

Wiktor Hudy, Kazimierz Jaracz

Przegląd modeli matematycznych maszyny indukcyjnej*

Na obecnym etapie rozwoju techniki napędowej duże zastosowanie w elektrycznych układach elektromechanicznych mają maszyny indukcyjne. Takie zalety tych maszyn, jak: prostota budowy, mniejszy ciężar, niższe koszty ich produkcji, większa niezawodność i moc przypadająca na jednostkę masy w porównaniu do maszyn komutatorowych, zwiększa ich zastosowanie w przetwarzaniu energii elektrycznej na mechaniczną i odwrotnie.

W badaniach dynamiki układów napędowych, fundamentalnym zadaniem jest określenie modelu matematycznego danego układu. Model ten nie powinien być zbyt skomplikowany, ale musi dostatecznie wiernie odzwierciedlać rzeczywiste procesy zachodzące w stanach dynamicznych układów napędowych.

W literaturze przedstawionych jest wiele postaci modeli matematycznych silnika indukcyjnego [1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11]. W artykule niniejszym przedstawiono syntetyczny przegląd tych modeli ze wskazaniem przydatności do celów badań symulacyjnych i optymalizacji.

Preliminaria

Poniżej przedstawiono wybrane modele matematyczne maszyny jednofazowej trójfazowej zarówno w przestrzeni rzeczywistej jak i zespolonej.

Przyjęte zostały następujące założenia upraszczające:

- a) nie uwzględnia się nasycenia obwodu magnetycznego silnika,
- b) nie uwzględnia się strat mocy w rdzeniu obwodu magnetycznego,
- c) nie uwzględnia się wpływu efektów żłobkowych,

* Tekst złożono do druku 26 września 2005 roku.

- d) przyjmuje się symetryczne uzwojenie trójfazowe dla stojana,
 e) przyjmuje się symetryczne uzwojenie trójfazowe wirnika zastępujące pręty klatki,
 f) poszczególne pasma fazowe stojana sprzęgają się między sobą poprzez pierwszą harmoniczną strumieni magnetycznych głównych,
 g) poszczególne pasma fazowe wirnika, podobnie jak w przypadku pasm fazowych stojana, sprzęgają się między sobą poprzez pierwszą harmoniczną strumieni magnetycznych głównych,
 h) uzwojenia stojana z uzwojeniami wirnika sprzęgają się poprzez harmoniczne podstawowe indukcyjności wzajemnych faz stojana i zastępczych faz wirnika.

Model maszyny indukcyjnej w układzie współrzędnych naturalnych

Model maszyny indukcyjnej w formie wektorowej można napisać w formie [1, 2, 5, 7, 9, 10]:

$$\begin{aligned} u_1^{ABC} &= r_1 i_1^{ABC} + \frac{d}{dt} \psi_1^{ABC} \\ u_2^{ABC} &= r_2 i_2^{ABC} + \frac{d}{dt} \psi_2^{ABC} \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie: u_1^{ABC} – wektor kolumnowy o wymiarach 3x1 napięć zasilających uzwojenia ABC stojana,

u_2^{ABC} – wektor kolumnowy o wymiarach 3x1 napięć na uzwojeniach wirnika (dla maszyny klatkowej jest tożsamościowo równy 0) sprowadzonych na stronę stojana,

r_1 – macierz diagonalna rezystancji stojana o wymiarach 3x3,

r_2 – macierz diagonalna rezystancji wirnika sprowadzonych na stronę stojana o wymiarach 3x3,

R_1 – rezystancja fazy stojana,

R_2 – rezystancja zastępczej fazy wirnika sprowadzona na stronę stojana,

i_1^{ABC} – wektor kolumnowy o wymiarach 3x1 prądów płynących przez fazy stojana ABC,

i_2^{ABC} – wektor kolumnowy o wymiarach 3x1 prądów płynących przez zastępcze fazy wirnika, ABC sprowadzonych na stronę stojana,

Ψ_1^{ABC} – strumień skojarzony stojana,

Ψ_2^{ABC} – strumień skojarzony wirnika sprowadzony na stronę stojana.

