalenie mojej własnej pozycji badawczej i jej antropomatematycznego charakteru wymaga wyszczególnienia kilku założeń, przedstawionych szerzej w rozdziałach poprzednich. Zakładam, że:

1. Jednym z podstawowych celów prowadzenia badań dydaktycznych nad nauczaniem i uczeniem się matematyki jest głębokie, wnikliwe i wielostronne zrozumienie uwarunkowań i przebiegu tego procesu;
2. Należy podjąć wysiłki na rzecz długofalowego procesu zmiany powszechnej opinii i wyobrażeń na temat matematyki, m.in. poprzez zmianę jej wizerunku przekazywanego w nauczaniu. Ważne jest, jakie zabiegi należy stosować, aby ten przedmiot stał się bardziej dostępny dla większości uczniów. W nauczaniu powinno się zrezygnować z autorytatywnego przekazywania wiedzy i dążenia do ukazywania tej dziedziny jako domeny prawd absolutnych. Konieczne jest podjęcie próby znalezienia wspólnego stanowiska matematyków i dydaktyków co do natury i spodziewanych rezultatów powszechnej edukacji matematycznej;
3. Proces nauczania-uczenia się matematyki powinien być rozpatrywany w szerokim kontekście, z uwzględnieniem całości Szkolnego Układu Antropomatema-

tycznego (SUA), włączając rolę nauczyciela, jego wiedzy i przekonań w rezultaty rozważanego procesu. Uznając integralność układu SUA, należy rozpoznać jak najwięcej związków i relacji pomiędzy poszczególnymi jego elementami;

4. Należy uwzględnić i mocno zaakcentować istnienie nauczyciela i funkcjonowanie w SUA jego uświadomionej i nieuświadomionej wiedzy matematycznej, a także tej, która odnosi się do komponentów psychologiczno-pedagogicznych w strukturze tego układu;
5. Argumentowanie i dowodzenie w ujęciu antropomatematycznym mają w pełni charakter humanistycznego procesu społecznego. Mają swoją genezę w pewnej szczególnej potrzebie człowieka – naturalnej bądź sprowokowanej – związanej z przekonywaniem innych o słuszności jakiegoś sądu ogólnego. Efekty procesu weryfikacji stwierdzeń matematycznych w naturalnych warunkach nauczania-uczenia się matematyki są komunikowane innym uczestnikom tego procesu. Są one weryfikowane przez innych uczniów, nauczyciela lub podręcznik;
6. Kształtowanie umiejętności argumentowania i dowodzenia oraz ocena osiągnięć ucznia w tym zakresie muszą uwzględniać humanistyczne i społeczne aspekty tego zagadnienia. Powinniśmy zważać na to, że:
   a) udział intuicji, empirii i wnioskowań typu indukcyjnego w procesie poszukiwania argumentacji dla uznawania prawdziwości tez matematycznych jest naturalny i ważny, prowadzenie formalnych dowodów może mieć znaczenie drugorzędne,
   b) konkret i konkretyzacja w uczniowskich rozumowaniach matematycznych mają znaczenie pierwszorzędne i decydujące[1],
   c) na znaczenie, jakie uczeń nadaje terminom dowodzenie, argumentowanie i uzasadnianie itp. (spotykanym na lekcjach matematyki), mają wpływ schematy myślenia charakterystyczne dla kontekstów życia codziennego[2];
7. Antropomatematyczne ujęcie matematyki edukacyjnej powinno odzwierciedlać dążenie do dostosowania nauczania matematyki do nowych warunków, wśród których należy podkreślić ciągłe zmiany społeczne i kulturowe, wspomagane powszechnym używaniem środków technologii informacyjnej. Powszechność wykorzystywania tych środków ma ogromny wpływ na sposób postrzegania świata przez młodych ludzi. W nauczaniu matematyki nie możne tego nie zauważać i zaniedbywać.

[1] Zgodnie z ujawnioną przeszkodą epistemologiczną, nazwaną przez R. Dudę „przeszkodą konkretu" (1995).

[2] Psychologowie rozróżniają dwa systemy poznawcze: System I i System II. W procesach myślenia dnia codziennego bierze udział System I (działający spontanicznie, szybko, całościowo). System II działa analitycznie, racjonalnie, jest kontrolowany i przebiega stosunkowo powoli. Konteksty matematyczne wymagają myślenia, które jest wynikiem działania Systemu II. W większej części swojego życia uczeń posługuje się procesami myślenia charakterystycznymi dla Systemu I i ten sposób myślenia odnosi także do kontekstów matematycznych i to może być przyczyną stosowania w matematyce niepożądanych schematów rozumowania (patrz S. Vinner 2012).

Antropomatematyczne podejście do badań dydaktycznych powinno odnosić się do tych kwestii zarówno koncepcyjnie, jak i empirycznie. Takie podejście wymaga odpowiednich zmian i przewartościowań podejścia metodologicznego do prowadzenia badań antropomatematycznych i uwzględnienia szerokich możliwości interpretacyjnych ich wyników.

5.2. Założenia dotyczące badań własnych

Zagadnienie rozwijania rozumienia metody matematycznej w jej nauczaniu powinno być przedmiotem wnikliwych badań dydaktycznych na całym świecie, tak by uwzględniały one szerokie spektrum przedmiotów i obiektów tych badań i unowocześnianie metod badawczych.

Ustalenia co do zawężenia pola moich badań własnych rozpocznę od przedstawienia i omówienia schematu 3 (patrz poniżej). Schemat zwraca uwagę na istnienie w układzie SUA pewnych istotnych czynników mających decydujący wpływ na rezultat procesu nauczania-uczenia się matematyki w kontekście kształtowania się w umyśle ucznia zasad funkcjonowania i uprawomocniania się wiedzy matematycznej[3].

Schemat 3. Nauczycielska transpozycja wiedzy przedmiotowej dotyczącej metodologii matematyki

[3] Schemat 3 nie obejmuje wszystkich możliwych do rozważenia czynników. Jest on pewnym fragmentarycznym uszczegółowieniem schematu 2, przedstawiającego Szkolny Układ Antropomatematyczny SUA (odnoszącym się do strzałek oznaczonych na nim numerami 1, 4 i 6).

Schemat 3 podkreśla wspominaną już kilkakrotnie perspektywę społeczno-kulturową badań procesu nauczania-uczenia się matematyki w układzie SUA. Każe skupić się na określonej części tego złożonego procesu, jaką jest udział i rola nauczyciela na drodze pomiędzy pojmowaniem metody matematyki w profesjonalnym jej uprawianiu a uczniowską wiedzą na ten temat.

Na obraz metody matematycznej, który konstytuuje się w umysłach uczniów, bez wątpienia mają wpływ (co najmniej) trzy składniki wypełniające środkową część powyższego schematu. Jednym z nich jest psychologiczna wiedza i wyobrażenia nauczyciela na temat przebiegu procesów poznawczych w umyśle jednostki uczącej się. Trudno wyrokować, jaki zakres wiedzy na temat umysłowych struktur poznawczych człowieka, zasad ich powstawania i przeobrażania ma przeciętny nauczyciel, kształcony przecież w trakcie studiów w pewnym zakresie przedmiotów psychologiczno-pedagogicznych. Część tej wiedzy Shulman (1986) określa jako wiedzę pedagogiczną (*pedagogical content knowledge* – PCK) i wymienia obok dwu innych kategorii wiedzy nauczycielskiej: wiedzy przedmiotowej (*subject matter knowledge* – SMK) oraz wiedzy na temat programów nauczania (*curriculum knowledge*– CK) (za: Sajka 2006). Wydaje się jednak, że ograniczenie pierwszej z wymienionych kategorii wiedzy potrzebnej nauczycielowi do wiedzy z zakresu pedagogiki, a nieuwzględnienie *explicite* wiedzy z zakresu psychologii, jest zbytnim zubożeniem. Nauczycielowi potrzebna jest podstawowa wiedza psychologiczna o procesach poznawczych, zasadach ich inspirowania i przebiegu, mimo że teorie psychologiczne w tym zakresie są różne, a czasem w niektórych fragmentach wręcz rozbieżne[4].

Kolejnym czynnikiem odgrywającym istotną rolę w inferencji pomiędzy nauczycielskim pojmowaniem metodologii wiedzy matematycznej a szkolnym jej ujęciem jest stosunek nauczyciela (poznawczy i emocjonalny) do reguł orzekania o poprawności stwierdzeń w obrębie matematyki. Uznaje się, że nauczyciel posiada wystarczające doświadczenie w działalności o charakterze matematycznym, w tym w prowadzeniu (lub przyswajaniu gotowych) rozumowań o charakterze dowodowym. Należy się zatem spodziewać, że ma on pewien pogląd (być może w pewnym stopniu nieuświadomiony) na temat roli dowodu w matematyce oraz jakiś stosunek emocjonalny do tej tematyki, będący wypadkową wielu składowych, m.in. własnej znajomości matematyki i osobistych doświadczeń z okresu uczenia się i studiowania. Jednak pamiętać należy, że

[4] Ta rozbieżność dotyczy np. roli emocji w procesie poznawczym człowieka. Niektóre z teorii zakładają, że emocje pojawiają się dopiero w wyniku procesu poznawczego jako jeden z jego rezultatów: *aby jakiś stan istotnie był emocją, musi go poprzedzić jakiś rodzaj nadających mu znaczenie ocen poznawczych* (Ekman, Davidson 1999, s. 203). Inni psychologowie twierdzą tymczasem, że pierwszy poziom reagowania człowieka na środowisko (następujący jeszcze przed jakimkolwiek procesem o charakterze poznawczym) ma właśnie charakter emocjonalny. *Emocje zawsze towarzyszą myślom, lecz nie zawsze myśli towarzyszą emocjom, [...] nie trzeba się domyślać, by wiedzieć, co się woli* (Zajonc 1985, s. 27–28).

*wiedza matematyczna daje dydaktykowi i nauczycielowi tylko „surowiec", który musi być poddany przetworzeniu dydaktycznemu. […] Wymaga to nie tylko wiedzy, ale i refleksji nad samą matematyką i matematyczną aktywnością (*Krygowska 1977, s. 14).

Wynikiem tego przetworzenia jest w dużej mierze subiektywny nauczycielski obraz matematyki szkolnej oraz zbiór poglądów i przekonań na temat potrzeby, a także możliwości kształtowania określonych elementów wiedzy w umysłach uczniów (te przekonania czasem bywają nieuświadomione i bezwiednie przekazywane).

Temat istnienia i roli nauczycielskiego postrzegania elementów wiedzy matematycznej jest traktowany jako ważny we współczesnych badaniach w dydaktyce matematyki (np. Freudenthal 1981; McLeod 1992; Schoenfeld 1992; Mason 1998; Mason i in. 1998; Howe 1999; Ma 2001; Hannula 2006; Sajka 2006; Callejo, Vila 2009; Hemmi 2010; Cocburn 2012). Wszyscy badacze zgodnie potwierdzają istnienie transferu pomiędzy systemem wiedzy i przekonań nauczyciela a strukturą wiedzy i zapatrywań ucznia. Problem polega na tym, że często ten transfer jest niejawny, a nauczyciele nie są świadomi jego istnienia. Równie zgodny jest we wspomnianych publikacjach wniosek o konieczności prowadzenia badań na temat kierunków i uwarunkowań tego przepływu. Przykładem mogą tu być badania (Ruffell, Mason, Allen 1998), będące próbą postawienia diagnozy co do postaw uczniów wobec szkolnej matematyki[5] i stworzenia narzędzi dla nauczycieli, które mogliby oni wykorzystać do testowania postaw swoich uczniów[6].

Pamiętajmy o jeszcze jednym istotnym czynniku mającym wpływ na ostatnią z omawianych kategorii nauczycielskiego ujęcia nauczania matematyki w szkole (patrz schemat 3). Jest nim zestaw dokumentów oświatowych (takich jak podstawa programowa, programy nauczania i podręczniki szkolne), które zawierają wytyczne i wskazówki dla nauczycieli co do zakresu i sposobów kształtowania poszczególnych elementów wiedzy oraz rozumienia metody matematyki.

Obraz sytuacji opisywanej w schemacie 3 nie byłby pełny bez odniesienia się do osoby ucznia będącego nieobojętnym odbiorcą zabiegów nauczycielskich. Istotne i wręcz decydujące są jego chęci, możliwości, naturalne skłonności i przekonania oraz motywacje w zakresie uczenia się matematyki, a w szczególności interesującego nas zakresu. Jest to obszerna grupa odrębnych zagadnień badawczych.

[5] Jako punkt wyjścia w tych badaniach przyjęto następującą definicję *postawy*: jest to *wielowymiarowa struktura, w którą wplecione są trzy składniki: kognitywny (wyrażanie przekonań względem obiektu, którego dotyczy postawa), afektywny (wyrażanie uczuć do obiektu, którego dotyczy postawa), konatywny (wyrażanie zamiarów behawioralnych)* (Ruffel, Mason, Allen 1998, s. 3).

[6] Badania te prowadzone były jako konsekwencja obserwowanego w dydaktyce matematyki przesunięcia zainteresowania z badań dotyczących rozumienia przez uczniów pojęć matematycznych na badania dotyczące wpływu oczekiwań i sądów nauczyciela względem uczenia się matematyki na jego uczniów (1998, s. 1–2).

Podsumujmy dotychczasowe rozważania. Na przebieg i rezultaty uczenia elementów metodologii matematyki, w tym na kształtowanie umiejętności dowodzenia i argumentowania, mają wpływ głównie trzy czynniki:

- dokumenty oświatowe, które normują zakres wiedzy i umiejętności uczniowskich,
- wiedza i przekonania nauczyciela organizującego proces nauczania-uczenia się matematyki,
- naturalne skłonności ucznia i jego umiejętności nabywane w życiu codziennym.

Moje własne badania dotyczące Szkolnego Układu Antropomatematycznego będą się koncentrować na:

- wiedzy uczących się związanej ze stosowaniem elementów metodologii matematycznej, ich preferencjach dotyczących stosowanych metod uzasadniania oraz rozwijaniu się tych umiejętności na przestrzeni wszystkich etapów edukacyjnych (włącznie ze studiami matematycznymi);
- roli nauczyciela w rozwijaniu wiedzy uczniów;
- poglądach nauczycieli na temat możliwości i znaczenia metodologii matematyki.

Rozdział 6

Badania empiryczne własne

Badania empiryczne opisywane w tej pracy mają zróżnicowany charakter. Stanowią przykład łączenia analiz jakościowych prowadzonych czasem na niewielkich próbach badawczych z analizami ilościowymi służącymi wzmacnianiu postawionych hipotez. Z tego typu badaniami wiążą się pewne problemy, których i w moich próbach nie udało się uniknąć. Wyniki badań na niewielkiej próbie badawczej są zależne od wielu niezobiektywizowanych czynników. Co więcej, uzyskane rezultaty interpretowane są na podstawie kilku korelacji, które mogą być nie tylko pozorne, ale i przypadkowe. Niewątpliwie jednak badania tego typu, nazywane podstawowymi (Krygowska 1982, Schoenfeld 1991), mogą być źródłem wielu hipotez, które można potem poddawać badaniom na szerszą skalę.

Tak też dzieje się w przypadku badań opisywanych w tej pracy. Stanowią one źródło wniosków i hipotez, które w trakcie badań znalazły częściowe potwierdzenie.

Przeprowadzone badania wskazują i częściowo weryfikują niektóre zagadnienia związane z rozumowaniami uzasadniającymi w systemie matematycznej wiedzy uczniów i nauczycieli, a ponadto ilustrują wieloaspektowość i głębię związków pomiędzy elementami Szkolnego Układu Antropomatematycznego SUA.

6.1. Kierunki badań prezentowanych w pracy

W tej części opiszę szczegółowo cztery kierunki badań własnych, zapowiedzianych w poprzednim rozdziale. Są to:

1. **Badanie T**: Teoretyczne studia dokumentów sterujących nauczaniem matematyki.
2. **Badanie R**: Rozpoznanie kompetencji uczących się matematyki w zakresie rozumowań typu dowodowego na różnych poziomach edukacyjnych, głównie pod kątem posługiwania się w nich konkretnym przykładem oraz schematów rozumowań mających swe źródło w pozamatematycznych sposobach myślenia człowieka.
3. **Badanie D**: Diagnoza rozwoju umiejętności uzasadniania stwierdzeń matematycznych na poszczególnych etapach kształcenia.

4. **Badanie NiS**: Poglądy i wiedza nauczycieli oraz studentów-przyszłych nauczycieli, dotycząca wybranych aspektów metodologii w działalności matematycznej własnej uczniów.

Szczegóły dotyczące metodologii i przebiegu badań we wskazanych kierunkach zostaną sukcesywnie opisane w kolejnych częściach tego rozdziału, a opisy poprzedzone wstępem teoretycznym, stanowiącym podstawę wyciągania wniosków. W niektórych przypadkach wstęp będzie zawierał też krótkie opisy przykładów światowych badań dydaktycznych, co – w moim mniemaniu – stanowi uzasadnienie prowadzenia badań tego typu.

6.2. Warunki, charakter, przebieg oraz wyniki badań

6.2.1. Badania szczegółowe tematyczne 1: Studia dokumentów sterujących nauczaniem matematyki (badanie T)

W tej części badania analizie poddane zostały główne dokumenty sterujące celami i treściami szkolnego nauczania-uczenia się matematyki. Jak podkreślają G. Hanna (2000) oraz E. Levenson i R. Barkai (2012), program nauczania często wyznacza standardy dla tego, jak jest zorganizowane szkolne nauczanie, a co ważniejsze, jak są oceniane wyniki takiego nauczania. Ponadto potencjalni i praktykujący już nauczyciele w swoim rozwoju zawodowym są w sposób oczywisty obligowani do wykorzystywania dokumentów oświatowych i często posługują się ich wytycznymi do konstruowania planów lekcji. Dlatego zawartość takich dokumentów jest kwestią ważną dla analiz dydaktycznych.

Biorąc to pod uwagę, postawiłam w tej części badania następujące pytanie:
Jak kwestia dowodzenia i uzasadniania jest przedstawiana w założeniach programowych dotyczących współczesnego nauczania matematyki w Polsce?

Metodą badawczą była analiza jakościowa i ilościowa dokumentów oświatowych obowiązujących nauczyciela matematyki pod kątem akcentowania w nich umiejętności typu dowodowego. Pamiętajmy, że mówiąc o dokumentach obowiązujących nauczyciela, mamy na myśli głównie dwa ich rodzaje: dokumentację ustanowioną przez Ministerstwo Edukacji Narodowej (podstawa programowa) i dokumentację przyjętą przez daną szkołę (programy nauczania i podręczniki).

Odpowiedź na rozważane tu pytanie badawcze może dać obraz usytuowania postulowanych umiejętności uczniów dotyczących stosowania interesującego nas typu rozumowania w celach ogólnych i wymaganiach szczegółowych dwóch głównych dokumentów oświatowych, które ma do dyspozycji nauczyciel matematyki na konkretnym poziomie edukacyjnym. Rozważmy więc „Podstawę programową kształcenia ogólnego” (wprowadzoną w życie Rozporządzeniem Ministra Edukacji Narodowej z dnia 23 grudnia 2008 r.) oraz niektóre programy nauczania matematyki na różnych poziomach edukacyjnych[1]. Analizy tych dokumentów zostały uzupełnione wglądem w niektóre podręczniki do matematyki, a analizie poddano proponowane przez autorów tych podręczników uzasadnienia stwierdzeń ogólnych w nich zawartych.

- **Analiza „Podstawy programowej kształcenia ogólnego”**[2]

Przypomnijmy podstawowe założenie o kształcie i ciągłości edukacji matematycznej w kształceniu ogólnym, które określa, że ukierunkowane nauczanie elementów matematyki rozpoczyna się na poziomie wychowania przedszkolnego i na tym etapie mamy do czynienia ze *wspomaganiem rozwoju intelektualnego dzieci wraz z edukacją matematyczną*. Takie ukierunkowane rozwijanie kompetencji matematycznych przechodzi następnie w wyraźnie już nazwaną *edukację matematyczną* (edukacja wczesnoszkolna – I etap edukacyjny), która na kolejnych etapach kształcenia (klasy IV–VI – II etap edukacyjny, gimnazjum – III etap oraz szkoła ponadgimnazjalna – IV etap) przekształca się w przedmiot szkolnego nauczania o nazwie *matematyka*. Nauczaniem na wszystkich tych poziomach edukacyjnych steruje omawiany dokument oświatowy. Pamiętajmy, że podstawa programowa to zapis tego, czego państwo polskie zobowiązuje się nauczyć przeciętnie uzdolnionego ucznia, a wyróżnia się w niej cele kształcenia (sformułowane jako wymagania ogólne) i treści nauczania (sformułowane jako wymagania szczegółowe).

Analizując treść tego dokumentu pod kątem postulowania w nim zdobywania przez uczniów umiejętności uzasadniania stwierdzeń ogólnych w matematyce, możemy dokonać kilku obserwacji (przechodząc kolejno poprzez zapisy dla poszczególnych etapów edukacyjnych).

I etap edukacyjny (edukacja wczesnoszkolna)

Dosyć ogólnikowo określa się tu, że istota edukacji matematycznej na rozważanym poziomie nauczania ma na celu wspomaganie rozwoju umysłowego dzieci. Jeśli chodzi o postulaty odnoszące się do interesującego mnie w badaniu rodzaju myślenia matematycznego, w założeniach zawartych w dokumencie znajdujemy zapis o konieczności prowadzenia z dziećmi „rozumowań przyczynowo- skutkowych”. Chodzi o przewidywanie skutków wykonywanych czynności konkretnych oraz czynność odwrotną – poszukiwanie przyczyn zachodzenia zjawisk. To ważne, bo myślenie przyczynowo-skutkowe jest wstępem do późniejszych, potencjalnych rozumowań o charakterze dedukcyjnym.

---

[1] Przypomnijmy, że każdy program nauczania musi spełniać kryteria określone odpowiednio w § 4 lub § 5 Rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 8 czerwca 2009 r. w sprawie dopuszczania do użytku w szkole programów wychowania przedszkolnego i programów nauczania oraz dopuszczania do użytku szkolnego podręczników (Dz. U. 2009, Nr 89, poz. 730).

[2] Dokument jest dostępny m.in. na stronie http://bip.men.gov.pl/men_bip/akty_prawne/rozporzadzenie_20081223_v2.pdf

II etap edukacyjny (szkoła podstawowa)

W Podstawie programowej formułuje się cztery cele ogólne kształcenia matematycznego na tym etapie, ostatni z nich to „rozumowanie i tworzenie strategii". Wynik nauczania związany z tym celem brzmi:

> *uczeń prowadzi proste rozumowanie składające się z niewielkiej liczby kroków, ustala kolejność czynności (w tym obliczeń) prowadzących do rozwiązania problemu, potrafi wyciągnąć wnioski z kilku informacji podanych w różnej postaci* (s. 41).

W całym analizowanym dokumencie jest to jedyne odniesienie do kształtowania u uczniów umiejętności związanych z prowadzeniem rozumowań uzasadniających. Zauważmy też, że nie pojawiają się w tym tekście terminy: *uzasadnianie, argumentowanie, przekonywanie*. Mowa jest o prowadzeniu prostych rozumowań bez określania, jakiego one mają być typu.

III etap edukacyjny (gimnazjum)

Podobnie jak w przypadku poprzedniego etapu edukacyjnego, wskazanie do kształtowania umiejętności związanych z prowadzeniem rozumowań ukierunkowanych na uzasadnianie stwierdzeń ogólnych znajduje się w sformułowaniu jednego z ogólnych celów kształcenia, nazwanego „rozumowanie i argumentacja". Znajdujemy tam zapis:

> *uczeń prowadzi proste rozumowania, podaje argumenty uzasadniające poprawność rozumowania* (s. 173).

To wskazanie jest już bardziej konkretne niż poprzednio, zawiera bowiem termin *argument* oraz postuluje się, żeby uczeń potrafił ich używać do uzasadniania poprawności rozumowań. Jednak nie znajdujemy tu odniesień do dedukcyjnego charakteru rozumowań ukierunkowanych na dowodzenie matematycznych zdań natury ogólnej, choć to właśnie na tym etapie edukacji matematycznej po raz pierwszy uczeń spotka się z terminami *twierdzenie, twierdzenie odwrotne, dowód*.

IV etap edukacyjny (liceum ogólnokształcące i technikum)

W zapisach Podstawy programowej, w celu ogólnym o numerze 5, także pod nazwą „rozumowanie i argumentacja", czytamy, że na poziomie podstawowym kształcenia matematycznego

> *uczeń prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków* (s. 177).

Zauważmy, że jest to mniejsze wymaganie niż w sformułowaniu analogicznego celu dla gimnazjum. Inaczej sprawa wygląda w odniesieniu do poziomu rozszerzonego, dla którego cel został sformułowany następująco:

uczeń tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność (s. 177).

Jest to już stosunkowo wysokie wymaganie, jednak dla celów przedstawianej tu analizy ponownie trzeba zauważyć, że nie użyto tu sformułowań, w których występuje termin: *dowód, dowodzenie, rozumowanie dedukcyjne* czy tym podobne.

W wyniku lektury Podstawy programowej nasuwają się następujące wnioski.

WNIOSEK T1

> W podstawowym dokumencie sterującym nauczaniem matematyki na wszystkich poziomach tego nauczania postuluje się, co prawda, osiąganie przez uczniów pewnych umiejętności odnoszących się do stosowania elementów metodologii matematyki, ale te odniesienia sformułowane zostały niejasno i mało kategorycznie.

WNIOSEK T2

> W analizowanym dokumencie nie używa się terminów *dowód*, *dowodzenie*, mowa jest natomiast o *rozumowaniu*, *argumentowaniu*, *tworzeniu łańcucha argumentów i uzasadnianiu jego poprawności*. Jest to pewna (istotna z punktu widzenia metodologii matematyki) zmiana języka, w którym sformułowane zostały postulowane umiejętności uczniów.

WNIOSEK T3

> Podstawa programowa stanowi bazę wszystkich programów nauczania, a reprezentowane w niej ujęcie tematyki dotyczącej roli dowodu i dowodzenia ma duże znaczenie w założeniach wszystkich programów nauczania matematyki. Brak w tym dokumencie jednoznacznych sformułowań dotyczących interesującej nas tematyki może być przez niektórych autorów programów i podręczników do matematyki interpretowane jako możliwość pominięcia tych trudnych do realizacji elementów kształcenia.

Przyjrzyjmy się teraz kilku przypadkowo wybranym programom nauczania powstałym na bazie analizowanego dokumentu.

- **Analiza wybranych programów i podręczników do nauczania matematyki**

Zasadniczym celem analizy programów nauczania było określenie częstotliwości występowania terminów mających odniesienie do prowadzenia przez uczniów rozumowań uzasadniających. Analizę przeprowadziłam w następujący sposób:

1. Wyróżniłam wszystkie synonimy nazw aktów myśli odzwierciedlających znaczenie słów kluczowych: wyjaśnianie, uzasadnianie, dowodzenie[3].

[3] Dobór słów kluczowych został podyktowany tym, że tych najczęściej terminów używa się w obcojęzycznej literaturze dydaktycznej do określania umiejętności dotyczących elementów me-

2. Wybrane programy nauczania analizowałam pod kątem występowania wspomnianych wyżej słów kluczowych (oraz wszystkich ich synonimów).

Dla terminu *wyjaśnianie* słowniki języka polskiego podają następujące synonimy: *objaśnianie, wytłumaczenie, rozumowanie*. Słowo *uzasadnianie* może być zastąpione przez określenia: *usprawiedliwianie, motywowanie, przekonywanie, potwierdzanie*. Natomiast użycie terminu *dowodzenie* można zastąpić przez użycie słów: *badanie, argumentowanie, uprawomocnianie, wywodzenie, wnioskowanie*.

Wyniki ilościowe co do częstotliwości występowania słów kluczowych i ich synonimów w wybranych programach nauczania[4] na poszczególnych etapach kształcenia przedstawione zostały w tabelach 6.2.1.1–6.2.1.8.

I etap edukacyjny (edukacja wczesnoszkolna)

Programy nauczania, które w przypadku tego etapu edukacyjnego zostały poddane analizie, to:

1. „Wesoła szkoła i przyjaciele" (J. Hanisz);
2. „Szkoła na miarę" (T. Janicka-Panek, H. Małkowska-Zegadło, B. Bieleń);
3. „Witaj szkoło!" (A. Korcz, D. Zagrodzka);
4. „Nasza klasa" (Cz. Cyrański, E. Misiorowska).

Dane dotyczące częstotliwości występowania słów kluczowych w programach 1–4 przedstawiono w tabeli 6.2.1.1.

Tabela 6.2.1.1

Program nauczania	*Wyjaśnianie*	*Uzasadnianie*	*Dowodzenie*	Łącznie
„Wesoła szkoła i przyjaciele"	1	0	0	1
2. „Szkoła na miarę"	0	0	0	0
3. „Witaj szkoło!"	0	0	0	0
4. „Nasza klasa"	1	0	0	1

Możemy powiedzieć – zgodnie z przewidywaniami – że autorzy programów nauczania matematyki dla etapu wczesnoszkolnego prawie nie używają rozważanych słów kluczowych w opisach powinności dzieci. O ile zrozumiały jest całkowity brak występowania tu terminu *dowodzenie*, to niezrozumiały jest brak występowania terminów *wyjaśnianie* i *uzasadnianie*. W szczególności termin *wyjaśnianie* mógłby się pojawić dla zaznaczenia, że chodzi o realizację zawartego w Podstawie programowej zapisu o konieczności prowadzenia z dziećmi „rozumowań przyczynowo-skutkowych"**.**

tody matematycznej w nauczaniu (*explanation, justification, proof)* (patrz np. Tsamir, Tirosh, Levenson 2008, 2010)

[4] Wybór konkretnych programów nauczania poddanych analizie jest podyktowany faktem istnienia ogólnodostępnych cyfrowych wersji tych programów w Internecie, co ułatwiło przeszukiwanie dzięki odpowiednim wyszukiwarkom słów w tekście.