Równania (1) po rozwinięciu mają formę wektorowo-macierzową o postaci (2, 3)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U_1^A \\ U_1^B \\ U_1^C \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^A \\ I_1^B \\ I_1^C \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \left(\left(L_{1\sigma} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + L_{1s} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} I_1^A \\ I_1^B \\ I_1^C \end{bmatrix} \right) + \\ &+ \frac{d}{dt} \left(L_{12} \begin{bmatrix} \cos(p_b\Theta) & \cos(p_b\Theta + \frac{2}{3}\pi) & \cos(p_b\Theta + \frac{4}{3}\pi) \\ \cos(p_b\Theta + \frac{4}{3}\pi) & \cos(p_b\Theta) & \cos(p_b\Theta + \frac{2}{3}\pi) \\ \cos(p_b\Theta + \frac{2}{3}\pi) & \cos(p_b\Theta + \frac{4}{3}\pi) & \cos(p_b\Theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2^A \\ I_2^B \\ I_2^C \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_2 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2^A \\ I_2^B \\ I_2^C \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \left(\left(L_{2\sigma} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + L_{2s} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} I_2^A \\ I_2^B \\ I_2^C \end{bmatrix} \right) + \\ &+ \frac{d}{dt} \left(L_{12} \begin{bmatrix} \cos(p_b\Theta) & \cos(p_b\Theta + \frac{4}{3}\pi) & \cos(p_b\Theta + \frac{2}{3}\pi) \\ \cos(p_b\Theta + \frac{2}{3}\pi) & \cos(p_b\Theta) & \cos(p_b\Theta + \frac{4}{3}\pi) \\ \cos(p_b\Theta + \frac{4}{3}\pi) & \cos(p_b\Theta + \frac{2}{3}\pi) & \cos(p_b\Theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^A \\ I_1^B \\ I_1^C \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie:

L_{1s} – indukcyjność główna fazy stojana,

$L_{1\sigma}$ – indukcyjność rozproszenia czołowego i żłobkowego fazy stojana,

L_{12} – indukcyjność między fazami stojana i wirnika sprowadzona na stronę stojana,

- $L_{2\delta}$ – indukcyjność główna fazy wirnika sprowadzona na stronę stojana,
 $L_{2\sigma}$ – indukcyjność rozproszenia czołowego i zębokowego fazy wirnika sprowadzona na stronę stojana,
 Θ – kąt położenia wirnika względem stojana,
 p_b – liczba par biegunów maszyny,
 I_1^A, I_1^B, I_1^C – prądy fazowe stojana,
 I_2^A, I_2^B, I_2^C – prądy fazowe wirnika sprowadzone na stronę stojana,
 U_1^A, U_1^B, U_1^C – napięcia fazowe stojana.

Elektromechaniczne równanie ruchu silnika indukcyjnego ma postać:

$$D \cdot \Omega + J \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I_1^A & I_1^B & I_1^C & I_2^A & I_2^B & I_2^C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{d}{d\Theta} l_{12}(\Theta) \\ \frac{d}{d\Theta} l_{12}(\Theta)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^A \\ I_1^B \\ I_1^C \\ I_2^A \\ I_2^B \\ I_2^C \end{bmatrix} - M_{obc} \quad (4)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \Omega \quad (5)$$

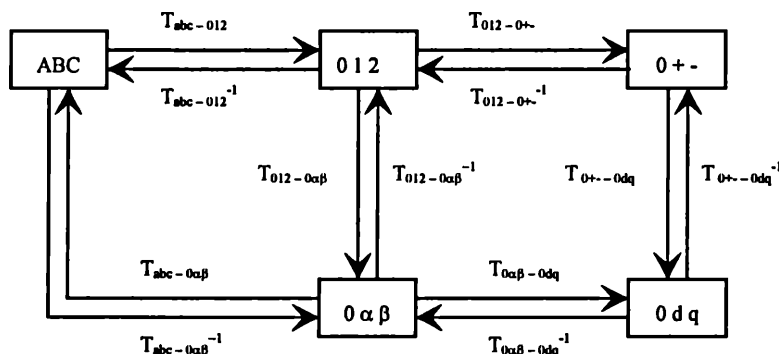
gdzie: J – moment bezwładności maszyny,
 D – współczynnik tarcia lepkiego,
 M_{obc} – moment obciążenia maszyny.

$$l_{12}(\Theta) = L_{12} \begin{bmatrix} \cos(p_b \Theta) & \cos(p_b \Theta + \frac{2}{3} \pi) & \cos(p_b \Theta + \frac{4}{3} \pi) \\ \cos(p_b \Theta + \frac{4}{3} \pi) & \cos(p_b \Theta) & \cos(p_b \Theta + \frac{2}{3} \pi) \\ \cos(p_b \Theta + \frac{2}{3} \pi) & \cos(p_b \Theta + \frac{4}{3} \pi) & \cos(p_b \Theta) \end{bmatrix}$$

Równania (2–5) przy przyjętych założeniach upraszczających stanowią kompletny opis matematyczny silnika klatkowego.

Przegląd transformacji dla układów trójfazowych

Podstawowe trudności przy analizie układu opisanego równaniami (2–5) wynikają z faktu, że układ ten jest nieliniowy i współczynniki równań są zależne od czasu, gdyż kąt położenia wirnika względem stojana jest zależny od czasu. Ponadto układ równań dynamiki maszyny zawiera 8 równań różniczkowych. Aby uprościć analizę silnika indukcyjnego, wprowadza się transformacje do nowych układów współrzędnych [1, 2, 5, 7, 9, 10]. Do analizy stanów dynamicznych np. podczas rozruchu najlepszy jest układ współrzędnych związany z wirnikiem. Określony jest układem osi $0dq$, natomiast do analizy stanów ustalonych maszyny układ we współrzędnych zespolonych. Wszystkie podstawowe transformacje zostały przedstawione na rys. 1.



Rys. 1. Podstawowe transformacje stosowane przy modelowaniu matematycznym maszyny indukcyjnej

W modelowaniu matematycznym stosowanych jest pięć podstawowych układów współrzędnych:

- układ współrzędnych naturalnych (x_A, x_B, x_C),
- układ składowych symetrycznych (x^0, x^1, x^2),
- układ składowych wirujących (x^0, x^+, x^-),
- układ współrzędnych ortogonalnych $0\alpha\beta$ związanego ze stojanem,
- układ współrzędnych ortogonalnych $0dq$ wirującego z prędkością synchroniczną ω .

Współrzędne (x^0, x^1, x^2) oraz (x^0, x^+, x^-) są określone w ciele liczb zespolonych, przy czym z definicji między współrzędnymi zachodzą następujące związki:

$$\begin{aligned} x^2 &= (x^1)^* \\ x^- &= (x^+)^* \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie operacja $()^*$ oznacza liczbę zespoloną sprzężoną.

Współrzędne w układzie $0\alpha\beta$ oraz $0dq$ są liczbami rzeczywistymi. Macierze stałe występują w modelach opisanych układami współrzędnych: (x^0, x^+, x^-) i $0dq$.

Odpowiednie macierze transformacji mają postacie:

Macierz transformacji modelu z układu współrzędnych naturalnych ABC do składowych symetrycznych (x^0, x^1, x^2) oraz macierz odwrotna mają postacie odpowiednio:

$$T_{ABC-012} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{j120} & e^{j240} \\ 1 & e^{j240} & e^{j120} \end{bmatrix}, \quad T_{ABC-012}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{j240} & e^{j120} \\ 1 & e^{j120} & e^{j240} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Macierz transformacji modelu z układu współrzędnych symetrycznych (x^0, x^1, x^2) do układu składowych wirujących (x^0, x^+, x^-) oraz macierz odwrotna mają postacie odpowiednio:

$$T_{012-0+-} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{jP_b\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-jP_b\Theta} \end{bmatrix}, \quad T_{012-0+-}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-jP_b\Theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{jP_b\Theta} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Transformacji tej poddaje się tylko wielkości związane z wirnikiem.