Dla porównania przedstawię zestawienie częstości występowania analizowanych terminów w dokumentach odpowiadających naszym programom nauczania w innych krajach (w odniesieniu do klas 1–3)[5].

Tabela 6.2.1.2

Kraj	*Wyjaśnianie*	*Uzasadnianie*	*Dowodzenie*	Łącznie
Chiny	4	0	0	4
Izrael	15	0	0	15
Szwecja	18	0	0	18

Powyższa tabela wskazuje na wyraźną dysproporcję pomiędzy częstością używania terminu *wyjaśnianie* w polskich programach nauczania w porównaniu z tego typu dokumentami obowiązującymi w innych krajach, szczególnie w Izraelu i Szwecji.

Przejdźmy do kolejnego etapu edukacyjnego.

II etap edukacyjny (szkoła podstawowa)

Do analizy zostały wybrane następujące programy nauczania matematyki:

1. „Matematyka z kluczem" (M. Braun, A. Mańkowska, M. Paszyńska);
2. „Matematyka wokół nas" (H. Lewicka, M. Kowalczyk);
3. „Matematyka 2001" (M. Dąbrowski, P. Piskorski, W. Zawadowski);
4. „Matematyka z plusem" (M. Jucewicz, M. Karpiński, J. Lech).

W tabeli 6.2.1.3 w nawiasach podana jest informacja o umiejscowieniu danego słowa w treściach programowych bądź w uwagach wstępnych.

Tabela 6.2.1.3

Program nauczania	*Wyjaśnianie*	*Uzasadnianie*	*Dowodzenie*	Łącznie
1. „Matematykaz kluczem"	3 (wstęp)	1 (geometria)	2 (wstęp) 2 (algebra) 5 (elem. statystyki)	13
2. „Matematyka wokół nas"	5 (wstęp)	0	0	5
3. „Matematyka 2001"	2 (wstęp) 2 (algebra) 3 (arytmetyka) 3 (elem. statystyki)	3 (wstęp) 2 (geometria) 5 (elem. statystyki)	0	20
4. „Matematyka z plusem"	3 (wstęp)	0	0	3

[5] Zamieszczone w tabelach 6.2.1.2, 6.2.1.4, 6.2.1.6 dane pochodzą z następujących dokumentów (dostępnych w Internecie):

Ministry of Education, People's Republic of China, 2001, "Mathematics curriculum standards for compulsory education, Beijing", People's Education Press.

Ministry of Education, 2009, "Mathematics Curriculum Topics with Accompanying Examples, Retrieved December", Jerusalem, Israel.

Skolverket [Swedish National Agency for Education], 2011, "Curriculum for the compulsory school, preschool class and the leisure-time centre", Stockholm.

Zestawienie pokazuje, że na tym etapie nauczania rozważane słowa kluczowe pojawiają się już częściej, ale znajdują się głównie we wstępnych opisach założeń programowych, czyli tam, gdzie zapowiadana jest koncepcja danego programu nauczania. W grupie ww. programów wyróżniają się programy 1 i 3 ze względu na częstsze użycie słów kluczowych, przy czym słowa *dowód* lub *dowodzenie* pojawiają się tylko w programie 1.

Dane z programów dla szkół w Chinach, Izraelu i Szwecji:

Tabela 6.2.1.4

Kraj	*Wyjaśnianie*	*Uzasadnianie*	*Dowodzenie*	Łącznie
Chiny	4	0	0	4
Izrael	45	2	0	45
Szwecja	16	0	0	16

Zestawienie danych z tabel 6.2.1.3 i 6.2.1.4 wskazuje, że w polskich programach nauczania do szkół podstawowych częściej niż we wspomnianych programach zagranicznych używa się sformułowania *uzasadnianie lub dowodzenie* (oczywiście nasze programy są pod tym względem bardzo zróżnicowane), ale dużo rzadziej używane jest słowo w*yjaśnianie* – słowo chyba niedoceniane w dokumentach dla określania ważnej aktywności natury matematycznej (oraz pozamatematycznej).

III etap edukacyjny (gimnazjum)

Ze względu na praktykę kontynuacji serii programowych z poprzedniego etapu edukacyjnego analizie poddano programy nauczania o tych samych nazwach, będące odpowiednio kontynuacjami programów 1–4 wymienionych wyżej.

Zestawienie dla trzeciego etapu edukacyjnego przedstawia się następująco:

Tabela 6.2.1.5

Program nauczania	*Wyjaśnianie*	*Uzasadnianie*	*Dowodzenie*	Łącznie
1. „Matematyka z kluczem”	16 (wstęp)	1 (geometria)	0	17
2. „Matematyka wokół nas”	5 (wstęp)	1 (geometria)	1 (geometria)	7
3. „Matematyka 2001”	9 (wstęp)	8 (wstęp) 8 (geometria) 2 (algebra) 3 (elem. statystyki)	11 (wstęp) 3 (geometria)	44
4. „Matematyka z plusem”	2 (wstęp)	1 (geometria)	0	3

Dane w tabeli ukazują wyraźną dysproporcję pomiędzy częstotliwością występowania badanych słów kluczowych. Najczęściej analizowane terminy występują w programie „Matematyka 2001”, a najrzadziej w programie „Matematyka z plusem”.

Wspólnym elementem wszystkich programów jest to, że to głównie w dziale geometria autorzy upatrują dobrego środowiska do kształtowania umiejętności związanych z argumentowaniem stwierdzeń matematycznych. Ilościowe różnice są jednak duże.

Popatrzmy jeszcze na dane z programów dla szkół w Chinach, Izraelu i Szwecji.

Tabela 6.2.1.6

Kraj	*Wyjaśnianie*	*Uzasadnianie*	*Dowodzenie*	Łącznie
Chiny	8	0	41	49
Izrael	31	4	68	103
Szwecja	12	0	0	12

Tutaj również dysproporcje są duże, szczególnie w przypadku Izraela i Szwecji, i to przede wszystkim w odniesieniu do terminu *dowodzenie*. Możliwe, że wynika to w pewnym stopniu z różnic językowych pomiędzy terminami określającymi czynność dowodzenia w języku angielskim i szwedzkim, jednak ta dysproporcja ilościowa faktycznie istnieje[6].

IV etap edukacyjny (liceum ogólnokształcące i technikum)

Zakres podstawowy

1. „Matematyka. Poznać, zrozumieć" (A. Przychoda, Z. Łaszczyk);
2. „MATeMAtyka" (D. Ponczek);
3. „Prosto do matury" (P. Grabowski);
4. „Matematyka z plusem" (M. Karpiński, M. Braun, J. Lech).

Tabela 6.2.1.7

Programu nauczania	*Wyjaśnianie*	*Uzasadnianie*	*Dowodzenie*	Łącznie
1. „Matematyka. Poznać, zrozumieć"	2 (wstęp) 1 (arytmetyka) 1 (geometria) 3 (ciągi)	1 (logarytmy) 13 (geometria) 2 (funkcje)	1 (wstęp) 1 (arytmetyka) 4 (geometria) 1 (algebra) 3 (ciągi)	33
2. „MATeMAtyka"	2 (wstęp)	2 (wstęp)	1 (wstęp) 1 (arytmetyka) 3 (geometria)	9
3. „Prosto do matury"	2 (wstęp)	0	3 (wstęp) 2 (geometria)	7
4. „Matematyka z plusem"	2 (wstęp) 1 (funkcje) 1 (elem. statystyki)	2 (wstęp)	9 (wstęp) 1 (algebra) 3 (geometria) 2 (funkcje)	21

[6] Dane z tabeli były konsultowane z dydaktykami ze Szwecji.

Z tabeli 6.2.1.7 wynika również istnienie rozbieżności co do ilości występowania badanych słów w analizowanych programach do liceum. Ciekawe jest, że częstotliwość pojawiania się tych słów w wymienionych programach jest mniejsza niż np. w programie nr 3 dla gimnazjum.

Zakres rozszerzony

Analizie poddano tu takie same programy, jak w tabeli 6.2.1.7.

Tabela 6.2.1.8[7]

Programu nauczania	*Wyjaśnianie*	*Uzasadnianie*	*Dowodzenie*	Łącznie
1. „Matematyka. Poznać, zrozumieć”	4 (wstęp) 5 (arytmetyka) 1 (geometria) 3 (ciągi) 1 (algebra)	1 (wstęp) 1 (logarytmy) 17 (geometria) 6 (funkcje) 4 (ciągi) 1 (elem. statystyki)	2 (wstęp) 1 (arytmetyka) 14 (geometria) 3 (algebra) 3 (ciągi) 1 (logarytmy)	68
2. „MATeMAtyka”	3 (wstęp)	2 (wstęp)	2 (wstęp) 1 (arytmetyka) 3 (geometria) 1 (funkcje)	12
3. „Prosto do matury”	2 (wstęp)	0	3 (wstęp) 3 (geometria)	8
4. „Matematyka z plusem”	2 (wstęp) 2 (funkcje) 1 (algebra) 2 (elem. statystyki)	3 (wstęp)	14 (wstęp) 1 (algebra) 1 (arytmetyka) 4 (geometria) 2 (funkcje)	32

Rozbieżności liczbowe ukazane w tabeli 6.2.1.8 są także dosyć duże. Można ocenić, że w niektórych programach nie kładzie się wyraźnego nacisku na osiąganie przez uczniów umiejętności typu dowodowego (a przynajmniej nie używa się jawnych określeń umiejętności tego typu). Przypomnijmy, że mowa tu jest o rozszerzonym poziomie nauczania matematyki, potencjalnie przygotowującym do późniejszych studiów matematycznych. Jeśli zatem nauczyciel realizujący tego typu program będzie rygorystycznie trzymał się wskazań w nim zawartych, to przypuszczalnie poziom przygotowania jego uczniów – absolwentów – do studiowania matematyki może okazać się niewystarczający. Oczywiście nauczyciele i uczniowie mają do dyspozycji jeszcze inne materiały dydaktyczne, w szczególności podręczniki, a przede wszystkim dysponują własną wiedzą matematyczną. Jest bardzo prawdopodobne, że sposób realizacji konkretnych tematów w klasie jest wypadkową wszystkich tych czynników wpływających na proces nauczania-uczenia się matematyki i zawiera wszystkie niezbędne zabiegi kształcące pożądane umiejętności. Analiza kilku pod-

[7] Niestety w przypadku IV etapu edukacyjnego nie dysponuję porównawczymi danymi z innych krajów z powodu zbyt dużych różnic w strukturze szkolnictwa dla tej grupie wiekowej.

ręczników pokazuje jednak, że nie zawsze ich autorzy dbają o ścisłość i klarowność przedstawianych uzasadnień. Czasem znajduje się tam uzasadnienie będące bardziej wskazówką do rozumowania uzasadniającego niż samym rozumowaniem. Stosunkowo częstym sposobem uzasadniania stwierdzeń natury ogólnej jest ilustrowanie ich konkretnymi przykładami.

Analiza najbardziej popularnej serii podręczników dla klas 1–3 gimnazjum „Matematyka z plusem" pokazuje na przykład, że zawarto w nich aż 93 różne własności obiektów matematycznych (sformułowane w postaci zdań ogólnych), przy czym 31 z nich to powtórzenia z poprzednich lat nauki (czyli 62 to własności nowe)[8]. Wszystkie nowe własności zostały w treści podręczników „uzasadnione" najczęściej albo przez podanie wskazówki, której można użyć dla wykazania prawdziwości, albo przez podanie jednego lub kilku przykładów, których zadaniem jest przekonać czytelnika o prawdziwości danego stwierdzenia (np. uzasadnienia dotyczące wzorów na pola figur płaskich). Podane w analizowanych podręcznikach uzasadnienia nie mają charakteru ścisłego dowodu matematycznego, a także nie uzyskały w tekście nazwy dowód (wyjątek stanowi twierdzenie Pitagorasa).

W podręcznikach z tej serii dla IV etapu edukacyjnego dla poziomu podstawowego zamieszczono następujące liczby rozumowań, które można już nazwać rozumowaniami uzasadniającymi:

Tabela 6.2.1.9[9]

Klasa	Liczba dowodów z odniesieniem do działu tematycznego
I	5 (algebra) 11 (geometria) 1 (funkcje)
II	3 (wielomiany) 10 (geometria) 4 (funkcje)
III	4 (funkcje) 4 (prawdopodobieństwo) 1 (stereometria)

Dane w tabeli 6.2.1.9 pokazują, że w analizowanej serii podręczników zamieszczono 43 dowody ogólnych stwierdzeń matematycznych. A zatem, jak można było się domyślać, podręczniki zawierają więcej odniesień do metody matematycznej niż programy nauczania.

[8] Dane liczbowe pochodzą z nieopublikowanej pracy magisterskiej (promotor M. Ciosek): R. Rzepka, „Twierdzenia i uzasadnienia na poziomie gimnazjum", UP, Kraków, 2011.

[9] Dane liczbowe pochodzą z nieopublikowanej pracy magisterskiej (promotor M. Ciosek): M. Nędza-Kubiniec, „Argumentowanie w matematyce szkolnej na poziomie ponadgimnazjalnym", UP, Kraków, 2012.

Przeprowadzone tu rozważania wskazują, że marginalizowanie interesujących nas tematów w zapisie Podstawy programowej ma wpływ na minimalizowanie tych tematów również w niektórych programach nauczania. To potwierdza słuszność wniosku T3, i to w negatywnym sensie rozważanego tam transferu.

Oczywiście analizowane programy nauczania na każdym etapie edukacyjnym różnią się pod tym względem, natomiast widoczna jest różnica co do ilościowego występowania analizowanych terminów pomiędzy etapami I–III a etapem IV. Na tym ostatnim etapie występuje nagłe podniesienie poziomu wymagań metodologicznych dla uzasadniania zdań ogólnych, co może być wymaganiem za wysokim. Kolejne takie zintensyfikowanie następuje na pierwszym roku nauczycielskich studiów matematycznych i to dla wielu studentów jest przeszkodą nie do pokonania. Chodzi o to, że studenci poznają wiele dowodów, ale już gotowych. Jest bardzo prawdopodobne, że i na tym poziomie nie rozwijają swoich umiejętności samodzielnego prowadzenia rozumowań dowodowych.

Sformułujmy ogólny wniosek podsumowujący całość opisanych w tej części badań.

WNIOSEK T4

Ujęcie tematów związanych z kwestią uzasadniania ogólnych stwierdzeń matematycznych w dokumentach regulujących szkolne nauczanie matematyki ma bez wątpienia duży wpływ na przebieg i rezultaty tego nauczania. Ponieważ elementy metodologii matematycznej są mało eksponowane w polskich dokumentach edukacyjnych, możliwe jest, że przekaz idący do nauczyciela na podstawie tych wskazań edukacyjnych jest niejasny (a czasem wręcz mylący).

Trudno oczekiwać, że wszyscy nauczyciele bez specjalnych wskazań w dokumentach oświatowych, takich jak Podstawa programowa oraz programy nauczania matematyki, a także w podstawowych dla nich materiałach, jakim są podręczniki szkolne, będą podejmować zabiegi zmierzające do ukształtowania w umysłach uczniów odpowiedniego obrazu metody matematycznej.

Uzupełnieniem wyników całości opisywanego tu badania T oraz rozważań przedstawionych w podrozdziale 3.3 jest także kolejny wniosek.

WNIOSEK T5

W terminologii dotyczącej stosowania elementów metodologii matematyki w szkolnym nauczaniu-uczeniu się matematyki występuje pewien chaos pojęciowy, widoczny także w dokumentach oświatowych sterujących tym nauczaniem. To może być przyczyną nieporozumień w komunikacji na płaszczyźnie: dokumentacja oświatowa – nauczyciel – uczeń.

Nieporozumienia, o których tu mowa, nie dotyczą tylko poziomu merytorycznej zawartości omawianych dokumentów. Sięgają one sfery pozamatematycznej, sfery przekonań i odczuć pojawiających się na styku potocznego i naukowego pojmowania prawdy i sposobów jej uzasadniania. Do tego tematu nawiążemy jeszcze podczas opisywania wyników badań własnych w podrozdziale 6.2.4.

6.2.2. Badania szczegółowe tematyczne 2: Rozpoznanie kompetencji uczących się matematyki w zakresie rozumowań typu dowodowego na różnych poziomach edukacyjnych (badanie R)

Badania własne omówione w tym miejscu stanowią częściową diagnozę kompetencji osób uczących się matematyki (na różnych etapach kształcenia) w zakresie rozumowań uzasadniających ogólne stwierdzenia matematyczne. Rozpoznanie dotyczy czterech etapów szkolnego kształcenia matematycznego w szkole. Głównym celem tego badania diagnostycznego było udzielenie (choćby częściowej) odpowiedzi na następujące pytania:

1. Jakie kryteria zdaniem uczniów i studentów decydują o tym, że dane stwierdzenie matematyczne można uznać za prawdziwe?[10]

2. Jaka jest rola przykładu w rozumowaniu uzasadniającym?

W badaniu użyto metody analizy wytworów pisemnych (Łobocki 2000) respondentów rozwiązujących odpowiednio dobrane zadania matematyczne. Analiza uzupełniona została danymi pochodzącymi z nieustrukturyzowanych wywiadów (Łobocki 2000) przeprowadzonych z niektórymi badanymi.

Wyróżniono cztery grupy badanych reprezentujących różne poziomy edukacji matematycznej. I tak byli to:

1. Uczniowie IV klasy szkoły podstawowej (SPIV),
2. Uczniowie VI klasy szkoły podstawowej (SPVI),
3. Uczniowie III klasy gimnazjum (G),
4. Uczniowie II klasy liceum ogólnokształcącego (L).

Liczby osób uczestniczących w badaniach przedstawia tabela 6.2.2.1.

Tabela 6.2.2.1

Nazwa grupy	Liczba osób w grupie	Łączna liczba badanych osób w badaniu R	Łączna liczba analizowanych rozwiązań zadań
SPIV	71	241	1012
SPVI	51		
G	69		
L	50		

[10] Celem badania była diagnoza umiejętności pozytywnego weryfikowania hipotez. Nie chodziło o badanie umiejętności pokazywania fałszywości stwierdzeń matematycznych. Umiejętność tworzenia kontrprzykładów i zaprzeczania tezom matematycznym wymaga badań specjalnie w tym celu skonstruowanych.

Każdej grupie respondentów dano zestaw zadań matematycznych, na rozwiązanie których mieli nielimitowany czas. Proszeni byli o pisanie jak najszerszych objaśnień, komentarzy i odpowiedzi do swoich rozwiązań. Następnie zebrane dokumenty zostały poddane kilkuaspektowej analizie. Istotne w konstrukcji zestawów zadań badawczych było utrzymanie podobnego charakteru tematów niektórych z nich dla wszystkich grup badawczych, aby możliwe było potem porównywanie wyników jakościowych otrzymanych po analizie rozwiązań kolejnych grup wiekowych (dla celów opisu wyników badania R i D). Narzędziem badawczym użytym w badaniu R (oraz badaniu D, które będzie opisywane w następnym podrozdziale) był następujący zestaw zadań Z.

Zestaw Z

Zad. 1 (grupa SP IV)

Jak Franek może przekonać Alę, że: 25 · 3 = 3 · 25?

Zad. 2 (grupy SPVI i G)

Jak można się przekonać, że dla liczb naturalnych a i b:

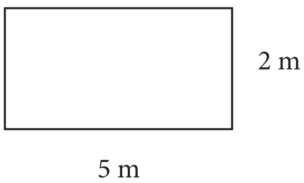
$a \cdot b = b \cdot a$?

Zad. 3 (grupy SPIV i SPVI)

Czy to prawda, że każdy ułamek można rozszerzyć, ale nie każdy można skrócić?

Zad. 4 (grupy SPIV i SPVI)

Janek stwierdził, że jeśli wymiary następującej działki powiększymy 2 razy, to jej obwód i powierzchnia wzrosną również dwa razy:



Czy Janek miał rację?

Zad. 5 (grupa SPVI)

Uzasadnij, że iloczyn nieparzystej liczby liczb ujemnych jest liczbą ujemną.

Zad. 6 (grupa G)

Uzasadnij, że przekątne prostokąta mają jednakową długość i przecinają się w połowie.

Zad. 7 (grupy G i L)

Uzasadnij, że jeżeli pomnożymy licznik i mianownik ułamka przez tę samą liczbę różną od zera, to nie zmieni się wartość tego ułamka.

Zad. 8 (grupy G i L)

Jak można się przekonać, że jeśli cenę zwiększymy o p%, a następnie o q%, to otrzymamy taki sam wynik, jak gdybyśmy najpierw zwiększyli cenę o q% a następnie o p% ?

Zad. 9 (grupy G i L)

Wyznacz wymiary prostokąta o obwodzie 36 cm, którego pole jest największe. Uzasadnij swój wynik.

Zad. 10 (grupa L)

Narysuj dowolny czworokąt i połącz środki jego boków. Czy nowo powstały czworokąt jest równoległobokiem?

Zad. 11 (grupa L)

Czy podane zdanie jest prawdziwe? Uzasadnij swoją odpowiedź.

Funkcja $f(x) = ax^2 + c$, *gdzie* $a>0$ *i* $c>0$ *nie ma miejsc zerowych.*

W wyniku analizy prac uczniów i studentów postawiłam kilka hipotez szczegółowych. W trakcie badań zostały one częściowo potwierdzone.

Bazą teoretyczną, na której zasadzała się analiza rozwiązań uczniowskich, była typologia rodzajów rozumowań dowodowych podana przez N. Balacheffa (1987, 1990) i jej kompatybilność z antropomatematycznym kierunkiem, zakładającym zasadniczy wpływ naturalnych czynności umysłowych uczących się (powszechnych w codziennym życiu człowieka) na czynności uzasadniania zdań ogólnych w matematyce. N. Balacheff podaje następującą, hierarchicznie ustrukturyzowaną typologię dowodów uczniowskich:

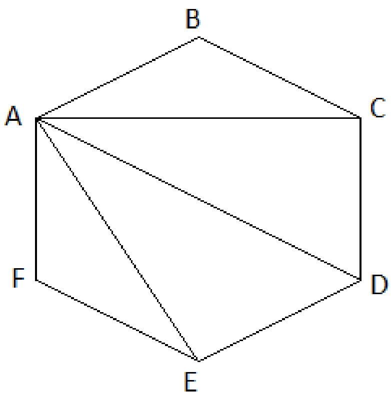
- *Naiwny empiryzm (l'empirisme naïf)* – dowód pozostaje w tym przypadku na poziomie uznawania konkretnej obserwacji za wystarczającą. Własność konkretnego, szczególnego przykładu uczeń uznaje za własność ogólną. Balacheff podkreśla występowanie w zakresie naiwnego empiryzmu czasem trochę „wyższej" formy takiego rozumowania, polegającej na domniemanym przekonaniu rozwiązującego o prawdziwości wynikającym również ze struktury rozważanej sytuacji, nie tylko z empirycznego doświadczenia. Zilustrujmy „naiwny empiryzm" przykładem zapożyczonym z pracy M. Ciosek (1992, s. 105–106). Przykład dotyczy *zadania „przekątne wielokąta" – wersja B* (patrz Aneks).

Tabelkę daną w tym zadaniu jedna z uczennic uzupełniła w następujący sposób:

x	*3*	*4*	*5*	*28*
liczba przekątnych	*0*	*2*	*0*	*14*

Uczennica zapytana przez nauczycielkę (bezpośrednio po uzupełnieniu tabelki) o powody, dla których tak rozwiązała zadanie, odpowiedziała: *zauważyłam, że jeśli* x *było nieparzyste, to liczba przekątnych wynosiła 0, a jeśli x było parzyste, to przekątnych było o połowę mniej* (s. 106). Uczennica obserwowała dane w tabelce z nastawieniem na odkrycie ogólnej zależności i na podstawie zilustrowanego tabelką przykładu sformułowała pewne spostrzeżenie, którego nie potraktowała jako hipotezy wymagającej weryfikacji. Żadnego sprawdzenia (nawet na innych konkretnych przykładach) rozwiązująca zadanie nie podjęła, a własność przykładu uznała za własność ogólną. Właśnie takie uznawanie konkretnej obserwacji za wystarczające uzasadnienie zdania ogólnego nazywa się *naiwnym empiryzmem*.

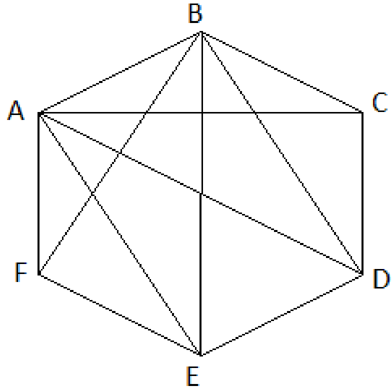
- *Próba rozstrzygająca (l'expérience cruciale)* – rozwiązujący, co prawda również rozumuje na konkretnym przykładzie (lub kilku przykładach), ale uświadamia sobie istotność matematycznego kontekstu tego przykładu w kierunku jego generalizacji. Ta generalizacja jest w pewnym sensie uświadomiona, ale ograniczenia poznawcze i językowe nie pozwalają uczniowi wyjść poza przykłady konkretne[11]. Balacheff ilustruje taki sposób rozumowania przykładem zaczerpniętym z pracy dwojga uczniów podczas rozwiązywania *zadania „przekątne wielokąta" – wersja A* (patrz Aneks). Rozwiązujący uczniowie (Martine i Laura) stawiają swoją hipotezę co do sposobu obliczania liczby przekątnych wielokąta analizując przypadek sześciokąta; biorą pod uwagę kolejne wierzchołki sześciokąta i zliczają wychodzące z nich przekątne (Balacheff, 1990, s. 290). Uczniowie rozumują w następujący sposób (w odniesieniu kolejno do rys. 26, rys. 27 i rys. 28):



Rys. 26

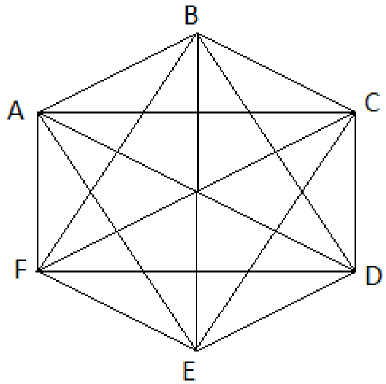
[11] Balacheff zwraca uwagę na kluczową rolę takiego sposobu myślenia w przejściu od empirycznego pragmatyzmu do racjonalizmu logicznego (1990, s. 289).

Z pierwszego wierzchołka (A) wychodzą 3 przekątne, a to jest to samo, co liczba wierzchołków tego wielokąta pomniejszona o 3. Z drugiego wierzchołka (B) też wychodzi tyle samo przekątnych:



Rys. 27

Z kolejnego wierzchołka (C) wychodzi już mniej o 1 nowych przekątnych, z wierzchołka D – o 2 mniej itd.



Rys. 28

Wystarczy teraz (mówią uczniowie) *pododawać wszystkie liczby nowych przekątnych wychodzących z kolejnych wierzchołków i w ten sposób zawsze otrzymamy wynik*. Następnie stwierdzają: *trzeba to jeszcze sprawdzić na jakiejś bardzo dużej liczbie wierzchołków*. Takie sprawdzenie (dla dziesięciokąta) uczniowie traktują jako wystarczające kryterium dla uzasadnienia poprawności sformułowanej przez siebie hipotezy. Jest to wciąż rozumowanie opierające się na empiryzmie, ale już z próbą dostrzeżenia ogólności sformułowanej własności obiektu matematycznego.

- *Przykład generujący (l'exemple générique)* – rozwiązujący dokonuje w tym przypadku ogólnych spostrzeżeń, analizując przykład konkretny. Chodzi o specyficzny sposób rozumowania osoby, która zna jakiś przykład obiektu spełniającego weryfikowaną hipotezę i w sposób świadomy zadaje sobie pytanie, jaką szczególną własność ma ten rozważany przykład. Osoba pyta o charakterystyczne cechy tego przykładu mające związek z badaną hipotezą.

- *Próba myślowa (l'expérience mentale)* – mowa tu jest o sytuacji, w której rozwiązujący odwołuje się co prawda do szczególnego obiektu matematycznego (znajduje się zatem na poziomie działania na konkrecie), ale przebieg rozumowania w żadnym momencie nie odwołuje się do tej szczególności. Takie rozumowanie wymaga od rozumującej osoby całkowitej dekontekstualizacji i eliminacji konkretności tego rozważanego przykładu (dla wygenerowania rozwiązania ogólnego). Rezultat tego procesu myślowego nie jest jeszcze poprawnym wnioskowaniem o charakterze dedukcyjnym, choć jego prowadzenie wymaga posiadania przez rozwiązującego zaawansowanych konstrukcji poznawczych i występuje tylko na poziomie języka. Eksperyment myślowy opiera się na etapach pośrednich dowodzenia i jest jego niższym szczeblem i stosunkowo łatwo może się przeobrazić w dowód. Balacheff stwierdza, że taki sposób rozumowania można rzadko zaobserwować (1990, s. 291), wymaga od rozwiązującego posiadania dużych umiejętności językowych oraz wiedzy zorganizowanej na dosyć wysokim poziomie.