Macierz transformacji modelu z układu współrzędnych naturalnych ABC do układu współrzędnych ortogonalnych $0\alpha\beta$ związanego ze stojanem oraz macierz odwrotna mają postacie odpowiednio:

$$T_{ABC-0\alpha\beta} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \quad T_{ABC-0\alpha\beta}^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Macierz transformacji modelu z układu współrzędnych ortogonalnych $0\alpha\beta$ związanego ze stojanem do układu współrzędnych ortogonalnych $0dq$ wirującego z prędkością synchroniczną ω oraz macierz odwrotna mają postacie odpowiednio:

$$T_{0\alpha\beta-0dq} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ 0 & -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix}, \quad T_{0\alpha\beta-0dq}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Dla wielkości związanych ze stojanem kąt $\gamma = \omega t$, natomiast dla wielkości związanych z wirnikiem kąt $\gamma = \omega t - p_b \Theta$.

Macierze transformacji z układu współrzędnych symetrycznych (x^0, x^1, x^2) do układu współrzędnych ortogonalnych $0\alpha\beta$ związanych ze stojanem oraz z układu współrzędnych wirujących (x^0, x^+, x^-) do układu współrzędnych ortogonalnych $0dq$ wirujących z prędkością ω oraz macierze do nich odwrotne mają postacie odpowiednio:

$$T_{012-0\alpha\beta} = T_{0+--0dq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & j & -j \end{bmatrix}, \quad T_{012-0\alpha\beta}^{-1} = T_{0+--0dq}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -j \\ 0 & 1 & j \end{bmatrix} \quad (11)$$

Model maszyny indukcyjnej w układzie osi $0dq$

Równania maszyny indukcyjnej po ich transformacji do układu ortogonalnego $0dq$ mają postacie [2, 5]:

Równania fazowe

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U_1^0 \\ U_1^d \\ U_1^q \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^0 \\ I_1^d \\ I_1^q \end{bmatrix} + \omega \left(L_{1\sigma} + \frac{3}{2} L_{1s} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^0 \\ I_1^d \\ I_1^q \end{bmatrix} + \\ &+ \left(\begin{bmatrix} L_{1\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & L_{1\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & L_{1\sigma} \end{bmatrix} + \frac{3}{2} L_{1s} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_1^0 \\ I_1^d \\ I_1^q \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \omega L_{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2^0 \\ I_2^d \\ I_2^q \end{bmatrix} + \frac{3}{2} L_{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_2^0 \\ I_2^d \\ I_2^q \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_2 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2^0 \\ I_2^d \\ I_2^q \end{bmatrix} + (\omega - \Omega) \left(L_{2\sigma} + \frac{3}{2} L_{2s} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2^0 \\ I_2^d \\ I_2^q \end{bmatrix} + \\ &+ \left(\begin{bmatrix} L_{2\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & L_{2\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & L_{2\sigma} \end{bmatrix} + \frac{3}{2} L_{2s} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_2^0 \\ I_2^d \\ I_2^q \end{bmatrix} + \frac{3}{2} (\omega - \Omega) L_{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^0 \\ I_1^d \\ I_1^q \end{bmatrix} + \frac{3}{2} L_{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_1^0 \\ I_1^d \\ I_1^q \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

Równanie ruchu

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{J} \left(P_b \cdot \frac{3}{2} L_{12} \cdot (I_2^q \cdot I_1^d - I_2^d \cdot I_1^q) - M_{obc} - D \cdot \Omega \right) \quad (14)$$

oraz zależności wyrażające prądy przez strumienie sprzężone

$$\begin{bmatrix} I_1^d \\ I_1^q \\ I_2^d \\ I_2^q \end{bmatrix} = \frac{1}{\left(\frac{9}{4}L_{12}^2 - L_1 \cdot L_2\right)} \begin{bmatrix} -L_2 & \frac{3}{2}L_{12} & & \\ & -L_2 & \frac{3}{2}L_{12} & \\ \frac{3}{2}L_{12} & & -L_1 & \\ & \frac{3}{2}L_{12} & & -L_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Psi_1^d \\ \Psi_1^q \\ \Psi_2^d \\ \Psi_2^q \end{bmatrix} \quad (15)$$