Listę możliwych uzasadnień poprawności rozumowań uzupełnijmy o:

- *Rozumowanie ukierunkowane dedukcyjnie* – omówione już w poprzednich rozdziałach wnioskowanie w oparciu o reguły logiki z poprzednio zaakceptowanego zasobu wiedzy. Jest to sposób rozumowania najbardziej pożądany i najbliższy poprawnemu dowodowi matematycznemu lub sam będący już takim dowodem. Wymaga posiadania stosunkowo wysokiego poziomu wiedzy matematycznej i logicznej oraz dużej swobody w posługiwaniu się matematycznym językiem. Prowadzenie tego typu rozumowań (o nawet niedużym stopniu formalizacji) jest czynnością skomplikowaną i często wymagającą uzupełnień w wiedzy bezpośrednio z tematem niezwiązanej, a jednak dla prowadzenia rozumowania niezbędnej.

  Zobaczmy to na przykładzie dowodu twierdzenia Picka[12].

Twierdzenie Picka

Pole dowolnego (niekoniecznie wypukłego) wielokąta $Q \subset \mathbb{R}^2$, który ma wszystkie wierzchołki w punktach kratowych sieci kwadratowej, dane jest wzorem $P(Q) = n_{wew} + n_b - 1$, gdzie n_{wew} i n_b oznaczają odpowiednio liczbę punktów kratowych we wnętrzu i na brzegu wielokąta Q.

Dla przeprowadzenia dowodu tego twierdzenia potrzebna jest znajomość pewnych definicji, lematów i innych uzupełnień teorii. Przypomnijmy je więc:

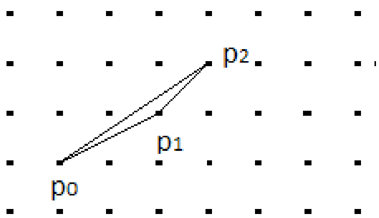
[12] Przykład jest uzupełnioną wersją dowodu przedstawionego w książce *Dowody z Księgi* (Aigner, Ziegler 2002, s. 82–84).

Definicja

Każdy wielokąt nazywamy elementarnym, jeżeli jego wszystkie wierzchołki leżą w punktach kratowych i nie zawiera on żadnych innych punktów kratowych.

Lemat

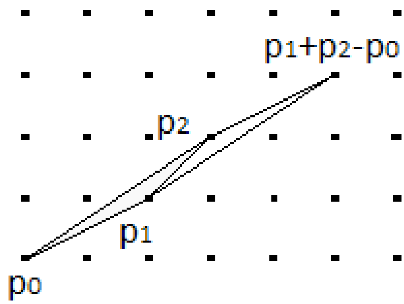
Każdy trójkąt elementarny $= conv\ \{p_0, p_1, p_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ *ma pole* $P\ (\Delta) = \frac{1}{2}$.



Rys. 29

Dowód lematu

Zarówno równoległobok R o wierzchołkach $p_0, p_1, p_2, p_1 + p_2 - p_0$, jak i krata $\mathbb{Z}^2$ są zachowywane przez przekształcenie: $\delta : x \mapsto p_1 + p_2 - x$, tzn. przez symetrię środkową względem środka odcinka łączącego punkty p_1, p_2.

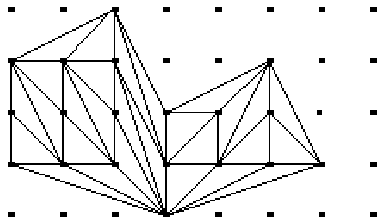


Rys. 30

Zatem równoległobok $R = \Delta \cup \delta\ (\Delta)$ również jest elementarny (rys. 30), a jego po- przesuwanymi kopiami można wypełnić całą płaszczyznę. Wynika stąd, że wektory $p_1 - p_0$, $p_2 - p_0$ stanowią bazę kraty $\mathbb{Z}^2$, utworzona z nich macierz ma wyznacznik 1, R ma pole równe 1, Δ zaś ma pole równe $\frac{1}{2}$ (wyjaśnienia terminów użytych w ostatnim zdaniu podaję w części: Dodatek 1).

Dowód twierdzenia Picka

Każdy taki wielokąt Q można podzielić na trójkąty elementarne, wykorzystując jako wierzchołki n_{wew} punktów kratowych w jego wnętrzu i n_b punktów kratowych na jego brzegu (to nie jest całkowicie oczywiste, w szczególności jeśli nie wymagamy wypukłości Q; uzasadnienie będzie później).



Rys. 31

Otrzymaną triangulację zinterpretujemy jako graf płaski[13].
Oznaczmy:
n – liczba wierzchołków grafu;
f – liczba ścian;
e – liczba krawędzi.
Graf ten dzieli płaszczyznę na $f - 1$ trójkątów o polu $\frac{1}{2}$ i jedną dodatkową ścianę zewnętrzną.
Zatem

$$P(Q) = (f - 1).$$

Każdy trójkąt ma trzy boki; każda z e_{wew} krawędzi wewnętrznych należy do dwóch trójkątów, natomiast każda z e_b krawędzi zawartych w brzegu wielokąta pojawia się tylko w jednym trójkącie. Zatem $3\,(f - 1) = 2\,e_{wew} + e_b$, a stąd $f = 2\,(e - f) - e_b + 3$.
Ponadto na brzegu wielokąta Q leży tyle samo krawędzi co wierzchołków $e_b = n_b$.
Łącząc obie te informacje ze wzorem Eulera[14], otrzymujemy

$$f = 2\,(e - f) - e_b + 3 = 2\,(n - 2) - n_b + 3 = 2n_{wew} + n_b - 1,$$

więc $P(Q) = (f - 1) = n_{wew} + \frac{1}{2}\, n_b - 1.$

Dodatek 1

Bazą kraty $\mathbb{Z}^2$ nazywamy parę liniowo niezależnych wektorów e_1 i e_2 taką, że:

$$\mathbb{Z}^2 = \{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2\colon \lambda_1, \lambda_2\ \mathbb{Z}\}.$$

[13] Grafem płaskim nazywamy ustalony rysunek grafu planarnego (czyli dającego się narysować na płaszczyźnie (lub na dwuwymiarowej sferze) tak, aby żadne dwie krawędzie nie miały na rysunku punktów wspólnych różnych od wierzchołka, z którym obie są incydentne (Aigner, Ziegler 2002, s. 77).

[14] Wzór Eulera: jeśli spójny graf płaski G ma n wierzchołków, e krawędzi i f ścian, to $n - e + f = 2$ (Aigner, Ziegler 2002, s. 77).

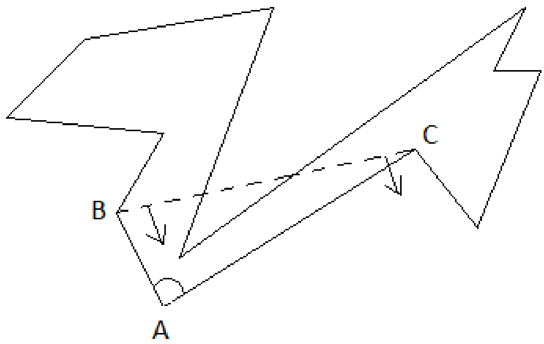
Niech $e_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ i $e_2 = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$. Wtedy równoległobok rozpięty na wektorach e_1 i e_2 ma pole: $P(e_1, e_2) = |det\ (e_1, e_2)| = \left| det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \right|$.

Jeśli $f_1 = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$ i $f_2 = \begin{bmatrix} t \\ u \end{bmatrix}$ stanowią inna bazę, to istnieje odwracalna całkowitoliczbowa macierz Q, która spełnia równość: $\begin{bmatrix} r & t \\ s & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot Q$. Ponieważ $Q \cdot Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, a wyznaczniki rozważanych macierzy są liczbami całkowitymi, więc $|det\ Q| = 1$, a stąd $|det\ (f_1, f_2)| = |det\ (e_1, e_2)|$.

Zatem wszystkie równoległoboki bazowe mają pole równe 1, gdyż $P\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 1$.

Dodatek 2

Wykażemy, że triangulacja zawsze istnieje dla wszystkich wielokątów niewypukłych. Skorzystajmy z Zasady Indukcji Zupełnej.
Dla $n=3$ mamy do czynienia z trójkątem, więc nie ma czego dowodzić. Niech $n \geqslant 4$. Zakładamy, że dla n-kąta triangulacja istnieje, zatem aby skorzystać z założenia, musimy umieć wskazać jedną przekątną, która podzieli figurę utworzoną przez dodanie $n+1$ wierzchołka (wielokąt P) na mniejsze części. Znajdziemy w wielokącie wierzchołek A (rys. 32), który jest wypukły[15]. Spójrzmy teraz na dwa wierzchołki B i C sąsiadujące z A.



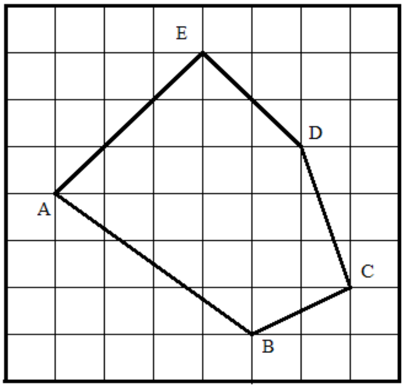
Rys. 32

Jeśli cały odcinek BC leży we wnętrzu P, to sam jest poszukiwaną przekątną. Jeśli tak nie jest, to w trójkącie ABC są inne wierzchołki P. Przesuwajmy odcinek BC równolegle w stronę A, dopóki nie natrafimy na ostatni wierzchołek Z we wnętrzu ABC. Odcinek AZ leży wewnątrz P i jest szukaną przekątną.

[15] Wierzchołek wielokąta nazywamy wypukłym, gdy kąt wewnętrzny wielokąta przy tym wierzchołku jest mniejszy od 180°. Ponieważ suma kątów wewnętrznych n-kąta jest równa $(n-2) \cdot 180°$, zatem taki wierzchołek musi istnieć.

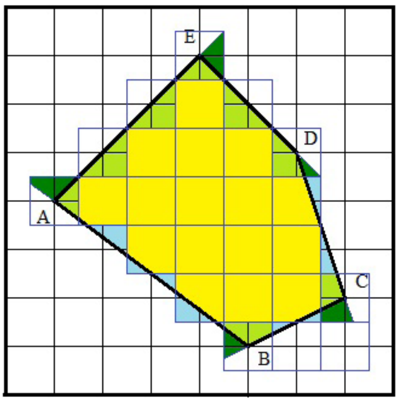
Nie trzeba nikogo przekonywać, że proces prześledzenia i zrozumienia takiego typu *rozumowania ukierunkowanego dedukcyjnie* wymaga znacznego wysiłku. Tym bardziej trudne, a czasem wręcz nieosiągalne jest samodzielne tworzenie takich rozumowań formalno-dedukcyjnych, szczególnie dla osób niebędących twórczymi matematykami. A ich żmudne studiowanie, czasem uczenie się na pamięć, mogą pozbawić niektórych uczących się entuzjazmu do matematyki.

Uzasadnienie tego samego twierdzenia można przeprowadzić, posługując się prostszym rozumowaniem – geometrycznym – przez uzmiennianie stałej. Przytoczę takie rozumowanie opisane przez S. Turnaua (2011), które autor uznaje za dostępne dla ucznia szkoły ponadgimnazjalnej o przeciętnych zdolnościach matematycznych. Rozważmy pięciokąt ABCDE o wierzchołkach w punktach kratowych.



Rys. 33

Przypiszmy każdemu punktowi kratowemu kwadrat, którego jest on środkiem. Jeśli teraz policzymy wszystkie kwadraty i ich części wypełniające wielokąt (licząc odpowiednie punkty kratowe, którym te kwadraty są przypisane) – obliczymy pole wielokąta ABCDE (przez zliczanie węzłów sieci, jak to jest we wzorze Picka).



Rys. 34

Na rys. 34 żółtym kolorem zaznaczono kwadraty przypisane wewnętrznym punktom kratowym. Niektóre z żółtych kwadratów trzeba „dopełnić" do całości (co zaznaczono na rysunku kolorem niebieskim). W obrębie pięciokąta znajdują się też części kwadratów przypisanych węzłom sieci. Jeśli przyjmiemy, że każdy taki punkt kratowy „generuje" połowę kwadratu wchodzącego w skład kwadratów wypełniających pięciokąt, to zauważymy, że dostaniemy szukane pole pięciokąta z „naddatkami" (zaznaczonymi kolorem ciemnozielonym). Pozostaje zauważyć, że te „naddatki" w sumie tworzą jeden cały kwadrat (co wynika z konieczności sumowania się odpowiednich kątów przy wierzchołkach pięciokąta do 360^o), zatem od liczby wszystkich kwadratów i ich części trzeba odjąć 1. Uogólniając powyższe rozumowanie otrzymujemy wzór:

$P = W + \frac{1}{2} B - 1$, gdzie W oznacza liczbę węzłów sieci wewnątrz wielokąta, a B liczbę takich węzłów na jego brzegu.

Oczywiście powyższe rozumowanie nie jest ścisłym dowodem matematycznym, jest rodzajem geometrycznego uzasadnienia i wymaga jeszcze uzupełnienia (choćby poprzez zbadanie wzoru Picka dla trójkąta, wykazanie addytywności wzoru oraz powołanie się na możliwość triangulacji każdego wielokąta). Mimo poglądowości zarysowanego rozumowania opierającego się na konkretnym przykładzie wielokąta, moc przekonująca takiego sposobu myślenia dla przeciętnego człowieka jest większa niż wcześniej przeprowadzonego dowodu formalnego.

Pozostało jeszcze wyróżnić sposoby wykazywania fałszywości stwierdzeń matematycznych stosowane przez uczniów, jako że są to również rozumowania uzasadniające (Balacheff 1987, 1990). W odniesieniu do wykazywania fałszywości hipotez matematycznych[16] Balacheff wymienia:

Obalanie hipotez matematycznych (statut et conséquences des réfutations) – budowanie kontrprzykładów, poprzez:

- *analizę w odniesieniu do samego problemu* – centralną rolę odgrywa tu natura lub właściwości danego obiektu matematycznego;
- *analizę w odniesieniu do globalnej koncepcji natury matematyki* – kryterium rozstrzygnięcia jest osadzone głęboko w teorii matematycznej;
- *analizę w odniesieniu do konkretnej sytuacji* – zasadniczą kwestią jest respektowanie zasad kontraktu dydaktycznego w danej sytuacji dydaktycznej.

Te sposoby rozumowania są bardzo interesujące z teoretycznego punktu widzenia; tematy związane z nimi wymagają jednak przeprowadzenia głębszych i odrębnych badań.

Zarysowana powyżej typologia rozumowań N. Balacheffa posłużyła w mojej analizie badawczej (odnoszącej się do opisywanego badania R) jako podstawa kla-

[16] W tej pracy nie odnoszę się do aktywności polegającej na obalaniu stwierdzeń matematycznych, wymaga to odrębnie ukierunkowanych badań, które planuję podjąć w przyszłości (patrz „Kierunki dalszych badań").

syfikowania zapisanych rozwiązań uczniów do poszczególnych typów rozumowań. W wyniku analizy badawczej można postawić i częściowo potwierdzić wynikami liczbowymi następującą hipotezę.

HIPOTEZA R1

> Uczący się matematyki na szkolnych poziomach tego nauczania najczęściej w rozumowaniu reprezentują *naiwny empiryzm* oraz stosują *próbę rozstrzygającą*.

Oba te rodzaje rozumowania na potrzeby opisywanej analizy badawczej nazwałam *prostym posługiwaniem się konkretem.* Myślę tu zatem o takiej sytuacji, w której podstawą formułowania wniosku o poprawności badanej hipotezy jest dla ucznia konkretny przykład (lub kilka przykładów). Pamiętajmy, że nawet jeśli nie jest to tylko i wyłącznie naiwny empiryzm, a weryfikowany przykład jest zdaniem ucznia „dowolny”[17], tzn. przypadkowy lub np. dotyczący obiektów charakteryzowanych przez duże liczby, to podstawą wnioskowania jest przekonanie, że zachodzenie własności ogólnej w konkretnym przypadku jest wystarczającym powodem uznania jej prawdziwości[18]. Tak rozumiem *proste posługiwanie się konkretem.*

Hipotezę R1 potwierdzają wyniki badań R i D, związanych z zadaniami z zestawu Z. Dane liczbowe uzyskane w wyniku analizy rozwiązań wspomnianych zadań przedstawiam w tabelach 6.2.2.2 i 6.2.2.3.

Tabela 6.2.2.2

Liczebność grupy badawczej – w odniesieniu do poszczególnych zadań	Numer zadania matematycznego	Liczba analizowanych rozwiązań uczniowskich	
		zawierających próby rozwiązania	z brakiem prób rozwiązania
SPIV (71 osób)	Zad. 1	68	3
	Zad. 3	58	13
	Zad. 4	68	3

[17] Uczniowie w różnych sytuacjach wymagających zastosowania niejawnego kwantyfikatora ogólnego często rozumują tak: własność ma zachodzić „dla wszystkich” elementów danego zbioru, biorę więc jakiś element „dowolny” i sprawdzam. Wobec dowolności wyboru stwierdzam, że faktycznie własność zachodzi dla wszystkich elementów z tego zbioru (Klakla, Klakla, Nawrocki, Nowecki 1992; Ciosek 2005).

[18] Przypomnijmy, że Balacheff wyróżnia jeszcze dwie inne sytuacje, w których podstawą wnioskowania jest konkretny przykład, nazywając je *przykładem generującym* oraz *próbą myślową*. Jednak oba te rodzaje rozumowania traktuję jako wymagające posiadania przez rozwiązującego pewnej świadomości tego, że rozumowanie na konkrecie jest niewystarczającym środkiem dla pokazania ogólności. Oba te rodzaje charakteryzuje dążenie do tej ogólności, co jest przejawem swoistego odejścia od konkretu.

SPVI (51 osób)	Zad. 2	43	8
	Zad. 3	47	4
	Zad. 4	47	4
	Zad. 5	42	9
G (69 osób)	Zad. 2	65	4
	Zad. 6	56	13
	Zad. 7	55	14
	Zad. 8	48	21
	Zad. 9	56	13
L (50 osób)	Zad. 7	48	2
	Zad. 8	45	5
	Zad. 9	48	2
	Zad. 10	49	1
	Zad. 11	41	9

Z tabeli 6.2.2.2 można odczytać, że analizie pod kątem identyfikowania rozumowań polegających na rozważaniu konkretnych przykładów poddano 884 rozwiązania uczniowskie. Każde z tych rozwiązań było badane ze szczególnym zwróceniem uwagi na rolę przykładu konkretnego w tym rozumowaniu[19]. Ilościowe wyniki tej analizy przedstawia tabela 6.2.2.3.

Tabela 6.2.2.3

Grupa badawcza	Numer zadania matematycznego	Liczba wszystkich zapisanych rozwiązań uczniowskich	Liczba rozwiązań zakwalifikowanych jako „proste posługiwanie się konkretem”
SPIV (71 osób)	Zad. 1	68	61
	Zad. 3	58	55
	Zad. 4	68	60
SPVI (51 osób)	Zad. 2	43	41
	Zad. 3	47	42
	Zad. 4	47	42
	Zad. 5	42	34
G (69 osób)	Zad. 2	65	62
	Zad. 6	56	45
	Zad. 7	55	52
	Zad. 8	48	43
	Zad. 9	56	50

[19] Oczywiście mam świadomość, że zadania użyte do badania R dają zapewne tylko częściowy obraz całego spektrum strategii stosowanych przez uczniów dla uzasadniania stwierdzeń matematycznych.

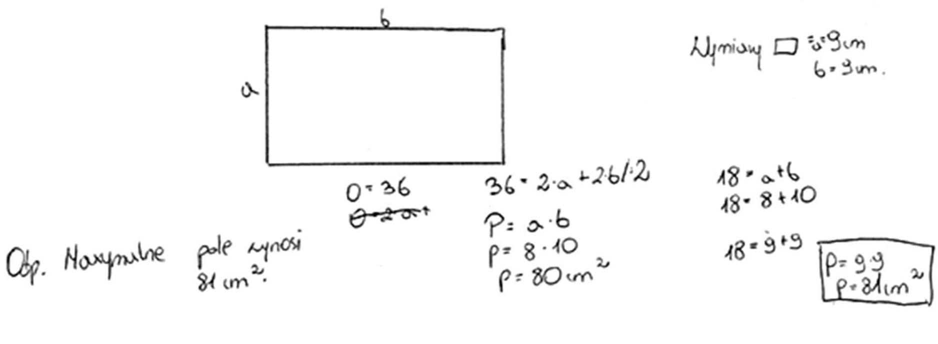
L (50 osób)	Zad. 7	48	40
	Zad. 8	45	43
	Zad. 9	48	38
	Zad. 10	49	33
	Zad. 11	41	35

Dane liczbowe przedstawione w tabeli jednoznacznie wskazują, że na rozważanych etapach nauczania matematyki uczniowie uzasadniają stwierdzenia ogólne najczęściej przez zbadanie ich na konkretnym przykładzie. Dopiero na wyższych etapach edukacji, i to tylko niektórzy uczniowie, wiążą badanie przykładu z postawieniem sobie pytania, w jaki sposób należy wyznaczać poszukiwaną wielkość, niezależnie od tego, o jakim konkretnym przykładzie mówimy.

Zobaczmy kilka przykładów rozwiązań uczniów z grup G i L zadania 9 i 11. Będą to przykłady ilustrujące proste posługiwanie się konkretem.

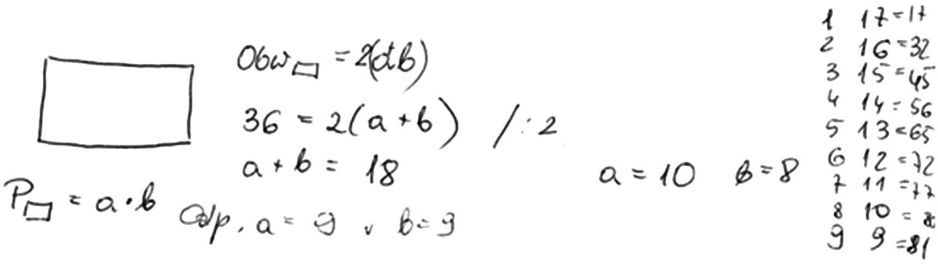
Zad. 9

Uczennica rozwiązująca to zadanie mówi: *czyli mam takie równanie 2a + 2b = 36. Pole ma być największe, a pole liczymy mnożąc a razy b. Gdy wezmę a=7 i b=11, razem dają 18, ale pole wtedy wynosi 77 cm² i jest mniejsze niż jak a=9, b=9, pole będzie wynosić 81 cm². Czyli jest maksymalne, gdy te wymiary wynoszą 9 cm i 9 cm. To jest moja odpowiedź.*
Zapisane przez uczennicę rozwiązanie wygląda następująco.



Rys. 35

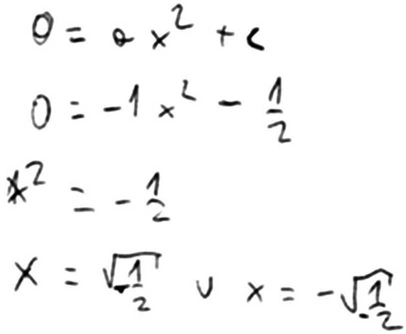
W pracach innych uczniów można dostrzec bardziej zaawansowane postępowanie, ale wciąż jednak zasadzające się na badaniu konkretnych przypadków i wyciąganiu na tej podstawie wniosków ogólnych. Następna uczennica rozważa wszystkie możliwe pary liczb całkowitych, które mogą być długościami boków prostokąta o obwodzie 36 cm. Obserwując powiększanie się pola, uczennica formułuje odpowiedź, nie weryfikując jej już dodatkowo.



Rys. 36

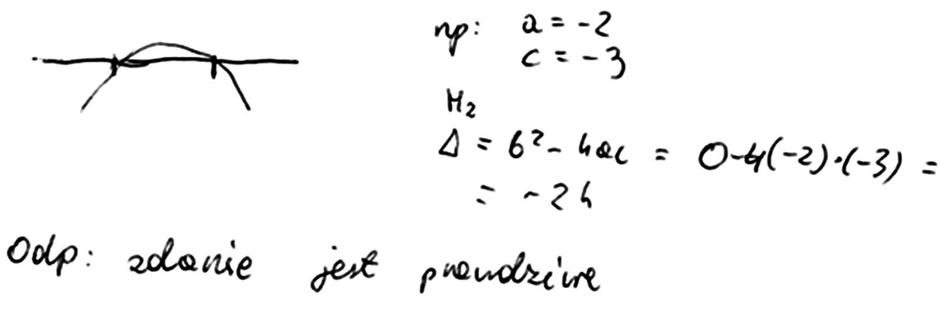
Zad. 11

Uczeń rozwiązuje zadanie dobierając od razu konkretne wielkości współczynników a i c. Poszukując miejsc zerowych stwierdza: *nie będzie takich x, bo nie ma pierwiastka z liczby ujemnej*. Na tym uczeń kończy pracę, nie zastanawiając się nad brakiem ogólności takiego rozumowania.



Rys. 37

Przykładów tego typu było bardzo wiele. Np.



Rys. 38

Uczeń ten również rozumował dla przykładu konkretnego, choć udzielił odpowiedzi na pytanie ogólne.

Nieliczne osoby rozwiązywały zadanie 11 wnioskując poprawnie:

$$0 = ax^2 + c$$
$$-c = ax^2 \quad |:a$$
$$-\frac{c}{a} = x^2$$
$$x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Rys. 39

Nie jest to w pełni uzupełniony poprawny zapis rozumowania (brak na przykład założenia, że $a \neq 0$), ale został dobrze skomentowany przez jego autorkę: *przypuszczenie, że funkcja ma miejsce zerowe, okazało się niemożliwe (nie ma pierwiastka z liczb ujemnych), więc zdanie jest prawdziwe.*

Powróćmy do hipotezy R1. Zastanówmy się, co mogłoby leżeć u podstaw uczniowskiego przekonania, że dla uznawania prawdziwości stwierdzenia ogólnego – odnoszącego się do pewnej klasy obiektów matematycznych – wystarczy sprawdzić, czy to stwierdzenie spełnia jeden lub kilka konkretnych obiektów tej klasy. Przyczyny tego stanu rzeczy są złożone. Po pierwsze – mogą mieć genezę w epistemologii poznania matematycznego. Na to zagadnienie, a w szczególności na kwestię konkretu jako przeszkody epistemologicznej, zwraca uwagę R. Duda:

> *Przejście od tego stadium [rozumowania na konkrecie] do takiego, w którym pojawiają się już […] „uzupełnienia" w postaci ogólnych objaśnień i wskazówek postępowania […], wymagało [w historii rozwoju matematyki] przełamania bardzo trudnej przeszkody epistemologicznej, którą najsłuszniej będzie nazwać przeszkodą „konkretu"* (Duda 1995, s. 5).

R. Duda pisze dalej:

> *Jak kucharzowi nie są potrzebne ścisłe określenia używanych przezeń surowców, ich stanu i czynności, jakie należy na nich wykonać (por. polecenia „weź szczyptę soli", „smaż do zarumienienia" itp.), a próbę taką poczytywałby zapewne za śmieszną i niepotrzebną, tak i starożytnemu matematykowi wystarczało intuicyjne, nabyte od swego mistrza rozumienie pojęć takich, jak trójkąt, koło, pole,*

walec, stożek, objętość itp. On „wiedział", co to jest trójkąt czy walec, tak, jak kucharz wie, co to jest udziec czy mąka (tamże).

Odnosząc swoje spostrzeżenia do nauczania matematyki, R. Duda stwierdza:

> *Doświadczenie pedagogiczne uczy, że do umysłów wielu ludzi, zwłaszcza młodzieży, łatwiej trafiają reguły wyłuszczone na konkretnych przykładach, wyraźnie wskazujące czynności, jakie należy wykonać i ich porządek. I co więcej, przysłuchując się, jak kilkunastoletni chłopiec przedstawia koledze pewną teorię, przekonujemy się, że idzie w ślady swych starożytnych nauczycieli i komenderuje: dodaj, pomnóż itd. Opis czynności toruje sobie drogę do głów, a objaśnienia ujęte naukowym językiem odczuwane są jako zawada, a nie jako pomoc* (tamże, s. 6).

Przyjmując taki punkt widzenia, należy zrozumieć, że weryfikacja na przykładzie stanowi dla uczniów najbardziej naturalną formę sprawdzania ogólnych własności obiektów w matematyce. Taki sposób weryfikacji tkwi w korzeniach rozwoju matematycznego człowieka. Uznanie naturalności takiego sposobu rozumowania ucznia powinno stanowić podstawę oceny tego rozumowania i zarazem bazę wyjściową dla działań dydaktycznych, których celem będzie pokazanie stosunkowo częstej zawodności myślenia opartego na indukcji.

Oprócz epistemologicznie uwarunkowanej naturalności rozumowania opartego na analizie obiektów konkretnych powinniśmy również mieć na względzie bardzo skomplikowaną relację pomiędzy sposobami wyciągania wniosków przez człowieka w jego życiu codziennym a wnioskowaniem w obrębie matematyki, czyli relację pomiędzy wiedzą potoczną a wiedzą naukową człowieka. Taki ogląd sytuacji jest szczególnie istotny z punktu widzenia antropomatematyki. Oczywiście założenie o wzajemnym wpływie na siebie obu rodzajów wiedzy człowieka jest naturalne i konieczne. Pamiętać jednak należy, iż sposoby myślenia, mające genezę w codziennym życiu człowieka, przenoszone (najczęściej nieświadomie) na grunt matematyki mogą powodować wytwarzanie się schematów nie zawsze zgodnych z poprawnym myśleniem matematycznym.

Analiza materiału badawczego zgromadzonego dla celów badania R (oraz wieloletnia praktyka badawcza) pozwalają na postawienie kolejnej hipotezy związanej z poruszoną kwestią.

HIPOTEZA R2

Sposoby wnioskowania, które uczniowie stosują w celu uzasadniania stwierdzeń matematycznych, często mają genezę w schematach myślenia stosowanych przez człowieka w jego życiu codziennym, w sytuacjach ukierunkowanych na argumentowanie w okolicznościach życiowych, pozamatematycznych.

Uzasadnieniem tej hipotezy jest wyróżnienie i opisanie kilku wspomnianych sposobów wnioskowania.

Uczniowie w celu uzasadniania ogólnych stwierdzeń matematycznych stosują (m.in.) dwa rodzaje schematów argumentowania, które nazwałam odpowiednio:

- *schematem argumentowania wykorzystywanym w procesach myślowych odnoszących się do kontekstów z życia codziennego* (przenoszonymi przez uczących się na grunt matematyki) (ozn. SC)

oraz

- *schematem argumentowania opartym na konwencji* (ozn. SK).

Te dwa rodzaje schematów wnioskowania spełniają inne funkcje, mają inny przebieg, a co ważne, charakteryzują się innym uprawomocnieniem w teorii matematycznej. Opiszę je ilustrując przykładami pochodzącymi z rozwiązań zadań badanych uczniów i ich wypowiedzi.

Schematy argumentowania wykorzystywane w procesach myślowych odnoszących się do kontekstów z życia codziennego (SC)

Dokonam uszczegółowienia tak nazwanej kategorii rozumowań. Przyjmijmy, że niektóre rodzaje hipotetycznych schematów myślenia człowieka, realizowanych przez niego w sytuacjach, w których jest proszony o uzasadnienie jakiegoś matematycznego faktu lub prawidłowości, mają podobne przyczyny i przebieg. Nazwijmy je schematami:

- opartymi na przyczynowości,
- opartymi na pewnym porządku:
  - na porównaniu (analogii),
  - na kontraście (przeciwstawieniu),
  - na klasyfikacji (bądź typologii),
- opartymi na analizie konkretnego przykładu (lub rysunku),
- opartymi na braku kontrprzykładów,
- opartymi na bliżej niedającym się wyjaśnić przekonaniu o prawdziwości hipotezy.

Opiszę i zilustruję wyróżnione tu typy wnioskowania.

SC oparty na przyczynowości

Mówimy w tym miejscu o sytuacji, kiedy jako powód funkcjonowania jakiejś zasady człowiek podaje bardzo intuicyjną, znaną mu i często stosowaną zasadę myślenia, polegającą na przyjęciu naturalności następującego sposobu myślenia: „pewne przyczyny mogą się nieuchronnie kojarzyć z określonymi, konkretnymi, już wcześniej powtarzającymi się skutkami". W grę wchodzi posiadanie przez każdego z nas pewnych doświadczeń życiowych, znajomość ich przebiegu i skutków, co czasem rzutuje na sposoby stawiania hipotez na temat przyszłych wydarzeń. Zilustruję to poniższym zestawieniem, pokazującym podobieństwo pewnych sposobów myślenia człowieka w życiu codziennym i ucznia w matematyce. Omówiony schemat myślenia może czasem sprawdzać się na gruncie matematyki, ale może również prowadzić do błędnych wniosków. Zapowiedzianą analogię zobrazują sformułowania z tabeli poniżej (nie uwzględniają one oceny poprawności wyciągniętych wniosków).

<table>
<tr><th>CODZIENNOŚĆ</th><th>MATEMATYKA</th></tr>
<tr><td rowspan="2">na pewno się ubłocisz, bo pada deszcz</td><td>dwie wielkości, które są podobnej natury lub bywały od siebie uzależnione, powinny się podobnie zmieniać</td></tr>
<tr><td>jeśli zwiększa się długość boku jakiegoś wielokąta, to zwiększa się jego obwód;
jeśli zwiększa się pole figury, to zwiększa się też jej obwód</td></tr>
</table>

Taki sposób myślenia człowieka jest naturalny i często występuje. Może wystąpić również na stosunkowo wysokim poziomie doświadczenia matematycznego. Skoro wiążemy pewne przyczyny i skutki ze sobą, nieodzownie kojarzy się nam także i rodzaj relacji pomiędzy przyczyną i skutkiem. To wydaje się dosyć oczywiste, nawet na zaawansowanym matematycznie poziomie myślenia. Matematykowi, który bada skutki jakichś dowolnie postawionych założeń, do głowy przychodzą przede wszystkim wcześniej spotykane konsekwencje podobnych założeń.

SC oparty na porównaniu (analogii)

Zasada myślenia człowieka w tym przypadku polega na porównaniu nowego stwierdzenia (poprawność którego musi rozstrzygnąć), jego semantyki lub budowy syntaktycznej, do jakiegoś znanego już wcześniej przykładu, a weryfikacja hipotezy polega na wyciągnięciu wniosków z tego podobieństwa. Rozważmy przykład.

<table>
<tr><th>CODZIENNOŚĆ</th><th>MATEMATYKA</th></tr>
<tr><td rowspan="2">kiedyś już się coś takiego wydarzyło;
kiedyś tak zrobiłem i było dobrze</td><td>znajomość faktu z przeszłości i dostrzeganie jakiegoś podobieństwa w naturze nowego obiektu pozwala postulować jego podobne zachowanie się</td></tr>
<tr><td>mnożenie ułamków zachowuje się tak, jak mnożenie liczb naturalnych: ich iloczyn jest większy od każdego czynnika</td></tr>
</table>

Jest to rodzaj myślenia bazującego na analogii pomiędzy związkiem, o którym już coś wiemy, a innym związkiem, co do prawdziwości którego mamy się wypowiedzieć. Ta analogia może dotyczyć zarówno znaczenia obu badanych stwierdzeń, jak i ich budowy syntaktycznej, np. opartej na podobieństwie języka i budowie obu sformułowań. Przyczyna takiego myślenia człowieka może tkwić głęboko w sferze jego poglądów i przekonań będących sumą doświadczeń życiowych i matematycznych.

SC oparty na kontraście (przeciwstawieniu)

Niektóre zjawiska w życiu człowieka, a także niektóre własności obiektów matematycznych pozostają w opozycji, są swoimi przeciwieństwami. W matematyce wiele jest takich przykładów, choćby:

- równy – różny,
- dodatni – ujemny,
- rośnie – maleje,
- liczba parzysta – liczba nieparzysta,
- zbieżny – rozbieżny,
- przemienne – nieprzemienne.

Jako dość naturalny można uznać następujący sposób wyciągania wniosków.

CODZIENNOŚĆ	MATEMATYKA
skoro nie jest tak, musi być na odwrót	pewne relacje lub własności są sobie przeciwstawne, więc skoro nie zachodzi jedna, to zachodzi druga
	skoro to nie jest liczba pierwsza, to musi być złożona; skoro a nie jest mniejsze od b, to musi być większe od b; jeśli funkcja nie jest rosnąca, to jest malejąca

Taki sposób wyciągania wniosków w matematyce czasem daje wynik poprawny. Jeśli zbiór rozważanych obiektów da się podzielić względem pewnej cechy na dwie klasy, to oczywiście dany obiekt musi należeć do którejś z nich. Zdarza się jednak, że chociaż nazwa cechy charakteryzującej rozważane obiekty sugeruje istnienie tylko dwóch stanów przeciwstawnych, to obiektywnie istnieją także inne możliwości. Na przykład, jeśli funkcja nie jest parzysta, to nie znaczy, że jest nieparzysta, jeśli jedna liczba nie jest większa od drugiej, to nie znaczy, że jest od niej mniejsza itp.

SC oparty na klasyfikacji (bądź typologii)

Ten rodzaj wnioskowania jest uogólnieniem poprzedniej kategorii, gdzie myśl człowieka uwzględniała istnienie dwóch przeciwstawnych rodzajów zjawisk. W tym przypadku dopuszczamy istnienie kilku możliwości, które, jeśli się rozważy ich alternatywę, pokrywają całą przestrzeń zjawisk możliwych do wystąpienia. Taki podział przestrzeni możliwych zjawisk może być klasyfikacją tego zbioru lub tylko jego podziałem ze względu na nieostre kryterium, mogące generować podział na zbiory niekoniecznie rozłączne. I taka właśnie sytuacja może być przyczyną błędów w wyciąganiu wniosków. Przykładem typologii niebędącej klasyfikacją jest stosowane czasem przez uczniów wyróżnianie trzech rodzajów prostych (dających w sumie zbiór wszystkich prostych na płaszczyźnie): proste równoległe, proste prostopadłe i proste przecinające się. Taki podział jest typologią, ale nie jest klasyfikacją, co może być kłopotliwe w przypadku prostych przecinających się pod kątem prostym.

CODZIENNOŚĆ	MATEMATYKA
to musi być jedna z kilku możliwości, innych możliwości nie ma	pewne typy zależności matematycznych pokrywają przestrzeń wszystkich możliwości
	jeśli dwa okręgi są rozłączne, to oznacza, że suma długości ich promieni jest mniejsza niż odległość środków tych okręgów

Wnioski wynikające z dokonywania klasyfikacji zbioru wszystkich możliwości są w matematyce stosunkowo częste i mające charakterystyczną strukturę, odbiegającą od schematów zwykle stosowanych (np. twierdzenia „zupełne").

SC oparty na analizie konkretnego przykładu (np. rysunku)

Wyróżniony tu typ wnioskowania jest najczęściej występującym sposobem argumentowania zarówno w życiu, jak i w procesie weryfikacji hipotez matematycznych, o czym już wcześniej była mowa. Uczący się sprawdza poprawność dla konkretnego przykładu (np. wybranej konkretnie liczby – nawet dużej, co uczniowi sugeruje jej dowolność), a następnie stwierdza, że hipotezę można uznać za uzasadnioną. Stwierdzenie można śmiało uznać za prawdziwe, bo dało się je zastosować. Ta kategoria obejmuje typy rozumowania nazywane przez Balacheffa (1990) naiwnym empiryzmem oraz próbą rozstrzygającą, czyli prostym posługiwaniem się konkretem.

CODZIENNOŚĆ	MATEMATYKA
to działa zawsze, bo się sprawdziło teraz	sprawdzenie na przykładzie (lub kilku przykładach) pozwala przypuszczać, że prawo działa zawsze
	z rysunku widać, że…

Przykładów rozumowań tego typu można podać bardzo wiele i to na bardzo różnych poziomach matematycznego kształcenia.

SC oparty na braku kontrprzykładów

Taki sposób argumentowania w życiu codziennym wydaje się dość naturalny. Skoro nie można łatwo znaleźć jakiegoś kontrprzykładu dla danego zjawiska, sensowne wydaje się przyjęcie, że jest ono ogólnie obowiązujące. Im więcej wykonamy prób poszukiwania przykładu obalającego dane stwierdzenie i kończą się one niepowodzeniem, tym bardziej pogłębia się nasze przekonanie, że musi być ono prawdziwe.

<table>
<tr><th>CODZIENNOŚĆ</th><th>MATEMATYKA</th></tr>
<tr><td rowspan="2">nie mogę znaleźć powodów, aby tak miało nie być</td><td>kilkakrotne nieskuteczne próby znalezienia kontrprzykładu</td></tr>
<tr><td>rysuję różne czworokąty, łączę środki ich boków, żeby zbadać czy powstaje równoległobok, nie mogę znaleźć kontrprzykładu, więc to chyba prawda</td></tr>
</table>

Postępowanie opisywanego typu można obserwować stosunkowo często. Na przykład studenci rozwiązując zadanie „równoległobok" (patrz Aneks) po narysowaniu kilku celowo bardzo nieregularnych czworokątów stwierdzali: *widać, że tak musi być, nie da tego się narysować inaczej*.

SC oparty na bliżej nie dającym się wyjaśnić przekonaniu o prawdziwości hipotezy

<table>
<tr><th>CODZIENNOŚĆ</th><th>MATEMATYKA</th></tr>
<tr><td rowspan="2">czuję, że to prawda</td><td>posiadanie pewnych przekonań odnośnie natury niektórych obiektów matematycznych</td></tr>
<tr><td>dodawanie i mnożenie zawsze powiększają wielkości;
obrazem odcinka w przekształceniu geometrycznym zawsze jest odcinek</td></tr>
</table>

Znaczący wpływ wierzeń i przekonań człowieka na jego działalność matematyczną jest przedmiotem licznych badań dydaktycznych (Schoenfeld 1985; Pawlik 2005; Ciosek 2005). W rozważanej w tym miejscu sytuacji chodzi o pojmowanie terminu *przekonanie* na tyle szeroko, aby obejmowało też te dotyczące sposobu wyciągania wniosków w matematyce i zasad uznawania ich prawdziwości. Przekonania tego typu zwykle nie są werbalizowane, czasem bywają nieuświadomione, ale mają istotny wpływ na podejmowanie decyzji uczących się na sposób oceniania poprawności hipotez w działalności matematycznej. Takie odczucie może czasem towarzyszyć nawet doświadczonemu matematykowi. M. Ciosek (2005, s. 93) opisuje przykład pracy matematyka poszukującego miejsca geometrycznego punktów na płaszczyźnie spełniających pewien warunek. Matematyk jeszcze przed faktycznym rozwiązaniem zadania mówi: *jestem przekonany, że poszukiwana figura musi mieć charakter liniowy*. Takie przekonanie miało istotne znaczenie w poszukiwaniu późniejszego rozwiązania, ale towarzyszyło matematykowi jeszcze przez jego uzyskaniem.

Opiszmy teraz drugą grupę schematów rozumowania.

Schematy argumentowania oparte na konwencji (SK)

Mowa tu jest o zasadach społecznego przyzwalania na określone sposoby rozumowania, roli autorytetów w tym procesie i przyjętych sposobów komunikowania rezultatów wnioskowania.

SK oparte na prawidłowościach logicznych (rozumowania matematyczne oparte na dedukcji)

Myślimy tu o używaniu argumentów matematycznych poprzez powiązaną sekwencję stwierdzeń uzasadniających dane zdanie ogólne w oparciu o wiedzę wcześniej przyjętą i uznaną za prawdziwą. Rezultaty takiego rozumowania są komunikowane w sposób zrozumiały, w języku sformalizowanym i nie budzą wątpliwości co do swojej słuszności. Ocena poprawności takich rozumowań pozostaje niezależna od grupy społecznej, do której są adresowane. Istotna jest strona logiczna i zgodność z zaakceptowaną wcześniej wiedzą, a w zrozumieniu przekazu może przeszkodzić jedynie nieumiejętność odczytania i prześledzenia toku rozumowania.

SK oparte na społecznym przyzwoleniu (autorytarne)

Ten rodzaj wnioskowania jest trudny do opisania i zilustrowania głównie dlatego, że jego stosowanie nie odzwierciedla się w konkretnej aktywności matematycznej czy w opisie jej rezultatów. O istnieniu takich schematów przekonuje się każdy, kto wnikliwie przygląda się praktyce nauczania matematyki w klasie szkolnej i obserwuje funkcjonowanie różnego rodzaju niepisanych konwencji przyjmowanych i stosowanych w takim procesie, z których pewne wchodzą w skład tego, co czasem w literaturze nazywa się „kontraktem szkolnym". Można sobie łatwo wyobrazić, że prawdziwość jakiejś tezy matematycznej, o której dyskutuje się w klasie szkolnej, uczeń uznaje dlatego, że nauczyciel lub inny uczeń (uznany za najlepszego w klasie) przedstawił dane rozumowanie uzasadniające. To nie wiedza matematyczna przekonuje wówczas o prawdziwości rozważanej hipotezy, lecz fakt, że tę prawdziwość stwierdza ktoś uznawany za autorytet. Rolę autorytetu może pełnić tekst podręcznika lub jakiejś pozycji książkowej albo wynik pracy komputera. W tej kategorii uznawania prawdziwości stwierdzeń matematycznych bardzo ważną rolę pełni system przekonań jednostki oraz społeczny kontekst procesu nauczania-uczenia się.

6.2.3. Badania szczegółowe tematyczne 3: Diagnoza rozwoju umiejętności uzasadniania stwierdzeń matematycznych i przechodzenia uczniów na poszczególne poziomy rozumienia metody matematycznej (badanie D)

Głównym celem analizy jest próba podsumowania wyników badania R i dokonania pewnej ich syntezy. Metodą badawczą jest zatem analiza jakościowa danych ilościowych zebranych w badaniu R (na podstawie analizy rozwiązań zadań z zestawu Z), tym razem prowadzona w kierunku wyciągania wniosków trochę innej natury.

Wymagania opisu wyników badania D każą określić, jak rozumiemy fakt, że badana umiejętność matematyczna rozwija się na kolejnych etapach edukacyjnych. Uściślenia wymaga również sformułowanie *poziomy rozumienia metody matematycznej*, aby móc kwalifikować zachowania poznawcze uczniów odzwierciedlające poziom ich rozumienia tej metody.

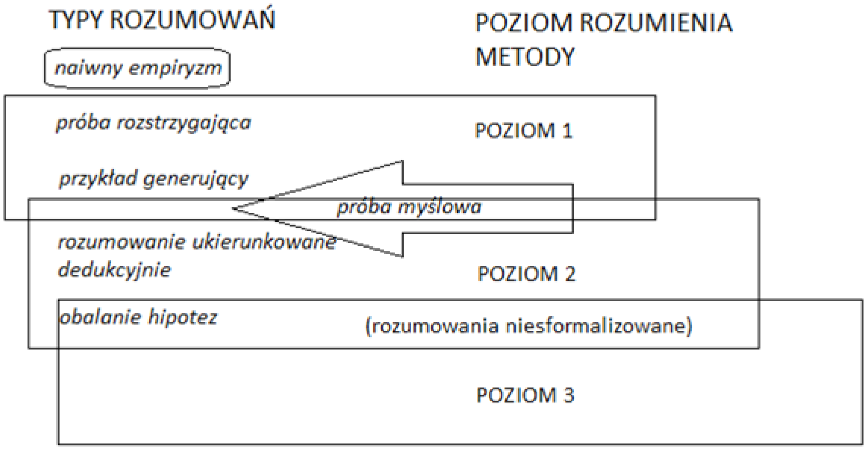
W opisie rozwoju badanej umiejętności możemy posłużyć się typologią rodzajów uczniowskich uzasadnień podaną przez Balacheffa (szczegółowo omówioną w poprzednim podrozdziale), głównie z uwagi na fakt, że autor tej typologii wyraźnie podkreśla, iż ma ona charakter hierarchiczny. Oznacza to, że wraz z zaliczaniem danego rozumowania uczniowskiego do kolejnej grupy wymienianej przez Balacheffa wyrażamy domniemanie, że umiejętność zobrazowana tym rozumowaniem znajduje się w wyższym stadium swojego rozwoju (rozwija się świadomość konieczności eliminacji konkretu). Do takiego oglądu sytuacji dołóżmy jeszcze fakt wyróżniania w dydaktyce matematyki trzech poziomów rozumienia teorii matematycznej:

Poziom 1 – dowód rozumiany jako argument natury ogólnej (w odróżnieniu od sprawdzania twierdzenia na przypadkach szczególnych);

Poziom 2 – dowód jako rozumowanie odwołujące się do wcześniej sformułowanych definicji i twierdzeń;

Poziom 3 – dowód w zwykłym rozumieniu globalnie-dedukcyjnej teorii matematycznej (Legutko, Turnau 1989).

Próbę dokonania połączenia hierarchicznie ustrukturyzowanych rodzajów uczniowskich rozumowań wyróżnionych i opisanych przez Balacheffa i zakwalifikowania ich do zacytowanych wyżej poziomów rozumienia dowodu przedstawiłam na schemacie 4.



Schemat 4. Współzależność rozważanych kategorii

Stwierdziłam, że naiwnego empiryzmu (często leżącego u podstaw rozumowania uczniów, szczególnie na niższych etapach ich edukacji) nie możemy traktować w kategoriach wyrażających rozumienie roli uzasadnienia typu dowodowego. Pamiętajmy, że rozumienie roli takiego rozumowania (nawet na poziomie 1) wymaga od ucznia już pewnej świadomości metodologicznej. Jako pierwszy symptom rozumienia roli rozumowania typu dowodowego w teorii matematycznej możemy (z dużym przybliżeniem) traktować posługiwanie się przez ucznia wnioskowaniem nazywanym przez Balacheffa próbą rozstrzygającą, przyjmując, że posiada on już pewną świadomość ogólności konkretu. Natomiast znajdowanie się na drugim i trzecim poziomie rozumienia roli dowodu musi zwierać odniesienia do umiejętności związanych z rozumowaniami bardziej lub mniej formalnymi na gruncie matematyki.

Szczególne miejsce na schemacie 4 zajmuje rozumowanie nazwane przez Balacheffa próbą myślową. Ten eksperyment myślowy może być mocniej lub słabiej związany z konkretem, którego dotyczy. W zależności od siły tego związku w myśleniu człowieka rozumowanie to znajduje się na pierwszym lub na drugim poziomie rozumienia metody matematycznej.

Dokonajmy podsumowania danych liczbowych uzyskanych w trakcie badania D i zbierzmy je w postaci nowego zestawienia.

Tabela 6.2.3.1

Badana grupa	SPIV	SPVI	G	L
Liczba rozwiązań opartych na analizie konkretnych przykładów	176	159	252	189
Procent uzasadnień tego typu (w przybliżeniu)	90,7%	88,8%	90%	81,8%

Zilustrujmy te dane na diagramie ukazującym kierunek zmian ilościowych:

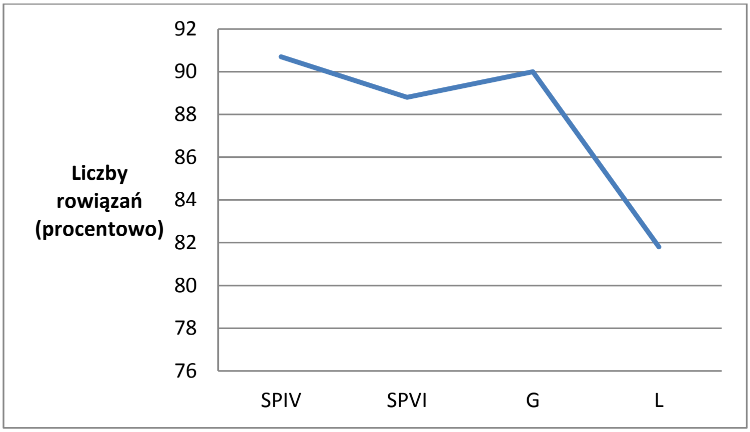


Diagram 2. Uzasadnienia poprzez *proste posługiwanie się konkretem*

Przebieg linii na tym diagramie uprawnia do sformułowania następującej hipotezy:

HIPOTEZA D1

Świadomość metodologiczna uczniów na kolejnych etapach nauczania rozwija się w niewielkim stopniu. Zdecydowana większość uczniów na wszystkich etapach kształcenia stosuje metodę uzasadniania ogólnych stwierdzeń matematycznych opartą na ilustrowaniu prawdziwości tez na konkretnych przykładach.

Czasem rozumowania uczniów noszą cechy eksperymentu kluczowego lub nawet ogólnego przykładu i eksperymentu myślowego; w większości przypadków jest to jednak trudne do uchwycenia; dokładniejsze zbadanie przebiegu rozumowań uczniowskich wymaga użycia bardzo wysublimowanych narzędzi badawczych.

Uzyskane dane liczbowe uprawniają również do kolejnego wniosku:

HIPOTEZA D2

Uczący się matematyki uczniowie w większości (około 80%) nie osiągają wyższego niż pierwszy poziomu rozumienia roli rozumowań typu dowodowego w teorii matematycznej. Wielu stosuje uzasadnianie ogólnych stwierdzeń matematycznych co prawda na konkretnych przykładach, ale z zauważalną tendencją do wyjścia poza konkret.

O braku tego typu uczniowskiej kompetencji piszą także dydaktycy matematyki w innych krajach. Na przykład J. Sekerák i D. Šveda (2008) opisując badania dydaktyczne dotyczące kluczowych kompetencji matematycznych wymieniają 3 grupy:

1. kompetencje na poziomie reprodukcji (*reproduction level competences*) – wykonywanie rutynowych rachunków i procedur i rozwiązywanie rutynowych zadań;
2. kompetencje na poziomie powiązań (*connection level competence*s) – dotyczą modelowania, związków między elementami wiedzy, między znanymi uczniowi metodami;
3. kompetencje na poziomie refleksji (*reflection level competences*) – dotyczą rozwijania myślenia, argumentacji, abstrakcji, uogólniania, modelowania użytego w nowym dla ucznia kontekście, oryginalnej postawy matematycznej, połączenia kilku bardziej złożonych metod.

Interesujące nas umiejętności autorzy sytuują w grupie trzeciej kompetencji kluczowych. Badaniom poddano uczniów szkoły podstawowej (w liczbie 201) oraz uczniów szkoły średniej (w liczbie 74), którzy rozwiązywali nierutynowe zadania matematyczne. W cytowanej pracy sformułowane są dwie hipotezy, jedna o następującej treści:

> *Obecne nauczanie matematyki ani nie tłumi, ani nie rozwija kluczowych kompetencji matematycznych na adekwatnym poziomie. Rozwijane są głównie kompetencje z poziomu reprodukcji, kompetencje na poziomie powiązań rozwijane są w mniejszym stopniu, a w ogóle nie są rozwijane kompetencje na poziomie refleksji* (tamże, s. 45).

Wyniki badań diagnostycznych przeprowadzonych przez Autorów artykułu potwierdziły tę hipotezę, a trzeci (interesujący nas) poziom kompetencji osiągnęło łącznie ok. 12% badanych uczniów.

Widzimy, że wyniki diagnozowania opisywanych w niniejszej książce umiejętności uczniowskich nie są optymistyczne. Dla złagodzenia tego niekorzystnego obrazu zauważmy, że na podstawie danych liczbowych przedstawionych w tabeli 6.2.3.1, można uznać (stosując terminologię L. Wygotskiego), że rozwój badanej umiejętności leży w strefie najbliższego rozwoju uczniów (Siwek 2005). Wystarczą zatem długotrwałe, celowe zabiegi dydaktyczne, aby uczniowie włączyli interesujący nas poziom rozumienia metody (poziom 2) do struktury swojej wiedzy i umiejętności matematycznych.

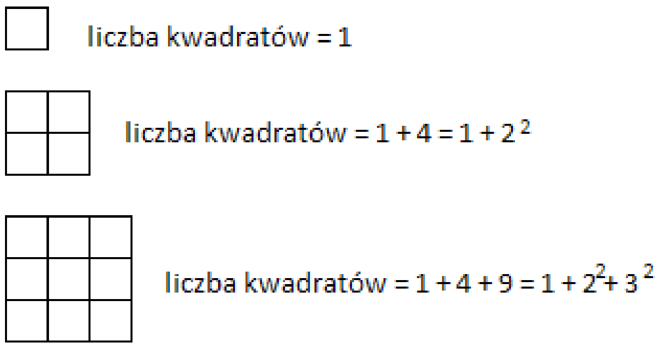
O tym, że konieczne jest udoskonalenie koncepcji nauczania matematyki, jeśli chodzi o kształcenie umiejętności typu dowodowego utwierdza kolejny przykład badania dydaktycznego przeprowadzonego przeze mnie w ostatnich latach, tym razem na grupie studentów pierwszego roku nauczycielskich studiów matematycznych.

Dwóm grupom studentów pierwszego roku studiów dano do rozwiązania pewne zadanie matematyczne w dwóch wersjach (zadanie „liczba kwadratów" – wersja

A i wersja B – patrz Aneks). Zadanie w wersji A rozwiązywało 78 studentów (nazwijmy tę grupę SA), a w wersji B 52 osoby (grupa SB). Badani z grupy SB zadawali dodatkowe pytania o znaczenie określenia „różne kwadraty", uczestnicy badania z grupy SA takich wątpliwości nie przejawiali, być może już nawet wstępna analiza danego im wzoru wyjaśniała tę kwestię. Oto, jak studenci rozwiązywali dane im zadania.

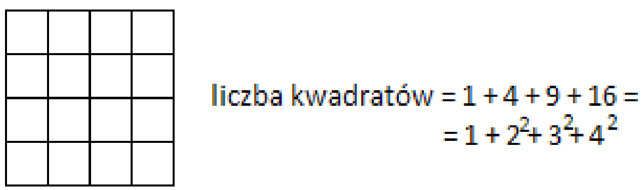
Grupa SA

Żadna z osób z grupy SA nie kwestionowała prawdziwości weryfikowanej hipotezy, a ich typowe postępowanie było następujące:



Rys. 40

Niektórzy badani oczywiście pomijali sprawdzanie dla $n = 1$. Aż 43 osoby spośród badanych po takiej weryfikacji zakończyło rozwiązywanie zadania, dopisując czasem komentarz typu: *widać, że tak będzie zawsze.* Inni studenci (w liczbie 23) wykonali jeszcze kolejną próbę, np. dla $n = 4$ (rys. 41):



Rys. 41

Nieliczni (7 osób) weryfikowali jeszcze tę hipotezę dla kwadratów o boku długości 5, 7 lub nawet 10. Można wnioskować, że każda następna pozytywnie zakończona próba weryfikacji badanej hipotezy potwierdzała jej wiarygodność. Niewiele, bo tylko 12 osób na 78, podjęło próbę przeprowadzenia matematycznego dowodu weryfikowanej hipotezy. Być może, gdyby w poleceniu zadania występowało słowo „udowodnij" – każdy student podjąłby taką próbę, jednak temat zadania tego nie sugerował.

Grupa SB

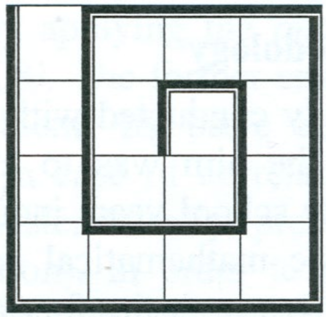
Zadanie w wersji B okazało się dla badanych studentów dużo trudniejsze. Jego sformułowanie wymagało od rozwiązującego przede wszystkim postawienia hipotezy, odkrycia sposobu zliczania kwadratów i zastosowania go dla $n = 60$. Użycie stosunkowo dużej liczby n miało w moim założeniu inspirować do postawienia hipotezy natury ogólnej, sprawdzającej się w przy niewielkiej modyfikacji dla dowolnej liczby $n \in N$. Być może to sprawiło, że aż 14 osób nie podjęło żadnej próby rozwiązania. Inne osoby przystąpiły do badania konkretnego przypadku, najczęściej kwadratu o boku długości 4 (17 osób) lub 5 (21 osób). Następnie rozwiązujący stosowali różne sposoby zliczania kwadratów, ale tylko nieliczne z tych sposobów prowadziły do poprawnego wyniku[20]. Tylko 6 badanych studentów podało ogólną zasadę zliczania kwadratów dla $n = 60$, nie podali oni jednak ogólnej postaci hipotezy używając symbolu literowego (pomimo występowania w zapisie symbolu n) ani też nie podjęli jawnej próby udowodnienia poprawności wymyślonego sposobu zliczania. Niektóre zapisy miały formę sugerującą, że chociaż badany nie sformułował hipotezy ogólnej ani jej nie uzasadnił, to jednak jego rozumowanie można traktować jako analizę przykładu konkretnego w oparciu o wnioskowanie natury ogólnej, wychodzące poza konkret.

Podobne badanie (przy użyciu analogicznego narzędzia badawczego) przeprowadzili niezależnie ode mnie G. Stylianides i A. Stylianides (2009). Uzyskane w badaniu (wśród 39 studentów) dane również pokazują, że jedynym sposobem wnioskowania studentów końcowego roku studiów nauczycielskich było rozumowanie na konkretnych przykładach kwadratów. Studenci formułowali hipotezę, jak zliczać kwadraty przy długości boku wyjściowego kwadratu równej 60 jednostkom, pisząc: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 59^2 + 60^2$. Zapytani o uzasadnienie tego sposobu zliczania, odpowiadali: *tego się nie da policzyć, to można policzyć dla kwadratu o długości 4, no może 5 i to już pokazuje, jak ma być.* Autorzy badań stwierdzili, że w całej badanej grupie studentów metodą weryfikacji postawionej hipotezy był naiwny empiryzm.

Opisane badanie pokazuje, że studenci I roku studiów matematycznych nie podejmują samodzielnie prób matematycznego uzasadniania stwierdzeń, kiedy weryfikują gotową hipotezę lub gdy sami ją formułują. Problem ten podkreślają także inni dydaktycy. W tym miejscu krótko można przytoczyć badanie opisane przez dydaktyków słoweńskich (Kolar, Slapar, Hodnik Čadež 2012). Opisują oni wyniki rozwiązywania przez grupę studentów następującego zadania (s. 302):

[20] Zapisy sporządzane przez studentów były bardzo różne podobnie jak strategie przez nich stosowane, nie będą one jednak analizowane szczegółowo w tym miejscu, będzie to w przyszłości przedmiotem innej mojej pracy.

Na poniższym rysunku narysowano spiralę umieszczoną w kwadracie o boku długości 4. Zbadaj problem długości spirali w kwadratach o różnych wymiarach.



Rys. 42

Studenci (łącznie 161 – przyszłych nauczycieli matematyki) rozwiązując to zadanie stawiali bardzo różne hipotezy co do sposobu obliczania szukanej długości spirali (rys. 42). Badacze konstatują jednak, że żaden ze studentów nie podjął próby matematycznego uzasadnienia postawionej przez siebie hipotezy.

Potrzeba uzasadniania zdań ogólnych w matematyce nie jest zatem prawdopodobnie naturalnym dążeniem człowieka. Odczucie konieczności uzasadnienia natury ogólnej musi być odpowiednio zainspirowane – inspiracją może być polecenie typu: „udowodnij" lub „uzasadnij" w zadaniu matematycznym.

Taka postawa uczących się nie jest niczym nagannym. Jest objawem racjonalnego działania człowieka: skoro już odkrył jakąś zasadę i nikt go nie prosi o nic więcej, kończy pracę. To nam, badaczom, pokazuje, że możemy jedynie oczekiwać, że człowiek, nawet na stosunkowo wysokim poziomie wykształcenia matematycznego (jakim jest poziom studiów matematycznych), będzie odczuwał naturalną potrzebę uzasadniania hipotez matematycznych i robił to spontanicznie. Postawę prezentowaną przez studentów w opisywanym badaniu można nazwać *postawą racjonalności w postępowaniu* i nie należy jej uznawać za naganną. Filozof D. Miller pisze, że za błąd i nieporozumienie trzeba uznać tezę, że uzasadnienia odgrywają centralną czy ważną rolę dla człowieka w byciu racjonalnym (za: Chmielewski 2009). Założenie, że semantyczną racjonalizacją czynności człowieka badającego jakieś zagadnienie jest prowadzenie rozumowania zgodnego z założeniami logiki jest bezzasadne.

Z opisanego doświadczenia wynika natomiast inny ważny wniosek, potwierdzający wyrażane przez dydaktyków matematyki opinie o niewątpliwym wpływie (niekoniecznie pozytywnym) częstego ilustrowania zależności i faktów matematycznych przykładami w procesie nauczania (o czym już wspominałam). N. Balacheff formułuje tę myśl w następujący sposób:

> *ten rodzaj naiwnej empirii jest istotny z dydaktycznego punktu widzenia, gdyż stawia pod znakiem zapytania korzystanie z przykładów do celów dydaktycznych. Przykłady są rzeczywiście przydatne do celów dydaktycznych, ale wydaje się, że z punktu widzenia ucznia mogą mieć status przeszkody w procesach uzasadniania* (1990, s. 289).

Znaczy to, że często stosowane w procesie dydaktycznym ilustrowanie zasad ogólnych odpowiednim doborem przykładów – choć jest postępowaniem uzasadnionym i poprawnym dydaktycznie – może powodować niepożądane skutki uboczne. Problem ten podejmuje wielu dydaktyków. H. Freudenthal opisuje zjawisko, które można nazwać błędem dydaktycznym nauczyciela. Nauczyciel stosuje pewną strategię postępowania, która jest metodologicznie poprawna lokalnie, ale często powtarzana może się przerodzić w niepożądane zjawisko o skali globalnej (Freudenthal 1989). Jedną z interpretacji tej opinii H. Freudenthala przedstawia M. Ciosek:

> *Na wielu lekcjach matematyki wnioski, jakie formułowali uczniowie na podstawie obserwacji przykładów, były akceptowane przez nauczyciela. Czasem, po sformułowaniu wniosku – przeprowadzane było jakieś ogólne rozważanie, które nauczyciel nazywał dowodem. Innym razem takiego rozważania nie przeprowadzano. W tym pierwszym przypadku ogólne rozważanie nie zmieniało postaci wniosku. Uczeń może więc sądzić, że tzw. dowód narzucającego się z przykładów wniosku jest pewnym dodatkowym zwyczajem, który niczego już zmienić nie może, a który wykonuje się z jakiegoś bliżej niekreślonego powodu* (1992, s. 161–162).

M. Ciosek opisuje sprawozdania z lekcji szkolnych, w trakcie których można było obserwować opisany schemat postępowania nauczycieli (Ciosek, 1992, s. 138–141).

Z przedstawionych w tej części pracy rozważań moż*na* wysnuć następujące wnioski:

WNIOSEK D1

Nauczanie matematyki w niedostatecznym stopniu rozwija potrzebę uzasadniania hipotez matematycznych, zarówno własnych, jak i już gotowych, podawanych w celu ich weryfikacji. Taka potrzeba nie zawsze rozwija się samoistnie, a jej brak można częściowo tłumaczyć *postawą racjonalności w postępowaniu* osób rozwiązujących zadania matematyczne.

WNIOSEK D2

Proces szkolnego nauczania-uczenia się matematyki prawdopodobnie nie daje uczniowi możliwości doświadczenia różnych, wymienianych przez G. Hannę (2000), funkcji dowodu matematycznego. Wskutek tego ukształtowany w trakcie szkolnej nauki obraz tej kategorii może okazać się niepełny i ograniczony do jednostronnego widzenia dowodu jako „sztucznego” potwierdzania tego, co dla uczącego się jest oczywiste.

Pozornie wydaje się, że tak niedoskonały obraz roli i znaczenia dowodu matematycznego w uprawianiu matematyki zmienia się w trakcie studiów matematycznych. Spodziewamy się, że na tym etapie kształcenia matematycznego studenci nabierają przekonania, że dowód matematyczny jest jedynym i niepodważalnym kryterium prawdziwości stwierdzeń matematycznych. Jednak badania dydaktyczne tego nie potwierdzają, co zostało opisane szczegółowo w artykule *Diagnoza wiedzy uczniów szkół ponadgimnazjalnych i studentów matematyki na temat związku twierdzenia z jego dowodem* (Pieprzyk, Żeromska 2009). Badania te wzorowano na przeprowadzonych wcześniej badaniach dydaktycznych dotyczących uczniów szkół licealnych (Nowecki 1978). Badaniom poddano studentów III i IV[21] roku studiów matematycznych (łącznie 72 osoby). Respondentom dano do przeanalizowania 3 arkusze badawcze (Arkusz 1, Arkusz 2 i Arkusz 3 – patrz Aneks). Wyniki okazały się niepokojące.

W **pierwszym arkuszu badawczym (Arkusz 1)** podano prawdziwe twierdzenie oraz rozumowanie zawierające błąd, mające pełnić rolę rzekomego dowodu. Analizujący ten tekst student mógł błąd poprawić i na tej podstawie uznać prawdziwość podanego twierdzenia (tak zrobiło 12 osób). Mógł też wyciągnąć następujący wniosek: *na podstawie tego rozumowania nie da się stwierdzić, czy twierdzenie jest prawdziwe* (3 osoby). Niestety, aż 27 osób pomimo stwierdzenia fałszywości dowodu, samo twierdzenie oceniły jako prawdziwe. Inni studenci (15 osób) przejawili jeszcze bardziej niepokojący schemat rozumowania: *dowód fałszywy ⇒ twierdzenie fałszywe*. Taki sposób myślenia jest symptomem poważnych braków w rozumieniu roli dowodu w uznawaniu poprawności twierdzeń. Reasumując możemy stwierdzić, że pożądaną świadomość metodologiczną podczas pracy nad Arkuszem badawczym nr 1 w pełni ujawniło 15 studentów (na 72 badanych).

W **drugim arkuszu badawczym (Arkusz 2)**, który zawierał prawdziwe twierdzenie matematyczne oraz jego poprawnie przeprowadzony dowód, należało przeanalizować elementarne wnioskowanie przedstawione w tekście dowodu, uznać go za poprawne i w konsekwencji uznać twierdzenie za prawdziwe. Tym razem 21 osób (na 72) odpowiedziało na oba pytania poprawnie. Natomiast 6 osób stwierdziło, że dowód jest poprawny, a twierdzenie fałszywe (!), 3 osoby uznały, że dowód jest poprawny, a o twierdzeniu nie stwierdziły nic, natomiast 9 studentów podało, że dowód jest niepoprawny i wyciągnęło stąd wniosek, że twierdzenie jest fałszywe.

Trzeci arkusz badawczy (Arkusz 3) został skonstruowany nieco inaczej. Zawierał rozumowanie o charakterze formalnym, w skład którego wchodziło stwierdzenie (w oczywisty sposób fałszywe) oraz pewne błędne rozumowanie, rzekomo uzasadniające to stwierdzenie. Rozwiązujący miał odpowiedzieć na otwarte pytanie: *co o tym sądzisz?* Miejmy nadzieję, że przez pomyłkę (?) jeden ze studentów uznał, że prawdą jest równość „4 = 5". 12 osób nie skomentowało poprawności przedstawionego rozumowania, prawdopodobnie nie mogąc wskazać, gdzie popełniony został błąd, a jednocześnie wiedząc, że musiał on zostać popełniony, skoro uzasadniono niemoż-

[21] Badania prowadzono przed wejściem w życie studiów dwustopniowych.

liwą do spełnienia równość. Zdecydowanie największa grupa studentów (59 osób) słusznie stwierdziła, że rozumowanie jest niepoprawne. Natomiast uzasadnienia tej niepoprawności pozostawiają wiele do życzenia (w pracach około 36 osób).

Ponieważ w omawianych tu badaniach w sposób szczególny przyglądamy się roli rozumowania „na konkrecie" jako podstawy stwierdzania własności ogólnych, zwróćmy uwagę, że w pracach studentów przy wypełnianiu wszystkich arkuszy badawczych również dosyć częste występowało proste posługiwanie się konkretem. Szczególnie jeśli twierdzenie dotyczyło geometrii, uczący się często sporządzali rysunek (lub analizowali gotowy) ilustrujący sytuację opisaną w twierdzeniu. Taki rysunek czasem bywa dla studenta (a tym bardziej ucznia) wystarczająco przekonujący; uznaje on wtedy, że twierdzenie rzeczywiście zachodzi.

Badani studenci często weryfikowali prawdziwość twierdzenia właśnie przez sprawdzanie „zachodzenia" twierdzenia dla konkretnego przykładu (np. wybranych liczb czy konkretnej figury geometrycznej). Wyciągali z tego wniosek, że skoro dla tego przykładu twierdzenie jest prawdziwe, to jest prawdziwe w ogólnym przypadku. Twierdzenie zatem jest prawdziwe, bo dało się je zastosować.

Takie wyniki badań pozwalają częściowo potwierdzić następującą hipotezę.

HIPOTEZA D3

Nawet wieloletnia edukacja matematyczna nie zapewnia wystarczającego rozumienia roli dowodu w badaniu matematycznym, a w szczególności wzajemnej relacji pomiędzy twierdzeniem a jego dowodem. P*roste posługiwanie się konkretem* jest na poziomie studiów matematycznych rozumowaniem uzasadniającym często wystarczającym studentowi do stwierdzenia poprawności ogólnego stwierdzenia matematycznego.

6.2.4. Badania szczegółowe tematyczne 4: Poglądy i wiedza nauczycieli i przyszłych nauczycieli (badanie NiS)

Tę część badań, która będzie przedmiotem opisu niniejszego podrozdziału, uważam za szczególnie ważną i oddającą charakter antropomatematycznego podejścia do badań dydaktycznych, w których, o czym już pisałam, chcę podkreślić rolę nauczyciela w kształtowaniu rezultatów edukacji matematycznej, w szczególności w kontekście metodologii matematyki.

Rozpocznę od usytuowania badań własnych we współcześnie prowadzonych badaniach dydaktycznych na świecie. Okazuje się bowiem, że niektórzy dydaktycy matematyki podkreślają i badają znaczenie poglądów matematyków i nauczycieli na naturę wiedzy matematycznej. Podam dwa przykłady badań zaczerpniętych z literatury (Mura 1993, 1995; Hemmi 2010).

Przykład 1 (Mura 1993, 1995)

Pierwszy z przykładów badań dydaktycznych (uwzględniających rolę poglądów nauczyciela matematyki na rodzaj wiedzy kształtowanej przez niego u uczniów) zakłada, że punktem wyjścia do badania takich poglądów jest rozpoznanie wiedzy i poglądów nauczycieli uniwersyteckich oraz ich porównanie z „książkowymi" poglądami myślicieli i filozofów matematyki (Mura 1993). Autorka badała odpowiedzi uniwersyteckich nauczycieli matematyki i twórczych matematyków na pytanie otwarte: *Jak mógłbyś zdefiniować (określić) matematykę?* Kwestionariusz z prośbą o odpowiedź na to pytanie został wysłany do 173 osób. Odpowiedziało 116 osób. Wyróżniono 12 typów poglądów na matematykę (Mura 1993). Następnie skonfrontowano te poglądy z opiniami uniwersyteckich dydaktyków matematyki (Mura 1995), którzy udzielili porównywalnych typów wypowiedzi. Pomimo podobieństwa autorka zauważa, że niektórzy dydaktycy wyraźnie podkreślają humanistyczny charakter wiedzy matematycznej, w przeciwieństwie do poglądów typu:

> *Matematyka to są studia formalnych systemów aksjomatycznych, struktur abstrakcyjnych i obiektów, ich własności i związków między nimi;*

lub

> *Matematyka to jest logika, rygor, odpowiedniość, rozumowanie głównie dedukcyjne, zastosowanie praw i reguł;*

albo też

> *Matematyka to studiowanie wzorów, schematów, identyfikowanie ich i badanie.*

Ciekawe okazuje się przedstawione przez autorkę badań ilościowe zestawienie poglądów matematyków i dydaktyków (Mura 1995, s. 389) – zob. tabela 6.2.4.1.

Tabela 6.2.4.1

Lp.	Matematyka to jest…	Liczba uniwersyteckich nauczycieli matematyki podających zbliżone określenie (w %)	Liczba uniwersyteckich nauczycieli dydaktyki matematyki podających zbliżone określenie (w %)
1.	System formalny	24,3	27,5
2.	Logika	25,2	33,3
3.	Język, symbole	9,7	9,6
4.	Modele rzeczywistości	29,1	31,4
5.	Przechodzenie od złożoności do prostoty	2,9	0
6.	Rozwiązywanie problemów	6,8	11,8

7.	Schematy	4,9	37,3
8.	Myślenie indukcyjne, badanie	2,9	17,6
9.	Sztuka, piękno	14,6	21,6
10.	Nauka ścisła, podstawa wszystkiego	12,6	13,7
11.	Prawda	3,9	0
12.	Kulturowo określona zawartość	0	7,8
13.	Tematy szczegółowe typu liczby, kształty itd.	9,7	25,5
14.	Inne	38,8	15,7

Dane przedstawione w tabeli mogą być źródłem wielu wniosków i zostały szczegółowo zinterpretowane przez autorkę obu cytowanych artykułów. Zwróćmy w tym miejscu uwagę na fakt, że to częściej dydaktycy matematyki niż wykładowcy matematyki postrzegają matematykę jako wiedzę natury formalnej, zawartą w postaci schematów, wykorzystywania których należy się nauczyć (i nauczyć ucznia w szkole). Może to oznaczać – świadome lub nie – przekazywanie takiego (niepożądanego) poglądu w nauczaniu. Jednocześnie to właśnie dydaktycy podkreślają kulturową i społeczną rolę wiedzy matematycznej, czego nie akcentują badani matematycy, nie odnosząc się do aspektu społecznego tej wiedzy (jakby go ignorując).

Przykład 2 (Hemmi 2010)

Innym przykładem współczesnych badań dydaktycznych o podobnym charakterze są badania przeprowadzone i opisane przez K. Hemmi artykule pt. *Three styles characterizing mathematicians' pedagogical perspectives on proof*. Badanie przeprowadzono stosując jakościową metodę interpretacji odpowiedzi udzielonych przez osoby badane na pytania otwarte kwestionariusza. Respondentami było 13 matematyków (wykładowców tego przedmiotu), pracujących ze studentami m.in. pierwszego roku studiów matematycznych. Celem badań było określenie poglądów wykładowców matematyki na studiach matematycznych na rolę dowodu w nauczaniu studentów. Autorka badań wyróżniła trzy rodzaje poglądów matematyków na rolę dowodu w ich pracy dydaktycznej:

- *styl progresywny* (*the progressive style): I don't want to foist the proofs on them* – oddający ideę, że na uczenie dowodzenia jest mało czasu, a efekty są mało obiecujące, zatem można z tego rezygnować;
- *styl dedukcyjny* (*the deductive style): It's high time for students to see real mathematics* – podkreślający ukazywanie dedukcyjnego charakteru matematyki przy założeniu, że jest to niezbędne i konieczne;

- *styl klasyczny* (*the classical style): I can't help giving some nice proofs* – charakteryzuje się docenianiem piękna i znaczenia dowodu w nauczaniu, ale towarzyszy temu odczucie, że można to rzadko pokazywać studentom i nie ma wielkiej nadziei na spektakularne efekty.

Badanie K. Hemmi (a także poprzednio opisane badania R. Mury) potwierdzają fakt występowania ważnego trendu w badaniach dydaktycznych, w który wpisują się również moje badania. Wyniki badań tego typu, prowadzonych na małych próbach badawczych, a więc nie mogących mieć wyraźnej cechy obiektywizmu, zwracają jednak uwagę na złożoność struktury wiedzy, poglądów i przekonań nauczycieli oraz fakt odzwierciedlania tych przekonań w praktyce nauczania. Myślę, że zbyt rzadko pytamy nauczycieli o ich zdanie i opinię na temat różnych elementów ich wiedzy, częściej pytamy o tę wiedzę uczniów. Być może nauczyciele nie odczuwają potrzeby refleksji tego typu. Stąd już blisko do wniosku, że być może nie są świadomi wpływu własnego, subiektywnego obrazu matematyki na obraz matematyki kształtowany w umyśle ucznia.

Przedstawię teraz trzy przykłady przeprowadzonych przeze mnie badań o charakterze antropomatematycznym, odnoszących się osoby nauczyciela i jego roli w układzie SUA. Będą to kolejno[22]:

N2: badanie diagnostyczne dotyczące emocjonalnego kontekstu nauczycielskich poglądów na dowody i dowodzenie w matematyce;

N3: badanie spójności poglądów nauczyciela na konieczne rygory dowodu matematycznego z podejmowanymi przez niego działaniami dydaktycznymi;

N4: badanie diagnostyczne zgodności pojmowania poznawczego i społecznego aspektów dowodu matematycznego przez ucznia i nauczyciela.

Badanie N2

Badaniem dotyczącym opinii nauczycieli, które opisuję w tym miejscu, objęto nieliczną grupę 16 czynnych nauczycieli matematyki, w tym:

- 8 osób reprezentujących II etap edukacji
- 4 osoby reprezentujących III etap edukacji
- 4 osoby reprezentujących IV etap edukacji.

Metodą badania było przeprowadzenie *wywiadu nieustrukturyzowanego* (Łobocki 2000) na podstawie pytań otwartych rejestrowanego w formie notatek badacza oraz wyrywkowe obserwacje lekcji prowadzonych przez badanych nauczycieli. Celem badania była częściowa diagnoza dotycząca odpowiedzi na pytanie:

Jakie poglądy mają nauczyciele na rolę rozumowań typu dowodowego w matematyce?

Chodziło głównie o rozpoznanie stosunku emocjonalnego respondentów do rygorów metodologicznych uprawiania matematyki (odnośnie do dowodu *i* dowo-

[22] Jedno z tej serii badań (badanie N1) zostało już opisane przeze mnie w podrozdziale 2.3.

dzenia). Wszystkie wypowiedzi nauczycieli charakteryzowały się zabarwieniem emocjonalnym (pozytywnym lub negatywnym): *lubię i nie lubię.*

Tabela 6.2.4.2

Etap edukacyjny	*lubię*	*nie lubię*
Szkoła podstawowa	6	2
Gimnazjum	2	2
Liceum	1	3

Próba badanych nauczycieli była na tyle nieliczna, że wszystkie wnioski z tego badania są jedynie hipotetyczne i wymagają potwierdzenia na większej grupie. Jednak można stwierdzić, że wśród badanych osób widać przypuszczalne osłabianie się (wraz z przechodzeniem na kolejne etapy edukacyjne) pozytywnego stosunku do dowodów i dowodzenia w matematyce. Taka sytuacja może wynikać z odczuwania przez nauczycieli trudności w nauczaniu tych właśnie elementów wiedzy. Co prawda, nauczyciele byli pytani o własną opinię na ten temat, jednak na tę opinię może mieć wpływ wieloletnia praktyka pedagogiczna (Cobb i in. 2012).

Dalsza rozmowa z badanymi nauczycielami, którzy przejawili pozytywny stosunek do interesujących mnie kwestii, pozwoliła wyodrębnić dwa powody ich nastawienia pozytywnego: *piękno matematyki (podziw)* i *szacunek (respekt) do matematyki*. Interpretując te poglądy, można założyć, że pierwszy z nich ma wydźwięk aprobujący, oznacza pewną fascynację strukturą i zasadami funkcjonowania wiedzy matematycznej. Drugi natomiast związany jest z pewnego rodzaju obawą przed tym aspektem uprawiania matematyki. Ilościowy rozkład opinii badanych osób przedstawia tabela 6.2.4.3.

Tabela 6.2.4.3

Etap edukacyjny	*dlaczego lubię?*	
	podziw	*respekt*
Szkoła podstawowa	4	2
Gimnazjum	0	2
Liceum	1	0

Jeśli chodzi o prawdopodobne powody nastawienia negatywnego nauczycieli, badani wyraźnie zaakcentowali rolę własnych negatywnych doświadczeń szkolnych i studenckich. Nauczyciele mówili na przykład:

- *dowodzenie jest trudnie, nigdy sobie zbyt dobrze z tym nie radziłem;*
- *tak naprawdę to mogą to robić tylko naukowcy, zwykły człowiek nie ma szans;*
- *my możemy tylko zapoznawać się z gotowymi dowodami na studiach, najczęściej ucząc się ich na pamięć.*

Takie wypowiedzi oraz wiele innych opinii wyrażanych przez studentów nauczycielskich studiów matematycznych świadczą o tym, że mamy do czynienia ze zjawiskiem dziedziczenia lęku i negatywnego stosunku do dowodów i dowodzenia w matematyce. Dziedziczone jest także głębokie przekonanie o własnej nieudolności w czynnościach tego typu, o potrzebie posiadania jakichś nadzwyczajnych zdolności i umiejętności.

Nazywając opisaną skłonność dziedziczeniem, chcę podkreślić zjawisko polegające na tym, że kolejne pokolenia uczących się matematyki, nabywając negatywne doświadczenia co do rygorów metodologicznych matematyki, kreują bardziej lub mniej uświadomiony pejoratywny obraz tej części wiedzy. Jeśli potem zostają nauczycielami, prawdopodobnie przekazują swoje negatywne nastawienie uczniom. Oczywiście to zjawisko nie dotyczy wszystkich nauczycieli i wszystkich uczniów, ale obserwacje praktyki nauczania matematyki wskazują, że występuje dosyć często.

Inną przyczyną negatywnego stosunku nauczycieli do dowodu i dowodzenia w matematyce jest przeświadczenie o sztuczności tych zabiegów, uznawanie ich wręcz za stratę czasu. Niektórzy nauczyciele mówili:

- *jest to niepotrzebne zawracanie głowy, utrudnianie życia;*
- *po co komu uczyć się dowodu, że 1 < 2;*
- *uczniom to niepotrzebne, oni mają problemy z tabliczką mnożenia.*

Podobnie dla wielu uczniów i studentów dowód jest tylko „rytuałem", który występuje w obrębie matematyki. Jest całkiem zbędny w sytuacjach poza matematyką (Vinner 2012). W takich sytuacjach – myślą studenci – droga prowadząca do ustalenia lub weryfikacji uogólnienia mogłaby być następująca: wystarczy rozważyć kilka przypadków szczególnych. Jeśli te przykłady prowadzą nas do pewnego uogólnienia, to uogólnienie to jest na pewno prawdziwe. S. Vinner stwierdza dalej, że taki sposób myślenia miał okazję zauważyć na zajęciach z matematyki dla studentów studiów magisterskich przygotowujących się do zawodu nauczyciela w szkole podstawowej. Mianowicie zapowiedział: *będziemy badać, ile wszystkich podzbiorów ma zbiór złożony z n elementów*. Studenci pracowali wspólnie z nauczycielem, rozważając przypadki $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Grupa doszła do wniosku, że poszukiwana liczba podzbiorów to 2^n. Następnie nauczyciel (S. Vinner) zapytał studentów, czy mają pomysł, jak można to udowodnić.

> *Zauważyłem – pisze autor – wyraz zaskoczenia na ich twarzach. Jeden ze studentów powiedział: czy przykłady, które rozważyliśmy, nie wystarczą dla stwierdzenia prawdziwości tego uogólnienia? Czy jest możliwe, by to uogólnienie nie było prawdziwe? A tak mówiąc między nami, czy dowód nie jest zbędną formalnością? Zauważyłem także, że inni studenci potakująco kiwali głowami na znak, że w pełni zgadzają się z kolegą* (s. 29).

Takie sytuacje i odczucia uczących się nie są rzadkością, nie zawsze jednak są wyraźnie artykułowane.

Ilościowe zestawienie negatywnych poglądów badanych nauczycieli przedstawia tabela 6.2.4.4.

Tabela 6.2.4.4

Etap edukacyjny	*dlaczego nie lubię?*	
	złe doświadczenia	*zbyteczność*
Szkoła podstawowa	0	2
Gimnazjum	1	1
Liceum	1	2

Warto zwrócić uwagę, że wszyscy badani nauczyciele w swoich wypowiedziach podkreślali istotną rolę dowodu w budowie wiedzy matematycznej. Co ważne, mniej rygorystycznie nauczyciele wypowiadali się o ogólnie traktowanym uzasadnianiu w matematyce; wtedy nie używali już terminów *ścisłość, formalizm, sztuczność*. To doświadczenie potwierdza mój wcześniej sformułowany wniosek, że terminologia, której używamy do opisania czynności typu dowodowego, ma istotne znaczenie dla zrozumienia celu i charakteru tych czynności. Podkreślić też trzeba niechęć wielu nauczycieli do wypowiadania swoich opinii o wiedzy matematycznej. Chętnie mówią o swoich uczniach, wręcz większość wypowiedzi starają się kierować w tę właśnie stronę.

Konfrontacja poglądów, opinii i przekonań nauczyciela z jego działaniami na lekcjach matematyki wydaje się być ważnym i mało eksploatowanym kierunkiem badawczym w dydaktyce matematyki. Nie można pomijać faktu istnienia niejawnych komponentów transferu wiedzy nauczycielskiej (m.in. jej składników emocjonalno-uczuciowych) w odniesieniu do wiedzy ucznia funkcjonujących w układzie SUA.

HIPOTEZA NiS 1

> W trakcie edukacji matematycznej przyszły nauczyciel kształtuje swój stosunek emocjonalny do roli dowodu w matematyce i do umiejętności dowodzenia. Ten stosunek może być nacechowany obawą lub niechęcią spowodowaną posiadaniem złych doświadczeń. Możliwe jest nieuświadomione przenoszenie tego negatywnego nastawienia w trakcie procesu nauczania (zjawisko dziedziczenia).

Badanie N3

Badanie N3 skonstruowano podobnie do opisanego w podrozdziale 2.3 badania N1.W tym przypadku dano nauczycielom (30 osobom) pewne twierdzenie matematyczne oraz możliwość wyboru jednego z trzech rozumowań uzasadniających. Badani reprezentowali różne etapy edukacyjne:

4 nauczycieli – II etap

10 nauczycieli – III etap

17 nauczycieli – IV etap (w tym 11 nauczycieli liceum ogólnokształcącego).

Celem badania N3 była odpowiedź na pytanie:

Czy istnieje korelacja pomiędzy rzeczywistymi poglądami nauczyciela na sposób niepodważalnego uzasadniania stwierdzeń w matematyce a podejmowanymi przez niego działaniami dydaktycznymi?

Podstawą wyciągania wniosków z tego badania było zestawienie ilościowych wyników odpowiedzi nauczycieli na dwa pytania dotyczące pewnego znanego twierdzenia i różnych jego uzasadnień.

Oto treść twierdzenia przedstawionego respondentom.

TWIERDZENIE:

Suma n początkowych liczb naturalnych jest równa , czyli 1+2+3+…+n = .

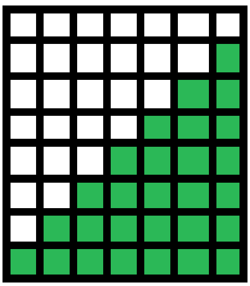
Badanym nauczycielom zadano dwa pytania:

1. *Które z rozumowań przedstawionych poniżej akceptujesz jako dowód matematyczny podanego twierdzenia? Uzasadnij swój wybór.*
2. *Które z rozumowań wykorzystałbyś w szkole jako dowód podanego twierdzenia dla uczniów (nie odnosząc tego do konkretnego etapu edukacyjnego, przy założeniu, że uczniowie znają odpowiedni materiał)? Uzasadnij swój wybór.*

Następnie respondentom przedstawiono następujące rozumowania (1–3).

Rozumowanie 1

Weźmy sumę pierwszych 7 liczb naturalnych. Dla zilustrowania sytuacji narysujmy następującą figurę (rys. 43):



Rys. 43

Powstał prostokąt podzielony na jednakowe części. Zaznaczono „schodkami” sumę tych części 1+2+3+4+5+6+7. W ten sposób podzielono cały prostokąt na połowę, a zatem liczba małych części (oddzielonych „schodkami”) wynosi $\frac{7\,(7+1)}{2}$.

Tę procedurę można powtórzyć dla innej sumy liczb naturalnych (dla wielu przykładów), można się więc przekonać, że twierdzenie jest prawdziwe.

Rozumowanie 2

Weźmy dowolną liczbę naturalną, np. 7. Możemy zapisać następujące dwie sumy:

1+2+3+4+5+6+7

<u>7+6+5+4+3+2+</u>1 Po dodaniu otrzymamy:

8+8+8+8+8+8+8 =7·8= 7(7+1).

Jedna z dodawanych sum to połowa wyniku, więc prawdą jest, że 1+2+3+4+5+6+7= $\frac{7(7+1)}{2}$.

Tę procedurę można zastosować dla każdej liczby naturalnej, a zatem twierdzenie jest prawdziwe.

Rozumowanie 3

Użyjmy Zasady Indukcji Matematycznej.

Weźmy n=1, wtedy badana równość ma postać 1 = $\frac{1\,(1+1)}{2}$ i jest prawdziwa.

Pokażmy jeszcze prawdziwość implikacji:

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n\,(n+1)}{2} \;=>\; 1+2+3+\ldots+n+n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

W tym celu dodajmy do obu stron równości z założenia implikacji wyrażenie n+1. Otrzymamy $1+2+3+\ldots+n+n+1= \frac{n\,(n+1)}{2}$ +n+1.

Przekształćmy prawą stronę tej równości:

$\frac{n\,(n+1)}{2}+n+1=\frac{n\,(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, co dowodzi faktu, że zachodzi implikacja, której należało dowieść.

A zatem na podstawie Zasady Indukcji Matematycznej wyjściowe twierdzenie jest prawdziwe.

Zestawienie odpowiedzi udzielonych na oba pytania postawione badanym przedstawiono w tabeli 6.2.4.5.

Tabela 6.2.4.5

	Pytanie 1	Pytanie 2
Rozumowanie 1	–	17
Rozumowanie 2	–	10
Rozumowanie 3	30	3

Jako uzasadnienie tego wyboru odpowiedzi na pytanie 1 (dotyczące wyboru akceptowanego dowodu twierdzenia) wszyscy nauczyciele zgodnie stwierdzali, że Zasada Indukcji Matematycznej jest jedynym niezawodnym sposobem uzasadniania twierdzeń dotyczących liczb naturalnych. W odniesieniu do pytania 2 (dotyczącego wyboru rozumowania wybieranego pod katem nauczania) odpowiedzi i uzasadnienia podane przez badanych nie były już tak jednoznaczne. Tylko 3 osoby uznały, że

Zasada Indukcji Matematycznej może w szkole posłużyć jako dobry sposób uzasadnienia omawianego twierdzenia. Większość nauczycieli wybrała rozumowanie 1 uzasadniając, że jest ono „rysunkowe", więc najlepiej sprawdzi się w roli rozumowania uzasadniającego dla uczniów. Przedstawmy uzyskane dane na diagramie.

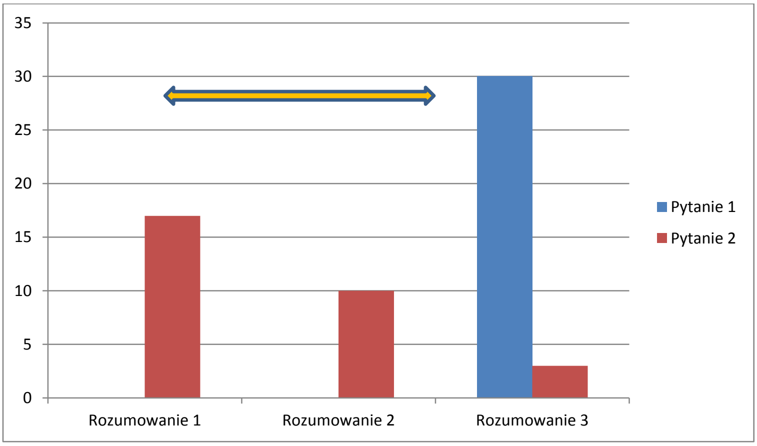


Diagram 3. Wyniki ilościowe badania N3

Układ słupków na diagramie ilustruje rozbieżność pomiędzy liczbą osób wybierających rozumowanie 1 w odpowiedzi na pytanie 1, a liczbą osób wybierających to samo rozumowanie w odpowiedzi na pytanie 2. Fakt wyboru rozumowań 1 i 2 jako najlepiej nadających się do warunków szkolnych specjalnie nie powinien dziwić. Są one obrazowe, mniej abstrakcyjne i bardziej przekonujące dla uczniów. Oba stanowią przykłady uogólniania rozumowania przez uzmiennianie stałej. Jednak żaden z badanych nauczycieli nie uznał tego sposobu jako satysfakcjonującej metody pokazywania prawdziwości twierdzenia w matematyce (jako nauce), chociaż wielu przedstawiłoby uczniom takie rozumowanie jako wystarczający dowód prawdziwości w matematyce (jako przedmiocie nauczania).

Taką rozbieżność możemy potraktować jako niepokojący przejaw niezgodności pomiędzy wyobrażeniem nauczyciela na temat rozumowania dowodowego akceptowalnego w matematyce a przekazywanym obrazem tego w praktyce szkolnej. Opisane tu badanie nie miało w moim zamierzeniu odpowiedzieć na pytanie, które z rozumowań jest lepsze. Jego celem było przede wszystkim ujawnienie ważnych zakłóceń w układzie SUA. Te zakłócenia powodowane są nieuniknioną koniecznością wyboru pewnych treści programowych i sposobów ich ukazywania przez nauczyciela w szkolnym nauczaniu matematyki.

Opisane wcześniej badanie N1 i opisane teraz badanie N3 pokazują pewne tendencje nauczycielskie w tym wyborze. I choć wybór za każdym razem był merytorycznie poprawny, istnieje prawdopodobieństwo, że wielokrotne i konsekwentne stosowanie tych samych strategii postępowania nauczyciela może powodować określone skutki. Uczniowie nie będą mieli okazji do odmiennych doświadczeń i w związku z tym mogą dość jednostronnie ukształtować sobie w umyśle obraz tego, jaką naturę ma wiedza, którą zgłębiają.

HIPOTEZA NiS 2

Rzeczywiste przekonania nauczycieli dotyczące metody matematycznej i jej roli w procesie weryfikowania twierdzeń matematycznych mogą odbiegać od sposobu prezentowania jej w trakcie procesu edukacyjnego.

Badanie N4

Badanie jest próbą skonfrontowania uczniowskich sposobów radzenia sobie z rozwiązywaniem pewnych zadań matematycznych a nauczycielskim poglądem na to, jak te próby powinny wyglądać. Poprzez analizę wytworów pisemnych uczniów i nauczycieli chciałam dokonać diagnozy **preferencji (przy założeniu, że jest uchwytna) aspektów poznawczego i społecznego dowodu matematycznego przejawiającej się w trakcie rozwiązywania zadań matematycznych ukierunkowanych na uzasadnianie ogólnych stwierdzeń matematycznych**. Aspekty społeczny i poznawczy, o których mowa w tym badaniu, zostały opisane w podrozdziale 3.2.

W dwóch zestawach zadań (Zestaw 1 i Zestaw 2) ustrukturyzowanych jako narzędzie badawcze badania N4 nie pojawiają się słowa dowód i udowodnij; użyte zostały terminy przekonywanie i uzasadnianie. Zadania użyte w badaniu N4 miały następującą postać:

Zestaw 1

Rozwiąż następujące zadania robiąc jak najwięcej komentarzy do swoich rozwiązań.

Zad. SP 1

Jak Franek może przekonać Alę, że:

$25 \cdot 3 = 3 \cdot 25$?

Zad. G 1

Jak można się przekonać, że dla liczb naturalnych a i b:

$a \cdot b = b \cdot a$?

Zad. LO 1

Jak można się przekonać, że jeśli cenę zwiększymy o p%, a następnie o q%, to otrzymamy taki sam wynik, jak gdybyśmy najpierw zwiększyli cenę o q% a następnie o p% ?

Zestaw 2

Rozwiąż następujące zadania robiąc jak najwięcej komentarzy do swoich rozwiązań.

Zad. SP 2

Uzasadnij, że:

$25 \cdot 3 = 3 \cdot 25$?

Zad. G 2
Uzasadnij, że dla liczb naturalnych a i b:
$a \cdot b = b \cdot a$.
Zad. LO 2
Uzasadnij, że cenę zwiększymy o p%, a następnie o q%, to otrzymamy taki sam wynik, jak gdybyśmy najpierw zwiększyli cenę o q%, a następnie o p%.

Taka konstrukcja narzędzia badawczego umożliwiła hipotetyczne rozdzielenie analizowanych rozwiązań pod kątem:

- preferencji któregoś z rozważanych aspektów (poznawczego czy społecznego) widocznych w rozwiązaniach zadań (i komentarzach);
- porównanie preferencji dwóch grup badanych (uczniów i nauczycieli);
- wpływu na te preferencje użytej w zadaniach terminologii inspirującej aktywność uzasadniania.

Narzędzie badawcze wykorzystano w badaniu dwóch grup respondentów:

1. grupa U (182 uczniów) wraz z poleceniem: *Rozwiąż zadania…*
2. grupa N (15 nauczycieli i 116 studentów-przyszłych nauczycieli) wraz z pytaniem *Jak uczeń szkoły … może (powinien) rozwiązać zadania …?*[23]

Wszyscy badani byli proszeni o zapisywanie jak największej liczby komentarzy do swoich rozwiązań. Liczebność grup U i N przedstawiają tabele 6.2.4.7 i 6.2.4.8.

Tabela 6.2.4.6. Liczba osób w grupie badawczej U

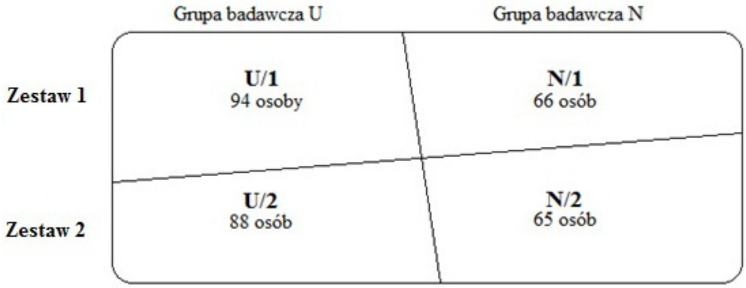
Szkoła Podstawowa				Gimnazjum		Liceum	
Klasa IV		Klasa VI		Klasa II		Klasa II	
Zestaw 1	Zestaw 2	Zestaw 1	Zestaw 2	Zestaw 1	Zestaw 2	Zestaw 1	Zestaw 2
24	22	26	18	20	21	24	27
46		44		41		51	
Łącznie182							

Tabela 6.2.4.7. Liczba osób w grupie badawczej N

Studenci – przyszli nauczyciele				Nauczyciele uczący					
rok III (1 st.)		rok II (2 st.)		Szkoła Podstawowa		Gimnazjum		Liceum	
Zest. 1	Zest. 2	Zest. 1	Zest. 2	Zest. 1	Zest. 2	Zest.1	Zest. 2	Zest. 1	Zest. 2
37	42	22	15	3	3	2	3	2	2
Łącznie 116				Łącznie 15					

[23] Grupę studentów ostatniego roku studiów uprawniających do nauczania na odpowiednim poziomie edukacyjnym traktuję na równi z grupą nauczycieli.

Zilustrujmy te dane na schemacie.



Schemat 5. Liczba osób biorących udział w badaniu N4

Szczegółowe pytania badawcze, na które starałam się odpowiedzieć (poprzez analizę dokumentów otrzymanych w opisywanym badaniu), były następujące:

1. **Który z aspektów (poznawczy czy społeczny) jest wyraźniej akcentowany w danym rozwiązaniu (i komentarzach do tego rozwiązania)?**
2. **Jak wygląda porównanie preferencji w grupach U i N?**
3. **Czy i jakie wystąpiły różnice pomiędzy rozwiązaniami zadań z zestawów 1 i 2 (w kontekście badanych preferencji)?**

Pierwszy krok analizy badawczej rozwiązań polegał na klasyfikowaniu rozwiązań zadań do dwu zbiorów P i S w zależności od zaakcentowanego w rozwiązaniu aspektu (P – poznawczy i S – społeczny). Tę klasyfikację umożliwiły i wydatnie ułatwiły komentarze zapisywane przez rozwiązujących. I tak, jeśli w danym rozwiązaniu zauważalnym celem rozwiązującego było zobrazowanie własnego sposobu myślenia, a zapis był ukierunkowany na komunikację z drugą osobą, na próbę wyjaśnienia jej uzasadnianego stwierdzenia, wówczas takie rozwiązanie traktowałam jako akcentujące aspekt społeczny czynności uzasadniania. Bardzo często fakt społecznego charakteru przedstawianego rozumowania uwidoczniało użycie przykładu. Rozwiązujący np. po rachunkach na liczbach czy symbolach pisali: *żeby to dobrze zrozumieć, zobaczmy przykład*. Można wyciągnąć wniosek, że posługiwanie się przykładem nieprzypadkowo towarzyszy sytuacjom, w których chodzi o matematyczne uzasadnianie, mającym miejsce w jakimś układzie społecznym. Konkretny przykład ma dla uczestników takiego społecznego procesu dużą moc przekonującą, jest istotnym sposobem uzyskiwania społecznej aprobaty faktów matematycznych.

Jeśli dane rozwiązanie było ukierunkowane głównie na poprawność matematyczną, na adekwatne wykorzystanie wiedzy, wówczas interpretowałam to jako przejaw preferowania poznawczego aspektu sytuacji zadaniowej[24].

Częściowej odpowiedzi na pierwsze z pytań badawczych udzieli analiza danych liczbowych zamieszczonych w tabelach 6.2.4.8, 6.2.4.9 i 6.2.4.10.

[24] Oczywiście mam świadomość subiektywności takiego kryterium.

Tabela 6.2.4.8

Szkoła podstawowa							
Klasa IV				Klasa VI			
Zestaw 1		Zestaw 2		Zestaw 1		Zestaw 2	
P	S	P	S	P	S	P	S
7	11	12	5	8	13	13	5
18/24		17/22		21/26		18/18	

Tabela zawiera liczbę analizowanych rozwiązań zadań SP 1 (Zestaw 1) i SP 2 (Zestaw 2) wykonanych przez uczniów szkoły podstawowej poddanych badaniu N4. Ostatni wiersz tabeli pokazuje, ile zapisów uczniowskich (spośród wszystkich uzyskanych) udało się jakoś zaklasyfikować (jako przejawiające któryś z interesujących nas aspektów). Pozostałe prace bądź nie zawierały żadnego rozwiązania, bądź też nie udało mi się uchwycić wyraźnego charakteru dokonanych zapisów. W przedostatnim wierszu tabeli umieściłam liczby rozwiązań zaliczonych przeze mnie do zbioru P – ukazujących aspekt poznawczy i do zbioru S – ukazujących aspekt społeczny.

Dla zilustrowania różnicy pomiędzy rozwiązaniami, stanowiącej dla mnie podstawę klasyfikacji, przyjrzyjmy się następującym przykładowym rozwiązaniom uczniów szkoły podstawowej. Weźmy pod uwagę zadanie SP 1. Zauważmy, że zadanie samo w sobie odwoływało się już do konkretu, nic zatem dziwnego, że uczniowie najczęściej to zadanie rozwiązywali tak:

$25 \cdot 3 = 3 \cdot 25$?

25·3=3·25 - to jest to samo ponieważ działania 25·3 i 3·25 dają ten sam wynik.

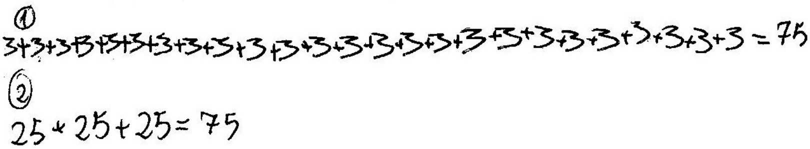
Rys. 44

Uczennica nie odwołuje się tutaj do żadnych zasad natury ogólnej, ogranicza się tylko do obliczenia lewej i prawej strony równości i stwierdza, że jednakowy wynik oznacza, że równość zachodzi. W pracach innych uczniów można było dostrzec już pewne dążenie do akcentowania dowolności i ogólności przykładu – uczeń ilustruje ogólna zasadę używając innego przykładu.

$25 \cdot 3 = 3 \cdot 25$?   Zobacz: 2·5 = 10, i 5·2 = 10

Rys. 45

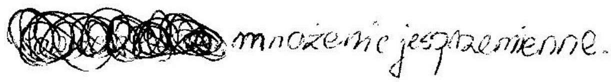
Inne rozwiązanie, w którym widać próbę pokazania, jak powstał wynik obliczeń rachunkowych:



Rys. 46

Analogiczne zadanie z grupy 2 – zadanie SP 2 (różniące się sformułowaniem polecenia) najczęściej było kwitowane przez uczniów (szczególnie klasy VI) wnioskiem: *to wynika z przemienności mnożenia.*

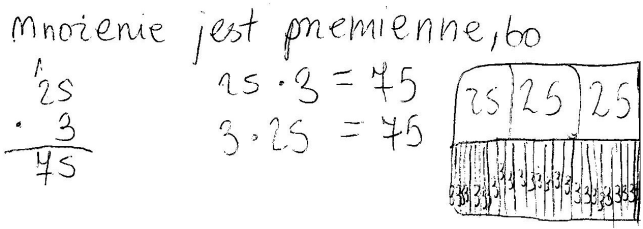
25 · 3 = 3 · 25 ?



Rys. 47

Zobaczmy przykład rozwiązania, w którym uczeń odwołuje się do prawa ogólnego, ale stara się jeszcze jakoś to prawo wyjaśnić i zilustrować. Tego typu rozwiązania traktowałam jako oddające aspekt społeczny uzasadnień matematycznych, gdyż rozwiązujący uczeń sporządził rysunek, chcąc przekonać potencjalnego czytelnika swojego rozwiązania o jego słuszności.

25 · 3 = 3 · 25 ?



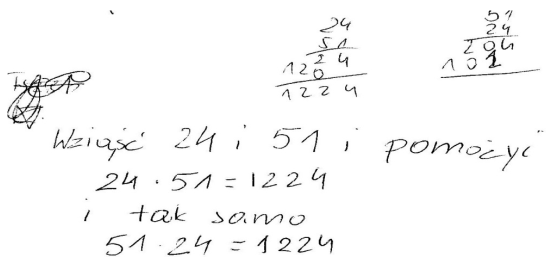
Rys. 48

Przyjrzyjmy się wynikom badania N4 uzyskanym na wyższych etapach edukacyjnych. Kolejna tabela zbudowana jest analogicznie jak poprzednia, a dotyczy III etapu edukacyjnego. Przypomnę tylko, że P oznacza liczbę rozwiązań zakwalifikowanych jako oddające poznawczy aspekt przedstawionego rozwiązania, a S liczbę takich rozwiązań zakwalifikowanych jako przejawiające odniesienia do aspektu społecznego. Ostatni wiersz tabeli zawiera liczby rozwiązań, które udało się przyporządkować w odniesieniu do wszystkich uzyskanych.

Tabela 6.2.4.9

Gimnazjum			
Zestaw 1		Zestaw 2	
P	S	P	S
6	14	8	5
20/20		13/21	

Przypomnijmy, że uczniowie gimnazjum rozwiązywali zadania, w których prawo przemienności sformułowano wprost. Niemal wszystkie osoby w celu uzasadnienia w zadaniu G 1 (Zestaw 1) obrały konkretne liczby a i b. Zobaczmy przykład:



Rys. 49

Komentarze uczniów do tego typu zapisów były następujące:

- *można się przekonać biorąc dwie liczby;*
- *zawsze tak jest, jak się policzy po jednej i drugiej stronie…* itp.

Niektórzy uczniowie podawali więcej niż jeden przykład, co można traktować jako dążenie do akcentowania dowolności wyboru przykładu. Wciąż jednak jest to proste posługiwanie się przykładem.

W przypadku zadania G 2 (Zestaw 2) najczęściej jako uzasadnienie uczniowie podawali następującą argumentację:

- *jest to prawo przemienności mnożenia;*
- *takie coś było w podstawówce;*
- *to wiadomo, nie trzeba uzasadniać.*

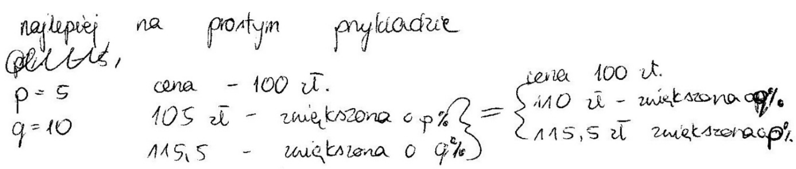
Uzasadnienia pierwszego typu traktowałam jako przejaw społecznego charakteru rozumowania, ukierunkowane były one na komunikację z inna osobą, na próbę przekonania jej. Natomiast komentarze typu drugiego mają w mojej subiektywnej interpretacji charakter poznawczy.

Zobaczmy teraz liczbowy rozkład rozwiązań uczniów liceum dotyczących zadań L 1 (Zestaw 1) i L 2 (Zestaw 2).

Tabela 6.2.4.10

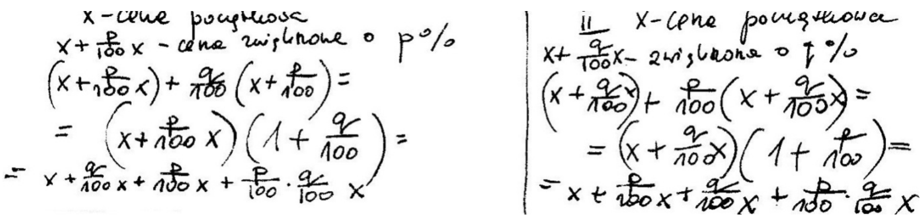
Liceum ogólnokształcące			
Zestaw 1		Zestaw 2	
P	S	P	S
10	7	12	3
17/24		15/27	

Klasyfikując rozwiązania uczniów dało się wyraźnie wyróżnić dwa stosowane przez nich sposoby uzasadniania. Jeden polegał na badaniu konkretnego przykładu, tak jak w poniższym rozwiązaniu:



Rys. 50

Drugi sposób natomiast pokazywał koncentrację ucznia na obliczeniach symbolicznych i polegał na wykazywaniu równości w przypadku dowolnych wielkości procentowych, tak jak w następującym zapisie:



Rys. 51

W obu grupach na tym poziomie edukacji przeważał aspekt poznawczy, a już w szczególności w zadaniu L 2, w którego poleceniu znajdowało się słowo „uzasadnij".

Próbą odpowiedzi na pierwsze z pytań badawczych postawionych w badaniu N4 (*Który z aspektów (poznawczy czy społeczny) jest wyraźniej akcentowany w danym rozwiązaniu?*) niech będzie analiza diagramu 4 zestawiającego dane liczbowe z tabel 6.2.4.8 – 6.2.4.10 obrazującego pewne tendencje wyrażające się poprzez te dane[25].

[25] Dane z tabel umieszczone na diagramie ujęte są procentowo z pełną świadomością faktu nielicznych próbek badanych osób. Jednak takie przedstawienie pozwala na dokonanie pewnych hipotetycznych podsumowań.

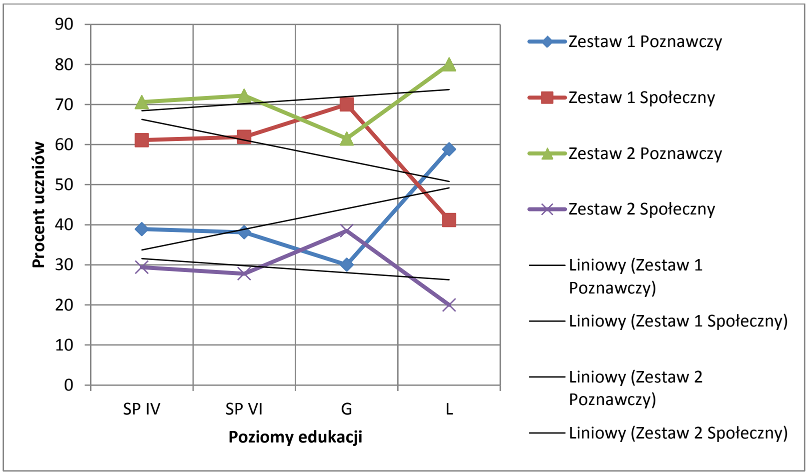


Diagram 4. Rozkład ilościowy zaklasyfikowanych rozwiązań z grup U/1 i U/2

Diagram umożliwia dokonanie pewnych podsumowań przypuszczalnych preferencji aspektów uzasadnień stwierdzeń matematycznych eksponowanych przez badanych uczniów. Komentarza wymaga podobny rozkład ilościowy preferencji uczniów w klasach IV i VI szkoły podstawowej. Uczniowie szkoły podstawowej akcentują w zadaniu SP 1 aspekt społeczny, uzasadniając równość na przykładach, ilustrując ją rysunkami itd. Przy zadaniu SP 2 już jest sytuacja inna, słowo „uzasadnij" pełni rolę nakazującą bardziej matematyczne podejście do zadania.

W przypadku uczniów gimnazjum w obu rozwiązywanych przez nich zadaniach wyraźnie przeważa aspekt społeczny. Możliwe, że jest to spowodowane specyficznym doborem zadań G 1 i G 2, w których brak było dostępnego uczniom narzędzia dla poprawnie matematycznego uzasadnienia danej równości.

Uczniowie liceum natomiast, niezależnie od sformułowania zadania, preferowali aspekt poznawczy uzasadnień matematycznych.

Powyższe obserwacje skłaniają do postawienia następującej hipotezy:

HIPOTEZA NiS 3

Im wyższy etap kształcenia, tym większego znaczenia nabiera dla uczących się aspekt poznawczy w uzasadnianiu stwierdzeń matematycznych. Ten wzrost nie jest jednak radykalny, a aspekt społeczny jest nadal istotny i ukierunkowany na przekonywanie innych osób. Powoduje to używanie przez przekonującego konkretnych przykładów.

Zobaczmy, jak dane liczbowe przedstawiają się w grupie studentów i nauczycieli. Przypomnijmy, że ta grupa badanych rozwiązywała analogiczne zadania jak grupa uczniów, nie proszono ich jednak o własne rozwiązania, a o rozwiązania, które mogliby potencjalnie przedstawić uczniowie.

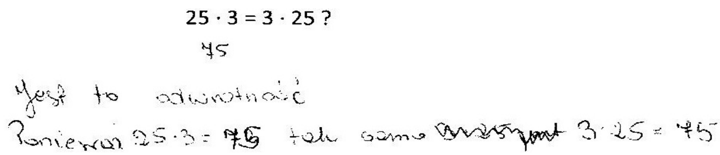
Wyniki liczbowe podam bez podziału rozwiązań na szkołę podstawową, gimnazjum i liceum.

Tabela 6.2.4.11

Studenci rok III (1 st.)			
Zestaw 1		Zestaw 2	
P	S	P	S
98	10	116	4
108/111 (111 = 37 osób × 3 zadania)		120/126 (126 = 42 osoby × 3 zadania)	

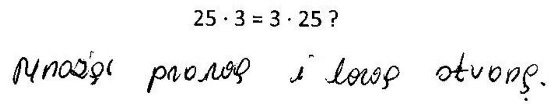
Wśród studentów końcowego roku studiów nauczycielskich, przygotowujących się do nauczania w szkole podstawowej i gimnazjum, przeważa tendencja do akcentowania poznawczego aspektu uzasadniania matematycznego. Zobaczmy przykłady.

Aspekt poznawczy:



Rys. 52

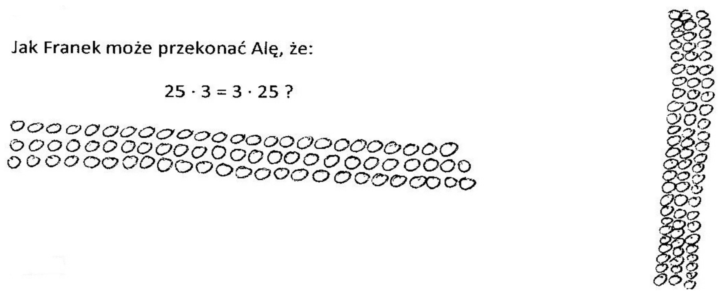
lub



Rys. 53

Dążenie rozwiązujących było następujące: wykonać działanie po lewej i prawej stronie równości i w ten sposób stwierdzić jej poprawność. W tych rozwiązaniach nie widać chęci przekazania czytelnikowi jakiejś ogólności rozumowania. Stwierdza się jedynie matematyczną poprawność wyników działań po prawej i lewej stronie równości.

Społeczny aspekt ujawniany był w nielicznych przypadkach i to jedynie w zadaniach z Zestawu 1. Na przykład:



Rys. 54

W tym rozwiązaniu widać próbę dobrania jakiegoś sposobu argumentacji, który mógłby przekonać inną osobę o prawdziwości równości, nie chodzi tylko o wykazanie poprawności matematycznej.

Zobaczmy dane liczbowe dla studentów przygotowujących się do nauczania w szkołach ponadgimnazjalnych zestawione w tabeli 6.2.4.12.

Tabela 6.2.4.12

Studenci rok II (2 st.)			
Zestaw 1		Zestaw 2	
P	S	P	S
63	2	41	0
65/66 (66 = 22 osoby × 3 zadania)		41/45 (45 = 15 osób × 3 zadania)	

Dane liczbowe pokazują wzrost tendencji studentów studiów 2 stopnia do preferowania poznawczego aspektu uzasadnień matematycznych.

Sytuację w grupie uczących nauczycieli [26] przedstawiają liczby zawarte w tabeli 6.2.4.13.

Tabela 6.2.4.13

Nauczyciele			
Zestaw 1		Zestaw 2	
P	S	P	S
16	5	21	3
21/21 (21 = 7 osób × 3 zadania)		24/24 (24 = 8 osób × 3 zadania)	

Choć aspekt społeczny uzasadnień matematycznych wśród nauczycieli uwidacznia się częściej niż wśród studentów, jednak preferują oni aspekt poznawczy.

[26] Oczywiście grupa badanych nauczycieli nie jest liczna. Wynika to niechęci nauczycieli do poddawania się badaniom tego typu, o czym wspominałam już wcześniej.

Zobaczmy przykłady rozwiązań osób z grupy N.

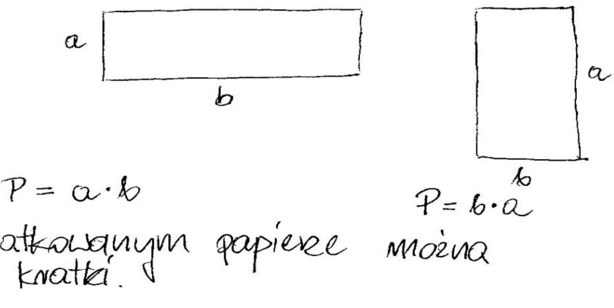
Aspekt poznawczy:

$a \cdot b = b \cdot a$

zawsze bo jest to prawo przemienności

Rys. 55

Aspekt społeczny:



Rys. 56

W przedstawionym rozwiązaniu (rys. 56) widać chęć jego autora do przedstawienia jakiegoś argumentu przekonującego. Nie jest to tylko odwołanie się do posiadanej wcześniej wiedzy. Zobaczmy wykres zbierający przedstawione dane liczbowe (diagram 5, s. 162). Diagram ten ilustruje wyraźną przewagę akcentowania aspektu poznawczego uzasadnień matematycznych. Ta tendencja rośnie przy przejściu z 1 na 2 stopień studiów nauczycielskich, a słabnie w odniesieniu do nauczycieli już uczących.

Układ danych zilustrowany diagramami 4 i 5 pozwala na podsumowanie wyników badania N4 w odpowiedzi na pytania badawcze 2 i 3 opisywanego badania. Wydaje się, że dla uczniów ważny jest aspekt społeczny uzasadniania matematycznego, akcentują go oni częściej niż nauczyciele. Szczególnie wtedy, kiedy polecenie zadania do takiego aspektu się odwołuje poprzez użycie słowa przekonaj (zamiast uzasadnij, czy udowodnij). Dla ucznia ważne jest zatem sformułowanie polecenia w zadaniu. Od tego może on uzależniać swoje podejście do jego rozwiązywania. Prawdopodobnie to sformułowanie polecenia zadania ma większe znaczenie dla ucznia niż dla nauczyciela. Nauczyciel i tak wie (lub jest podświadomie nastawiony), że w zadaniach tego typu chodzi o rozumowanie możliwie najbardziej zbliżone do rozumowania formalnego.

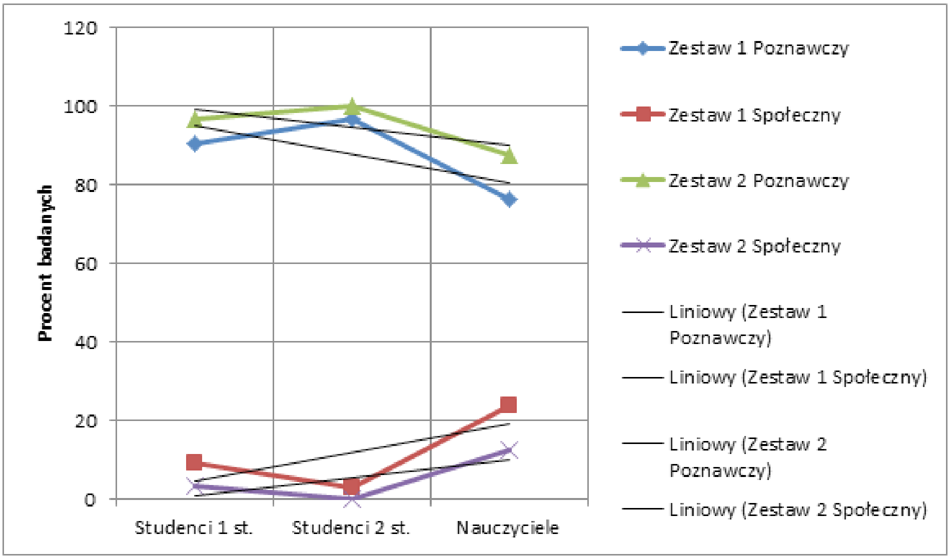


Diagram 5. Rozkład ilościowy zaklasyfikowanych rozwiązań z grup N/1 i N/2

Można stwierdzić, że w wyniku analizy rezultatów badania N4 częściowe potwierdzenie znajdują następujące hipotezy:

HIPOTEZA NiS 4

> Nauczyciele (i przyszli nauczyciele) mają tendencję do formalizacji rozumowań matematycznych, prawdopodobnie przejawiają również to dążenie w nauczaniu.

HIPOTEZA NiS 5

> Nauczyciele być może nie są świadomi (lub tę świadomość ignorują) istnieniai odmienności roli i znaczenia aspektu społecznego i poznawczego uzasadniania stwierdzeń matematycznych.

HIPOTEZA NiS 6

> Współistnienie i odmienność poznawczego i społecznego aspektów dowodów matematycznych jest źródłem trudności uczniowskich, wynikających z rozbieżności dążeń ucznia i oczekiwań nauczyciela.

HIPOTEZA NiS 7

> Terminologia używana w zadaniach ukierunkowanych na uzasadnianie stwierdzeń matematycznych na wpływ na dobieranie przez uczniów sposobów rozwiązywania tych zadań. Może to być przyczyną nieporozumień pomiędzy uczniemi nauczycielem.

Badania N1, N2, N3 i N4 pokazują, że mamy tu do czynienia ze skomplikowanym syndromem zjawisk. Pamiętajmy, że mówimy o wieloaspektowym ukształtowaniu poznawczym i emocjonalnym zarówno uczącego się, jak i nauczającego.

W zjawiskach natury antropomatematycznej ogromną rolę odgrywają nastawienie i przekonania (często nieuświadomione) osób biorących w nich udział. Te przekonania mają wpływ na dokonywanie wyboru (Bishop 1999). W przypadku nauczyciela konsekwencja owego wyboru (np. sposobu inspirowania i organizacji procesów poznawczych uczniów) prawdopodobnie rzutuje na wyniki tych procesów w ich merytorycznym i emocjonalnym kontekście.

Opisane analizy badawcze pokazują, że ustalanie podstaw teoretycznych oraz metodologicznych do badań antropomatematycznych jest trudne, wymaga uwzględnienia wielu czynników, często niewymiernych i nieuświadomionych przez respondentów. Wymaga podejmowania prób nowych podejść badawczych, tworzenia nowych narzędzi i sposobów interpretacji wyników.

Rozdział 7

Wnioski końcowe

Rozważania przedstawione w tej pracy ukazują pewien wycinek badawczych zagadnień dydaktycznych, dotyczących bogatego i skomplikowanego procesu społecznego, jakim jest szkolne nauczanie-uczenie się matematyki. Na tle tych rozważań nasuwają się pewne wnioski, hipotezy i refleksje, mogące być inspiracją do przemyśleń i – być może – konkretnych działań zmierzających do poprawy istniejącego stanu. Wyniki opisanych analiz teoretycznych i badawczych zwracają uwagę na bogactwo zjawisk, z jakimi mamy tu do czynienia. I choć cele, przebieg i rezultaty edukacji matematycznej wciąż są przedmiotem dużego zainteresowania różnych osób i instytucji związanych z edukacją matematyczną, to ciągle wiele pytań pozostaje bez odpowiedzi. Wraz z próbami odpowiedzi na jedne, pojawiają się inne pytania badawcze, niektóre trudne i wręcz nierozstrzygalne, a z drugiej strony ważne, wymagające podejmowania konkretnych działań.

Jednym z szerokich pól badawczych jest kwestia dotarcia do przyczyn tak wielu trudności uczniów związanych z rozumieniem metody matematycznej, w szczególności z uzasadnianiem zdań ogólnych. To zagadnienie interesuje teoretyków i praktyków kształcenia matematycznego od dawna. Jednak choć ciągle podejmowane są nowe próby odpowiedzi na pytania o przyczynę trudności i niepowodzeń uczniów, to nadal brak jednoznacznych i konstruktywnych odpowiedzi. Często przyczyny trudności uczniów upatruje się w brakach w wiedzy i umiejętnościach. Czasem powodu tych trudności szuka się po stronie nauczycieli, krytykując ich metody nauczania. Czasem winą obarcza się zbytnie przeładowanie treści tematycznych w programach nauczania matematyki. Zapewne prawda leży gdzieś pośrodku, a próba kompleksowej diagnozy tego stanu rzeczy wymaga szerokiej i wnikliwej analizy wszystkich czynników mogących mieć na ten stan rzeczy wpływ. Analizy trzeba tu dokonywać z różnych punktów widzenia i z nastawieniem na głębokie zrozumienie złożoności procesu, z którym mamy do czynienia.

Jednym z takich punktów widzenia jest zarysowane w tej książce ujęcie antropomatematyczne. Sugeruje ono:

- Znaczne **rozszerzenie pola analizy procesu nauczania-uczenia się matematyki**. Chodzi o to, by na wyniki ucznia patrzeć nie tylko z punktu widzenia poprawności matematycznej jego postępowania. Proces poznawczy, z jakim mamy tu do czynienia, przebiega w określonym układzie społecznym, którego wpływ musimy uwzględniać;

- Uwzględnienie **wpływu pozamatematycznych sposobów myślenia człowieka** na jego rozumowania przeprowadzane w obrębie działalności matematycznej;
- Odejście od prezentowanego w nauczaniu wizerunku matematyki jako dziedziny nieomylnych prawd absolutnych i **nadanie matematyce charakteru humanistycznej działalności człowieka**. Przy czym, ze względu na specyficzną naturę matematyki i jej złożoną epistemologię, należy z góry założyć, że:
  - przebieg i rezultaty tej działalności mogą być obarczone niedoskonałością i narażone na niepowodzenia,
  - efekty końcowe tej działalności dokonywane przez różne osoby (w obrębie tego samego tematu) mogą być zróżnicowane co do ich zaawansowania matematycznego.

Rozważania przedstawione w całej pracy zakończę czterema wnioskami podsumowującymi.

1. Nie można w nauczaniu fałszować obrazu matematyki i jej metod badawczych, trzeba jednak na nowo rozważyć zagadnienie miejsca metody matematycznej w edukacji.

Matematyka odgrywa istotną rolę we współczesnej nauce i kulturze i podstawowe zrozumienie jej natury przez uczących się powinno być niezbędnym rezultatem wieloletniej edukacji matematycznej. Dla osiągnięcia tego uczniowie powinni zrozumieć istotę myślenia matematycznego i zaznajomić się z kluczowymi ideami matematycznymi. Jeśli tak, to umiejętności związane z uzasadnianiem ogólnych stwierdzeń matematycznych, zgodnie z zasadami nauki, powinny być traktowane jako istotne kompetencje, w jakie chcemy wyposażyć człowieka kończącego naukę szkolną. Nawet cytowany w tej pracy wcześniej G. Polya (który wyrażał stanowisko opozycyjne wobec pewnych form przenikania idei formalizmu do nauczania szkolnego) stwierdził, że

> *Matematyka jest dobrą szkołą rozumowania dedukcyjnego […] Jest pewne (i nie ma potrzeby argumentować tego powszechnego mniemania), że nauczyciel powinien zaznajamiać swoich uczniów z rozumowaniami dedukcyjnymi. Niech się uczą udowadniać* (1975, s. 311).

Jednocześnie pamiętajmy, że głównym celem matematycznej edukacji jest m.in. kształtowanie umiejętności potencjalnie przydatnych w codziennym życiu każdego człowieka, niezależnie od dziedziny jego działalności. Mamy zatem swoisty konflikt systemu rygorów i konwencji uznawania prawdy w matematyce z naturalnymi zasadami racjonalnego działania człowieka. W wyniku tego konfliktu powstaje (nawet na wyższych poziomach nauczania) przekonanie, że dowód matematyczny jest rodzajem sztucznego potwierdzania czynności i myśli konkretnych, które w sposób naturalny pojawiają się w klasie (Balacheff 1982; Vinner 2012). Rozumowań formalnych wymaga nauczyciel, uczniowie nie uznają ich za konieczne w swojej działalności na lekcjach. Jeśli są już przekonani o prawdziwości danego stwierdzenia, wówczas potwierdzanie tego z użyciem aparatu logicznego nie jest dla nich czynnością naturalną. Uczniowie i studenci w związku z tym starają się postępować w sposób racjonalny, tzn. nie podejmują prób dowodzenia, o ile w treści zadania wyraźnie się o to nie prosi.

Pilną potrzebą staje się zmiana wizerunku dowodu matematycznego dyktowana przez intensywnie ewoluujące warunki społeczno-kulturowe. Rygorystyczne traktowanie dowodu (akcentowane przez praktykujących matematyków) w kontekście powszechnej edukacji matematycznej wymaga ponownego przemyślenia. Rozumowania dowodowe stają się wskazane i użyteczne w nauczaniu wtedy, gdy prowadzą do rzeczywistego myślenia matematycznego. Naszym najważniejszym wyzwaniem jest znalezienie bardziej efektywnych sposobów wykorzystania dowodu matematycznego do tego celu. Takie założenie nieuchronnie prowadzi do rozstrzygania kwestii równowagi pomiędzy formalizmem a intuicją, dedukcją a indukcją i empirią, abstrakcją a konkretem. Jest to niezmiernie trudne i za każdym razem wymaga indywidualnych decyzji nauczyciela.

> *[…] możemy żądać od niego [nauczyciela] rozwijania matematycznych intuicji ucznia, przy zachowaniu harmonii między intuicyjnymi i formalnymi elementami metody matematycznej w ujęciu dostępnym uczniowi* (Krygowska 1977, s. 136).

Powinniśmy zatem zadbać o celowe i głębokie przygotowanie studentów-przyszłych nauczycieli do wskazywania uczniom znaczenia i ograniczeń dowodu w matematyce. W matematycznym kształceniu nauczycieli winien się znaleźć cały nurt ukazujący m.in. różne aspekty i funkcje dowodu w matematyce. Wtedy nauczyciel będzie miał odpowiednio ukształtowany całościowy obraz pojęcia dowodu, uzasadniony epistemologią rozwoju tego pojęcia (Hanna 2000), a co za tym idzie, będzie przygotowany do kształtowania takiego obrazu u ucznia. Chodzi o zrewidowanie podejścia dydaktycznego w metodologicznym kształceniu studentów-przyszłych nauczycieli.

Rozpatrywanie współczesnego edukacyjnego podejścia do metodologii matematycznej wymaga rozważenia roli i możliwości, jakie daje wykorzystanie środków technologii informacyjnej w nauczaniu. Decyzja o wykorzystywaniu komputera w nauczaniu matematyki wymaga nowego spojrzenia na rolę przykładów w badaniu matematycznym, zarówno w kontekście stawiania hipotez, jak i ich weryfikowania. Użycie komputera na lekcjach matematyki wiąże się z pozytywnym odbiorem uczniów. Pamiętać jednak musimy o tym, że pojawienie się atrakcyjnych technik oferowanych przez oprogramowanie komputerowe może (w sposób niezamierzony) zaburzać epistemologiczne ujęcie szkolnej matematyki. Mogą się pojawić nieoczekiwane rozbieżności i nieporozumienia w kształtowaniu pojęć i prowadzeniu rozumowań matematycznych. Wynik pracy komputera jest dla ucznia bardzo wiarygodny i łatwo przekonuje go, że badana hipoteza jest prawdziwa. Wzmacnia się również przekonanie, że badanie przypadków szczególnych daje odpowiedzi na pytania ogólne. Takie podejście może osłabić centralną rolę formalnych rozumowań uzasadniających na rzecz stawiania i badania hipotez poprzez konkretne przykłady.

2. Należy wyraźnie uwzględniać zależność obrazu matematyki w umyśle ucznia od obrazu matematyki w umyśle nauczyciela.

W aktualnie publikowanych pracach teoretycznych i badawczych z dydaktyki matematyki (i innych nauk badających uwarunkowania i przebieg procesów edukacyjnych) coraz częściej podkreśla się istotną rolę nauczyciela w tych procesach. Oczywiście nie chodzi tu o stereotypowe, jednostronne i niepoprawne przekonanie o centralnej roli nauczyciela jako „przekaziciela" gotowej wiedzy. Nauczyciel w społecznie traktowanym procesie nauczania-uczenia się matematyki pełni wiele różnych ról (Nowecki 2006; Ma 2010; Żeromska 2012). Każda z nich jest nieodzowna i znacząca. Chcę jednak podkreślić, że oprócz wiedzy, również system przekonań i poglądów nauczyciela (nie zawsze nawet uświadomionych) ma znaczący wpływ na rezultaty prowadzonej przez niego edukacji. Nauczyciel może przekazywać np. swoje negatywne bądź pozytywne nastawienie do jakiegoś tematu, a tego najczęściej nie bierzemy pod uwagę. Z pozoru nauczyciel jest neutralnym ogniwem pomiędzy matematyką a uczniem. Przyjmuje się, że nauczyciel może przyspieszyć i wspomóc proces uczenia się przez ucznia, może go spowolnić lub źle zorganizować, ale efekty procesu (w postaci zasobu wiedzy ucznia) są traktowane tylko w odniesieniu do ich poprawności matematycznej[1]. Patrzymy na te efekty jakby nie powstawały w procesie społecznym, który ma na nie ogromny wpływ. A przede wszystkim zaniedbujemy wiedzę, emocje, nastawienie i przekonania nauczyciela, który oprócz wykształcenia matematycznego, posiada różne doświadczenia, wyobrażenia i poglądy, mogące mieć wpływ na styl jego pracy i pozostawiać trwały ślad w obrazie matematyki w umyśle ucznia.

3. W rozumowaniach uzasadniających rozpatrywanych w społecznym kontekście konkret odgrywa specyficzną i charakterystyczną rolę.

Relacje miedzy empirią a dedukcją są dużo bardziej skomplikowane, niż tylko powszechnie przyjęta nadrzędność dedukcji w stosunku do empirii w zatwierdzaniu prawdziwości zdań ogólnych. Z pozoru wydaje się, że dedukcja potwierdza intuicję i empirię, że to ona stanowi dla uczących się kryterium ostateczne. Jednak bywa i na odwrót. Ilustruje to przykład ucznia liceum ogólnokształcącego rozwiązującego za-

[1] Czasem jeszcze uwzględniamy pilność i aktywność ucznia.

danie 11 z zestawu badawczego Z. Przeprowadził on poprawne dedukcyjne uzasadnienie postawionego przed nim stwierdzenia, ale nie było ono dla niego satysfakcjonujące. Powiedział: *muszę to sobie sprawdzić na przykładzie, żeby się przekonać, że faktycznie tak jest*. To stawia pod znakiem zapytania przypuszczenie o sile przekonującej dowodu formalnego. Uczniowie, być może, myślą tak: matematyka ma praktyczne odzwierciedlenie, więc to jest prawdą, co można potwierdzić praktycznie przykładem. G. Hanna (2000) też zwraca na to uwagę. Opisuje sytuację, kiedy student uwierzył, że suma kątów w trójkącie wynosi 180°, nie dlatego, że mu to udowodniono, ale dopiero wtedy, gdy narysował trójkąt, zmierzył kąty i dodał ich miary. Te przykłady pokazują rozbieżność pomiędzy abstrakcyjnym charakterem matematyki i naturalnym dążeniem ucznia do konkretyzacji.

Opisane w tej pracy przykłady zachowań uczniów potwierdzają silną tendencję do posługiwania się przypadkami szczególnymi w badaniu ogólnych zdań matematycznych (szczególnie w warunkach komunikacji społecznej). Można nawet przypuszczać, że taka skłonność jest w nauczaniu matematyki wręcz rozwijana. Świadczy o tym częsty odruch posługiwania się przykładem liczbowym oraz rysunkiem, zarówno przez nauczyciela, jak i przez ucznia. Zauważmy jednak, że branie przez ucznia pod uwagę dużych liczb, rysowanie nieregularnych figur geometrycznych sygnalizują jego dążenie do akcentowania swoistej dowolności wyboru przykładu konkretnego. Tę tendencję powinniśmy wykorzystywać w nauczaniu.

4. Podejście antropomatematyczne umożliwia nowe spojrzenie na współzależności mające miejsce w procesie nauczania-uczenia się matematyki w naturalnych warunkach w klasie

Perspektywa antropomatematyczna celowo zakłada opisywanie matematyki jako ludzkiej działalności, a nie jako gotowego systemu wiedzy. Nie jest to zatem opis sposobów prawidłowego funkcjonowania samej matematyki. Matematyka w tym ujęciu jest aktywnością natury humanistycznej i społecznej, w której wspólnota wykwalifikowanych specjalistów (matematyków) tworzy pewne wzorce, które powstają na podstawie systematycznych ludzkich prób, na bazie obserwacji, badań i eksperymentów. Wyniki prób są potwierdzane przez zastosowanie systemów określonych aksjomatycznie lub teoretycznie (lub modeli systemów wyabstrahowanych z rzeczywistych obiektów). Obiektami aktów myśli ludzkiej są zatem bądź niezależnie od człowieka funkcjonujące stosunki „matematycznego świata", bądź też wyniki wcześniejszych aktów myśli innych twórców w obrębie matematyki. Dla antropomatematyki nie ma znaczenia, czy obiekty, które bada matematyka, istnieją obiektywnie. W tym ujęciu matematyka jest bowiem sposobem myślenia, który ma swoje narzędzia w postaci abstrakcyjnych, symbolicznych, czasem wręcz formalnych reprezentacji. Jeśli ktoś uczył się matematycznego myślenia – powinien umieć takich narzędzi używać.

7.1. Kierunki dalszych badań

Niezależnie od wytyczenia już wielu kierunków badawczych w badaniach dydaktycznych, tematyka dotycząca miejsca metodologii matematyki w działalności matematyków i w nauczaniu szkolnym (w szczególności z antropomatematycznej perspektywy badawczej) jest stale otwarta dla nowych badań. Mimo rozległości rozważanego spektrum badawczego można wyszczególnić kilka najważniejszych pól wyodrębnionych w dociekaniach opisanych w tej pracy.

Uzupełnienia i dalszego uszczegółowienia wymaga główny kierunek antropomatematycznych badań dydaktycznych związany z szeroko rozumianą metodologią matematyki, a szczególnie z pojęciem dowodu. Ciekawa mogłaby być np. analiza i konfrontacja wyobrażeń studentów-przyszłych nauczycieli na temat rozumienia przez nich dowodu jako pojęcia metamatematycznego i dowodu jako procedury o ustalonym porządku. Ten temat wydaje się być jeszcze mało rozpoznany (Dreyfus 1990), a powinien mieć duży wpływ na kształcenie przyszłych nauczycieli matematyki. Odpowiednio wsparci badaniami, matematycy kształcący nauczycieli mogliby pomóc im w rozwoju koncepcji dowodu i pokazać, że można tę koncepcję stosować na wszystkich poziomach edukacji (Stylianides i in. 2004).

Podobnie ciekawe wyniki mogłyby dać badania dotyczące roli języka matematycznego w rozumieniu idei dowodów, zgodnie z poglądem W. Dunhama (1994) o relacji pomiędzy długością dowodu a „ilością stron matematyki", którą wcześniej należy przestudiować, aby ten dowód móc przeprowadzić bądź zrozumieć.

Interesujący wydaje się być też kierunek badawczy związany z obalaniem przez uczniów i studentów hipotez matematycznych przez budowanie kontrprzykładów. Ważna byłaby konfrontacja wyników takich badań z teoretycznymi założeniami N. Balacheffa (1990) oraz wynikami uzyskanymi przez P.L. Galbraitha (1981).

Zajmujący może się okazać nurt teoretyczno-badawczy ukierunkowany na próbę systematycznego scharakteryzowania myślenia matematycznego przez pryzmat antropomatematyki, ze szczególnym uwzględnieniem jego relacji do codziennego, realnego życia. Taka charakterystyka mogłaby przybliżyć nas do precyzyjnego określenia potencjalnych rezultatów wieloletniej edukacji matematycznej w kontekście jej powszechności.

Kolejnym bogatym nurtem badawczym może być diagnoza wiedzy, opinii i przekonań nauczycieli matematyki (na różnych etapach edukacji) na temat roli, sensu i możliwości wprowadzania uczniów w metodę matematyczną. Jeszcze bardziej interesująca może być konfrontacja deklaracji nauczycieli z konkretnie podejmowanymi przez nich zabiegami dydaktycznymi.

Przede wszystkim zaś wielu badań i rozważań wymaga rozwijanie antropomatematyki jako nurtu badawczego, krystalizowanie jej pól i płaszczyzn badawczych związanych z funkcjonowaniem Szkolnego Układu Antropomatematycznego (SUA) i ugruntowywanie ich w dorobku światowym zgodnie z zasadą komplementarności badań dydaktycznych.

Aneks

Zadania uzupełniające do badań R, D i NiS

Zadanie „przekątne wielokąta” – wersja A

a) *Narysuj wielokąt. Narysuj tak wiele nieprzecinających się przekątnych tego wielokąta, ile potrafisz. Ile ich jest?*

b) *Narysowano kilka wielokątów. Z obserwacji wynika, że „maksymalna liczba nieprzecinających się przekątnych wielokąta jest o trzy mniejsza od liczby boków”. Czy to stwierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich wielokątów? Swoją odpowiedź uzasadnij.*

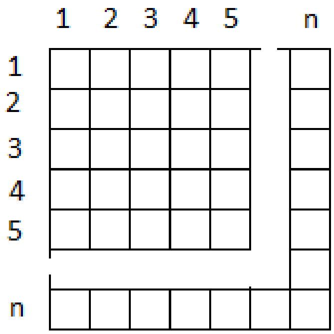
Zadanie „przekątne wielokąta” – wersja B

Tabelka przedstawia zależność między liczbą x boków wielokąta a liczbą jego przekątnych. Uzupełnij ją:

x	3	4	5	
liczba przekątnych	0	2		14

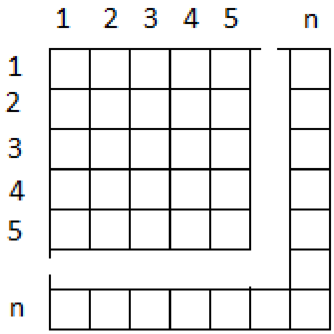
Zadanie „liczba kwadratów” - wersja A

Czy liczbę możliwych do zauważenia różnych kwadratów na następującym rysunku kwadratu o wymiarach n na n można obliczyć stosując następujący wzór: $1^2 + 2^2 + \ldots + (n\text{-}1)^2 + n^2$?



Zadanie „liczba kwadratów” – wersja B

Ile różnych kwadratów można zauważyć na następującym rysunku kwadratu o wymiarach n na n, jeśli n = 60?



Zadanie – „równoległobok”

Narysuj dowolny czworokąt i połącz środki jego boków. Czy nowo powstały czworokąt jest równoległobokiem?

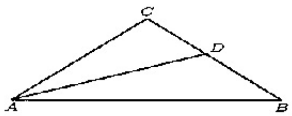
Narzędzia badawcze użyte w badaniu N3

Arkusz 1

Przeczytaj poniższe twierdzenie i przeanalizuj jego dowód, a następnie odpowiedz na pytania poniżej.

Twierdzenie
Jeżeli AD jest dwusieczną kąta BAC w trójkącie ABC, to $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$.

<u>Dowód:</u>
Niech:
S_1 – pole trójkąta ABD,
S_2 – pole trójkąta ADC,
E – rzut prostokątny punktu D na prostą AB,
F – rzut prostokątny punktu D na prostą AC.



Zauważmy, że $|DE| = |DF|$, ponieważ D leży na dwusiecznej kąta BAC.
Stąd

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}|AB||DE|}{\frac{1}{2}|AC||DF|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Ponadto trójkąty ABD i ADC mają tę samą wysokość.
Stąd

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}|AD||BD|}{\frac{1}{2}|AD||CD|} = \frac{|BD|}{|CD|}.$$

Zatem

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

1. Czy dowód twierdzenia uznajesz za poprawny? Odpowiedź uzasadnij.
....
....
....
....
....
....
....

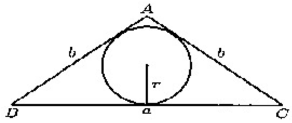
2. Czy twierdzenie oceniasz jako prawdziwe? Odpowiedz uzasadnij.
....
....
....
....
....
....
....

Arkusz 2

Przeczytaj poniższe twierdzenie i przeanalizuj jego dowód, a następnie odpowiedz na pytania poniżej.

Twierdzenie
Jeżeli suma wysokości trójkąta jest 9 razy większa od długości promienia okręgu wpisanego, to trójkąt ten jest równoboczny.

Dowód:
Przyjmijmy oznaczenia tak jak na rysunku oraz niech h_a – wysokość trójkąta opuszczona odpowiednio na bok a, h_b – wysokość trójkąta opuszczona odpowiednio na bok b, h_c – wysokość trójkąta opuszczona odpowiednio na bok c.



Prawdą jest, że $h_a + h_b + h_c = 9r$.
Niech P – pole trójkąta ABC.
Mamy $P = p \cdot r$, gdzie p – połowa obwodu trójkąta ABC ($p = \frac{a+b+c}{2}$).
Ponadto $\frac{1}{2}ah_a = pr$, $\frac{1}{2}bh_b = pr$, $\frac{1}{2}ch_c = pr$.
Stąd $h_a = \frac{2pr}{a}$, $h_b = \frac{2pr}{b}$, $h_c = \frac{2pr}{c}$.
Oraz $\frac{2pr}{a} + \frac{2pr}{b} + \frac{2pr}{c} = 9$,
$(a + b + c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) = 9$,
$1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 = 9$,
$(\frac{a}{b} - 2 + \frac{b}{a}) + (\frac{a}{c} - 2 + \frac{c}{a}) + (\frac{b}{c} - 2 + \frac{c}{b}) = 0$,
$\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(a-c)^2}{ac} + \frac{(b-c)^2}{cb} = 0$.

Z ostatniej równości wynika, że $a = b = c$.

1. Czy dowód twierdzenia uznajesz za poprawny? Odpowiedź uzasadnij.

2. Czy twierdzenie oceniasz jako prawdziwe? Odpowiedź uzasadnij.

Arkusz 3

Twierdzę, że $2 \cdot 2 = 5$ i zaraz Wam to udowodnię!

Każdy się ze mną zgodzi, że:

$$16 - 36 = 25 - 45 \;/ + (-\tfrac{9}{2})^2,$$

$$16 - 36 + (-\tfrac{9}{2})^2 = 25 - 45 + (-\tfrac{9}{2})^2.$$

Teraz będę korzystać ze wzoru skróconego mnożenia $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$.

$4^2 + 2 \cdot 4 \cdot (-\frac{9}{2}) + (-\frac{9}{2})^2 = 25 + 2 \cdot 5 \cdot (-\frac{9}{2}) + (-\frac{9}{2})^2$,
$(4 - \frac{9}{2})^2 = (5 - \frac{9}{2})^2$,
$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2} \;/ + \frac{9}{2}$,
$2 \cdot 2 = 5$.

I co Ty na to? Odpowiedź uzasadnij.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Literatura

Adler J., Davis Z., 2006, Opening another black box: Researching mathematics for teaching in mathematics teacher education*, Journal for Research in Mathematics Education* 4, Vol. 37, 270–296.

Aigner M., Ziegler M.G., 2002, Dowody z Księgi, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Artique M., Batanero C., Kent Ph., 2007, Mathematics teaching and learning at post-secondary level, [in:] Lester, F.J. (ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, Reston, VA: NCTM, 1011–1050.

Balacheff N. i in., 1993, Na czym polegają badania w dydaktyce matematyki i jakie są ich wyniki? (Materiały do dyskusji), *Dydaktyka Matematyki,* 15, 117–124.

Balacheff N., 1987, Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 18, No. 2, 147–177.

Balacheff N., 1990, A study of students' proving processes at junior high school level, [in:] Wirszup I., Streit R. (eds.), *Developments in school mathematics education around the world*, Chicago: NCTM, 284–297.

Balacheff N., 1999, Is argumentation an obstacle?, *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof* (dokument elektroniczny).

Bańko M. (red.), 2000, *Inny słownik języka polskiego PWN*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Bell A.W., 1976, A Study of Pupils' Proof-Explanations in Mathematical Situations, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 7, No 1/2, 23–40.

Bergeson T. et al., 2000, *Teaching and Learning Mathematics*, State Superintendent of Public Instruction, Washington (dokument elektroniczny).

Białynicki-Birula A., 2006, Po co matematykowi nieskończoność?, *Delta* 05/07.

Biehler R., Scholz R.W., Straesser R., Winkelmann B., 1994, *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Kluwer, Academic Publishers Dordrecht.

Bishop A.J., 1988, *Mathematical enculturation*, Kluwer Academic, Boston.

Bishop A.J., 1999, Mathematics teaching and values education – an intersection in need of research, *Zenterblatt fűr Didaktik der Mathematik 1, Fachinformationszentrum*, Karlsruhe, 1–5.

Brousseau G., 1990, Le contrat didactique, le milieu*, Recherches en didactique des mathematiques,* 9(3), 309–336.

Brousseau G., 1986, Fondements at methodes de la didactique des mathematiques, *Recherches en didactique des mathematiques,* 7(2), 33–115.

Brown S.I., 1995, Philosophy of mathematics education: POM(E), PO(ME) or POE(M)?, *Philosophy of Mathematical Education Newsletter,* No. 8 (may), 16–18 (dokument elektroniczny).

Brown T., 2008, Signifying "learner", "teacher" and "mathematics": A response to a special issue, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 69, No 3, 249–263.

Callejo M.L., Vila A., 2009, Approach to mathematical problem-solving and students' belief systems, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 72, 111–126.

Chevallard Y., 1992, Fundamental concepts in didactics. Perspectives provided by an anthropological approach, [in:] Douady R., Mercier A. (eds.), *Research in didactique of mathematics. Selected papers, special issue of Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, 131–167.

Chmielewski A., 2009, Dynamiczna architektonika matematyki, [w:] Konik R. (red.), *Matematyka, filozofia, sztuka*, Oficyna Wydawnicza Atut, Wrocław, 4–15.

Choquet J., 1967, *L' enseignement de la géométrie,* Hermann, Paris.

Ciesielska D., Edigarian A., Kordyka A., Witecka B., 2003, *Słownik szkolny matematyka*, Wydawnictwo Zielona Sowa, Kraków.

Ciosek M., 1995, O roli przykładów w badaniu matematycznym, *Dydaktyka Matematyki,* 17, 5–85.

Ciosek M., 2005, *Proces rozwiązywania zadania na różnych poziomach wiedzy i doświadczenia matematycznego*, Wydawnictwo Naukowe AP, Kraków.

Ciosek M., Turnau S., 2004, Which aims of mathematics teaching should be kept as fundamental and universally important?, [in:] Giménez J., FitzSimons G.E., Hahn C. (eds.), *A challenge for mathematics education: To reconcile commonalities and difference*, Graŏ, Vilanova, Spain, 161–165.

Ciosek M., 1992, Błędy popełniane przez uczących się matematyki i ich hipotetyczne przyczyny, *Dydaktyka Matematyki,* 13, 65–161.

Cobb R.B., Bauersfeld H., 1995, (eds.), *The emergence of mathematical meaning. Interaction in classroom cultures*, Hillsdale, NJ.: Erlbaum.

Cobb R.B., McMeeking L.B., Orsi R., 2012, Effects of a teacher professional development program on the mathematics achievement of middle school students, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 43, No. 2, 159–181.

Cocburn A.D., 2012, "To generalize, or not to generalize, that is the question", [in:] Maj-Tatsis B., Tatsis K. (eds.), *Generalization in mathematics at all educational levels*, Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów, 299–312.

Czajkowska M., 2002, Emocjonalno-motywacyjne zachowania uczniów wobec zadań matematycznych, *Studia Matematyczne Akademii Świętokrzyskiej*, T. 9, 71–95.

Davis P.J., Hersh R., 1994, *Świat matematyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Dreyfus T., 1990, Advanced mathematical thinking, [in:] Nesher P., Kilpatrick J., (eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the*

Psychology of Mathematics Education, Cambridge University Press, Cambridge, 113–134.

Duda R., 1989, Ewolucja matematyki i jej nauczanie, *Dydaktyka Matematyki,* 11, 37–62.

Duda R., 1995, Przeszkody epistemologiczne w matematyce, *Zagadnienia filozoficzne w nauce,* XVII, 35–48 (dokument elektroniczny).

Dunham W., 1994, *Matematyczny wszechświat*, Wydawnictwo Zysk i S-ka, Poznań.

Ernest P. Ed., 1994 (ed.), *Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective*, London: Palmer Press.

Euler L., 1911, *Opera Omnia*, ser. I, obj. 4, s. 120–124.

Fischbein E., 1982, Intuition and proof, *For the Learning of Mathematics,* 3(2), 9–24.

Freudenthal H., 1981, Major problems of mathematical education, *Educational Studies in Mathematics,* 12, 133–150.

Freudenthal H., 1989, Błędy nauczyciela – analiza dydaktyczna samego siebie, *Dydaktyka Matematyki,* 11, 109–115.

Galbraith P.L., 1981, Aspects of proving: A clinical investigation of process, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 1–28.

Glasersfeld E. von, 1990, An exposition of constructivism: Why some like it radical, [in:] Davis R.B., Maher C.A., Noddings N. (eds.), *Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics*, Reston, VA: NCTM, 19–29.

Godino J.D., Batanero C., 1998, Clarifying the meaning of mathematical object as a priority area of research in mathematics education, [in:] Sierpińska A., Kilpatrick J. (eds.), *Mathematics as a Research Domain: A Search for Identity*, An ICMI Study, Book 2, Kluwer Academic Publishers, 177–195.

Hanna G. and Jahnke H.N., 1996, Proof and proving, [in:] Bishop A., Clements K., Keitel C., Kilpatrick J., Laborde C. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 877–908.

Hanna G., 1989, More than formal proof, *For the Learning of Mathematics*, 9(1), 20–23.

Hanna G., 2000, Proof, explanation and exploration: an overview, *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5–25.

Hannula M.S., 2006, Motivation in mathematics: Goals reflected in emotions, *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 63, No 2, 165–178.

Hannula M.S., 2011, The structure and dynamics of affect in mathematical thinking and learning, *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Rzeszów, 34–61 (dokument elektroniczny).

Härtig K., 1987, O dowodach i dowodzeniu w nauczaniu matematyki. Kilka tez i przykładów, *Dydaktyka Matematyki,* 7, 77–94.

Hejný M., 1992, Analysis of student's solutions of the equations $x^2=a^2$ and $x^2-a^2=0$, *Acta Didactica Universitatis Comenianae*, Comenius University, Bratislava, 65–82.

Hejný M., 2008, Scheme – oriented educational strategy in mathematics, [in:] Maj B., Pytlak M., Swoboda E. (eds.) *Supporting Independent Thinking Through Mathematical Education,* Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów, 40–48.

Hejný M., Kuřina F., 2001, *Dítě, škola a matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování*, Portál, s. r. o., Praha.

Hejný M., Stehliková N., 1999, Číselné představy dětí, Kapitoly z didaktiky matematiky, Univerzita Karlova v Praze, *Pedagogická fakulta*, Praha.

Heller M., 2001, Co to jest matematyka?, *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce,* XXVIII–XXIX (dokument elektroniczny).

Hemmi K., 2010, Three styles characterizing mathematicians' pedagogical perspectives on proof, *Educational Studies in Mathematics,* 75, 271–291.

Hersh R., 1993, Proving is convincing and explaining, *Educational Studies in Mathematics*, 24, 389–400.

Holly R., 1976, Psychologiczna koncepcja postaw w teorii i w badaniach eksperymentalnych, *Przegląd Psychologiczny*, t. XIX, nr 1, 57–70.

Howe R., 1999, Znajomość i nauczanie matematyki elementarnej, *Dydaktyka Matematyki,* 21, 97–109.

Kilpatrick J., 1992, A history of research in mathematics education, [in:] Grouws D.A. (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, New York, MacMilan, 3–38.

Klakla M., Klakla M., Nawrocki J., Nowecki J.B., 1992, Pewna koncepcja badania rozumienia pojęć matematycznych i jej weryfikacja na przykładzie kwantyfikatorów, *Dydaktyka Matematyki,* 13, 181–223.

Kolar V.M., Slapar M., Hodnik Čadež T., 2012, Comparison of competences in inductive reasoning between primary teacher students and mathematics teacher students, [in:] Maj-Tatsis B., Tatsis K. (eds.) *Generalization in mathematics at all educational levels*, Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów, 299–312.

Konior J., 1998, Dydaktyka matematyki i jej metodologia w rozwoju (wybrane zagadnienia), *Dydaktyka Matematyki,* 20, 49–71.

Kratochvílowá J., Swoboda E., 2002, Analiza interakcji zachodzących podczas badań z dydaktyki matematyki*, Dydaktyka Matematyki,* 24, 7–39.

Krygowska A.Z., 1950, O metodzie czynnościowej w nauczaniu matematyki w klasach VI i VII szkoły podstawowej, *Matematyka,* 3, 21–27.

Krygowska A.Z., 1957, Metodologiczne i psychologiczne podstawy metody czynnościowej w nauczaniu matematyki, [w:] *Dziesięciolecie Wyższej Szkoły Pedagogicznej1946–1956. Zbiór rozpraw i artykułów,* Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków, 449–465.

Krygowska A.Z., 1958, Matematyka współczesna i nauczanie w świetle dyskusji na zachodzie Europy, [w:] Siwek H., Treliński G. (red.), *Modernizacja kształcenia matem-*

atycznego i jej wpływ na rozwój dydaktyki matematyki, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

Krygowska A.Z., 1977, *Zarys dydaktyki matematyki*, t. 1–3, WSiP, Warszawa.

Krygowska A.Z., 1981, *Koncepcje powszechnego matematycznego kształcenia w reformach programów szkolnych z lat 1960–1980*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

Krygowska A.Z., 1982, Główne problemy i kierunki badań współczesnej dydaktyki matematyki, *Dydaktyka Matematyki,* 1, 7–60.

Krygowska A.Z., 1986, Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich, *Dydaktyka Matematyki,* 6, 25–41.

Kuřina F., 1999, Jak uczynić myśl widzialną?, *Dydaktyka Matematyki,* 20, 73–89.

Lakatos I., 1995, *Pisma z filozofii nauk empirycznych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Lambert K., Urlich W., 1980, *The nature of argument*, New York.

Legutko M., Turnau S., 1989, Nauczania matematyki a nauczanie teorii matematycznej, *Dydaktyka Matematyki,* 11, 9–39.

Lerman S., 2001, Cultural, Discursive Psychology: A Sociocultural Approach to Studying the Teaching and Learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics Education*, Vol. 46, No 1–3, 87–113.

Leron U., Hazzan O., 1997, The World According to Johnny: A Coping Perspective in Mathematics Education, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 32, No. 3 (March), 265–292.

Levenson E., Barkai R., 2013, (w druku) Mathematical activities for children ages 3–8 year old: the case of Israeli curriculum, [in:] *Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8)* Side-Antalya, Turkey, 6–10 February 2013.

Łobocki M., 2000, *Metody i techniki badań pedagogicznych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Ma X., 2001, Participation in Advanced Mathematics: Do expectation and influence of students, peers, teachers and parents matter?, *Contemporary Educational Psychology,* 26; 132–146.

Mason J., 1998, *Learning and Doing Mathematics,* Macmillan, London (dokument elektroniczny).

Mason J., 2005, *Matematyczne myślenie*, WSiP, Warszawa.

Mason J., Ruffell M., Allen B., 1998, Studying attitude to mathematics, *Educational Studies in Mathematics,* 1, 1–18.

McLeod D.B., 1992, Research on affect in mathematics education: A reconceptualization, [in:] Grows D.A. (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* Macmillan, New York, 575–596.

Moore R.C., 1994, Making the transition to formal proof, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 27, 249–266.

Mostowski A., 1948, *Logika matematyczna*, Wrocław.

Mura R., 1993, Images of Mathematics held by University Teachers of Mathematical Science, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 25, No 4, 375–385.

Mura R., 1995, Images of Mathematics held by University Teachers of Mathematics Education, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 28, No 4, 385–399.

Murawski R., 1986, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Adama Mickiewicza, Poznań.

Nęcka E., Orzechowski J., Szymura B., 2006, *Psychologia poznawcza*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Niemierko B., 1994, Diagnostyka edukacyjna, [in.:] Niemierko B. (red.), *Diagnostyka edukacyjna*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk.

Niss M., 1996, Goals of Mathematics Teaching, [in:] Bishop A.J. (eds.), *The International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic, Dordrecht, Vol. 1, 11–47.

Nowecki B.J., 1978, *Badania nad efektywnością kształtowania pojęć twierdzenia i dedukcji u uczniów klas licealnych w zmodernizowanym nauczaniu matematyki*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

Nowecki B.J., 1999, Dydaktyka matematyki – od praktycznego przygotowania nauczyciela matematyki do samodzielnej specjalności naukowej, *Dydaktyka Matematyki,* 21, 51–63.

Otte M., 1994, Mathematical Knowledge and the Problem of Proof, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 26, No 4, 299–323.

Papy G., 1962, *Géometrie affine et nombres réels*, Presses Universitaires de Bruxelles.

Pawlik B., 2005, Fałszywe przekonania dotyczące przekształceń geometrycznych na płaszczyźnie w rozumowaniach studentów matematyki, *Dydaktyka Matematyki,* 28, 365–376.

Piaget J., 1955, Les structures mathématiques et les structures opératoires de l'inteligence, [in:] *L' eneignement des mathématiques*, Delachaux, Niestlé.

Pieprzyk H., Żeromska A.K., 2009, Diagnoza wiedzy uczniów szkół ponadgimnazjalnych i studentów matematyki na temat związku twierdzenia z jego dowodem, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis 65, Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia II*, 183–211.

Pogorzelski W.A., Słupecki J., 1970, *O dowodzie matematycznym*, PZWS, Warszawa.

Polya G., 2009, *Patterns of plausible inference*, Ishi Press, New York, Tokyo.

Polya G., 1964, *Jak to rozwiązać?*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Polya G., 1975, *Odkrycie matematyczne*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.

Prus-Wiśniowska E., 1995, Dowód matematyczny i jego rola w dydaktyce matematyki: przegląd literatury współczesnej, *Dydaktyka Matematyki,* 17, 167–186.

Radford L., 2006, The anthropology of meaning, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 61, No. 1–2, 39–65.

Rasiowa H., 1968, *Wstęp do matematyki współczesnej*, PWN, Warszawa.

Sajka M., 2006, Refleksje na temat określania wiedzy przedmiotowej nauczycieli matematyki, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis 36, Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* I, 297–319.

Sajko M., 2004 (red.), *Ilustrowana encyklopedia PWN*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Schoenfeld A., 1985, *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, INC.

Schoenfeld A., 1989, Exploration of students' mathematical beliefs and behavior, *Journal for Research in Mathematics Education,* 20, 338–355.

Schoenfeld A., 1991, On pure and applied research in mathematics education, *Journal of Mathematics Behaviour*, 10, 263–276.

Schoenfeld A., 1992, Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics, [in:] Grouws D. (ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, MacMillan, New York, 334–370.

Sekerák J., Šveda D., 2008, Is mathematics teaching developing learner's key competences?, *The Teaching of Mathematics*, Vol. XI, 1, 41–52.

Semadeni Z., 1984, Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher taining, *For the Learning of Mathematics,* 4, No. l, 32–34.

Semadeni Z., 2004, Kategorie myśli w historii matematyki i w dydaktyce matematyki, *Dydaktyka Matematyki,* 27, 193–212.

Sfard A., 1994, Reification as the birth of metaphor, *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 44–55.

Shulman L., 1986, *Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching* (dokument elektroniczny).

Sierpińska A., 1990, Propozycja pewnej sytuacji dydaktycznej w zakresie nauczania początków analizy matematycznej, *Dydaktyka Matematyki,* 12, 143–193.

Sierpińska A., 2009, *Perspektywa instytucjonalna w dydaktyce matematyki*, Kraków (dokument elektroniczny).

Sierpińska A., Kilpatrick J., 1998, Continuing the Search, [in:] Sierpińska A., Kilpatrick J. (eds.), *Mathematics as a Research Domain: A Search for Identity*, An ICMI Study, Book 2, Kluwer Academic Publishers, 527–549.

Siwek H., 2005, *Dydaktyka matematyki: teoria i zastosowania w matematyce szkolnej,* WSiP, Warszawa.

Sobol E., 2005, (oprac.), *Słownik języka polskiego PWN*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Sowder J., 1989 (ed.), *Setting a research agenda*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Steen L., 1999, Review of mathematics education as research domain, *Journal for Research in Mathematics Education,* 30(2), 235–241.

Steffe L.P., Gale J., 1995, *Constructivism in Education,* Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ.

Steinbring H., 2005, *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction*, Mathematics Education Library, Springer, New York.

Steiner H.G., 1985, Theory of mathematics education: an introduction, *For the Learning of Mathematics,* 5(2), 11–17.

Stevens R., 2000, Who counts what is math: Emergent and assigned mathematical problems in a project-based classroom, [in:] Boaler J. (ed.), *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning,* Westport, CT, Ablex Publishing.

Stylianides A.J., Stylianides G.J., 2009, Facilitating the Transmision from Empirical Arguments to Proof, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 40, No 3, 314–352.

Stylianides A.J., Stylianides G.J., Philippou G.N., 2004, Undergraduate students' understanding of the contraposition equivalence rule in symbolic and verbal contexts, *Educational Studies in Mathematics,* 55, 133–162.

Such J., 1969, *Wstęp do metodologii ogólnej nauk*, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza, Poznań.

Such J., 1987, *Klasyfikacja nauk,* [w:] Cackowski Z. i in. (red.), *Filozofia a nauka. Zarys encyklopedyczny*, Ossolineum, Wrocław, 297–305.

Szurek M., 2006, *O nauczaniu matematyki. Wykłady dla nauczycieli i studentów*, t. 8, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk.

Tarski A., 1994, *Wprowadzenie do logiki i do metodologii nauk dedukcyjnych*, Filia Uniwersytetu Warszawskiego [dostęp: tarski.calculemus.org/tarski.pdf].

Tarski A., 1995, *Pisma logiczno-filozoficzne*, t. 1: *Prawda*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Thurston W.P., 1994, On proof and progress in mathematics, *Bulletin of the American Mathematical Society,* 30(2), 161–177.

Tocki J., 2000, *Struktura procesu kształcenia matematycznego*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej, Rzeszów.

Tsamir P., Tirosh D., 2010, *Defining and proving with teachers: from preschool to secondary school*, [in:] Maj B., Swoboda E., Tatsis K. (eds.), *Motivation via natural differentiation in mathematics,* Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów.

Tsamir P., Tirosh D., Levenson E., 2008, Intuitive nonexamples: The case of triangels, *Educational Studies in Mathematics*, 69, 81–95.

Turnau S., 1984, *Logiczny wstęp do matematyki*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

Turnau S., 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Turnau S., 2001, O dowodzeniu twierdzeń we współczesnej szkole, *Dydaktyka Matematyki,* 23, 24–33.

Turnau S., 2011, Pick i jego wzór, *Matematyka w Szkole,* 62, 26–27.

Villiers M. de, 1999, *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad,* Key Curriculum Press, Emeryville, CA.

Vinner S., 2012, Generalizations in everyday thought processes and in mathematical context, [in:] Maj-Tatsis B., Tatsis K. (eds.) *Generalization in mathematics at all educational levels,* Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów, 22–38.

Wittmann E., 1993, Dydaktyka matematyki jako „design science", *Dydaktyka Matematyki,* 15, 103–116.

Wójtowicz K., 2007, Dowód matematyczny z punktu widzenia formalizmu matematycznego, cz. I, *Roczniki Filozoficzne,* T. LV, nr 2 (dokument elektroniczny).

Woleński J., 1984, Metamatematyka i filozofia, *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce,* VI, 5–17 (dokument elektroniczny).

Żeromska A.K., 1998, Postawy uczniów klas ósmych wobec wybranych zadań matematycznych, *Dydaktyka Matematyki,* 20, 89–112.

Żeromska A.K., 2001, *Wybrane cele nauczania matematyki a proces rozwiązywania zadań*, niepublikowana rozprawa doktorska, AP Kraków.

Żeromska A.K., 2003, Selected aims of teaching mathematics and the problem-solving process, *Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis 16*, *Studia Mathematica* III, 299–305.

Żeromska A.K., 2004, O kategorii pojęciowej „postawa" na przykładzie „postawy wobec zadań matematycznych", *Dydaktyka Matematyki*, 26, 197–253.

Żeromska A.K., 2009a, Rola nauczyciela w kształtowaniu „postawy ucznia wobec matematyki", *Zeszyty Naukowe PWSZ w Płocku, Pedagogika,* 8: Kształcenie pedagogów –strategie, koncepcje, idee „Język – komunikacja – etyczność – twórczość", cz. I, s. 241–247.

Żeromska A.K., 2009b, Uczniowska wizja matematyki szkolnej – fragment badań dotyczących antropomatematycznych aspektów uczenia się i nauczania, *Didactica Mathematicae,* 32, 175–192.

Żeromska A.K., 2010a, *Dydaktyka matematyki na tle nauk o edukacji*, [w:] Kąkol H. (red.), *Współczesne problemy nauczania matematyki*, Koło SNM Forum Dydaktyków Matematyki, 21–30.

Żeromska A.K., 2010b, *Aksjologiczne konteksty edukacji matematycznej*, [w:] Kamińska-Juckiewicz M., Tomaszewska L. (red.), *Demokratyczne ścieżki edukacji*, Wydawnictwo PWSZ, Płock, 179–185.

Spis treści

Uniwersytet Pedagogiczny
im. Komisji Edukacji Narodowej
w Krakowie

Prace Monograficzne nr 666

ISBN 0239-6025
ISBN 978-83-7271-823-5