Model maszyny indukcyjnej w układzie składowych symetrycznych

Równania dla składowych symetrycznych mają postać [1, 10]:

$$\begin{bmatrix} U_1^0 \\ U_1^1 \\ U_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^0 \\ I_1^1 \\ I_1^2 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} L_{1\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & L_{1\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & L_{1\sigma} \end{bmatrix} + \frac{3}{2}L_{1\delta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_1^0 \\ I_1^1 \\ I_1^2 \end{bmatrix} + \\ + \frac{3}{2}L_{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_2^0 \\ I_2^+ \\ I_2^- \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2^0 \\ I_2^+ \\ I_2^- \end{bmatrix} + j \frac{d\Theta}{dt} p_b \left(L_{2\sigma} + \frac{3}{2}L_{2\delta} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2^0 \\ I_2^+ \\ I_2^- \end{bmatrix} + \\ + \left(\begin{bmatrix} L_{2\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & L_{2\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & L_{2\sigma} \end{bmatrix} + \frac{3}{2}L_{2\delta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_2^0 \\ I_2^+ \\ I_2^- \end{bmatrix} + j \frac{3}{2} p_b \frac{d\Theta}{dt} L_{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^0 \\ I_1^1 \\ I_1^2 \end{bmatrix} + \\ + \frac{3}{2}L_{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_1^0 \\ I_1^1 \\ I_1^2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Równanie ruchu [1, 9]

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{J} \left(3P_b L_{12} \left(\text{Im } I_2^+ \text{Re } I_1^1 - \text{Re } I_2^+ \text{Im } I_1^1 \right) - M_{obc} - D\Omega \right) \quad (18)$$

Należy zauważyć, że wielkości związane ze stojanem zostały przetransformowane do układu składowych symetrycznych (x^0, x^1, x^2), a wielkości związane z wirnikiem do układu osi wirujących (x^0, x^+, x^-).

Obliczenia symulacyjne

Podstawę obliczeń symulacyjnych stanowił model maszyny indukcyjnej określony równaniami (12–15). Obliczenia te przeprowadzono przy zastosowaniu programu Matlab/Simulink. Zasilanie maszyny stanowił symetryczny układ napięć sieci trójfazowej 3x380 V. Podstawą do obliczeń symulacyjnych jest graf funkcyjny przedstawiony na rys. 2. Przy obliczeniach stosowano metodę całkowania numerycznego Rungego-Kutty-Gilla czwartego rzędu. Parametry badanej maszyny zestawiono w tabeli 1. Wyniki symulacji przedstawiono na rys. 3 i 4. Na rys. 3 przedstawiono przebieg prędkości silnika przy rozruchu, natomiast na rys. 4 zaprezentowano przebieg prądu rozruchowego badanego silnika.

$P_n = 10 \text{ kW}$	$R_1 = 0,3747 \Omega$
$U_{in} = 220 \text{ V}$	$R_2 = 0,1120 \Omega$
$I_{in} = 21 \text{ A}$	$L_1 = L_{1\sigma} + \frac{3}{2} L_{1\delta} = 0,07355 \text{ H}$
$f_n = 50 \text{ Hz}$	$L_2 = L_{2\sigma} + \frac{3}{2} L_{2\delta} = 0,028367 \text{ H}$
$n_n = 1445 \text{ obr./min}$	$L_{12} = 0,0295 \text{ H}$
$M_{obc} = 0 \text{ N m}$	$D = 0,8 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}$

Tabela 1. Parametry silnika klatkowego

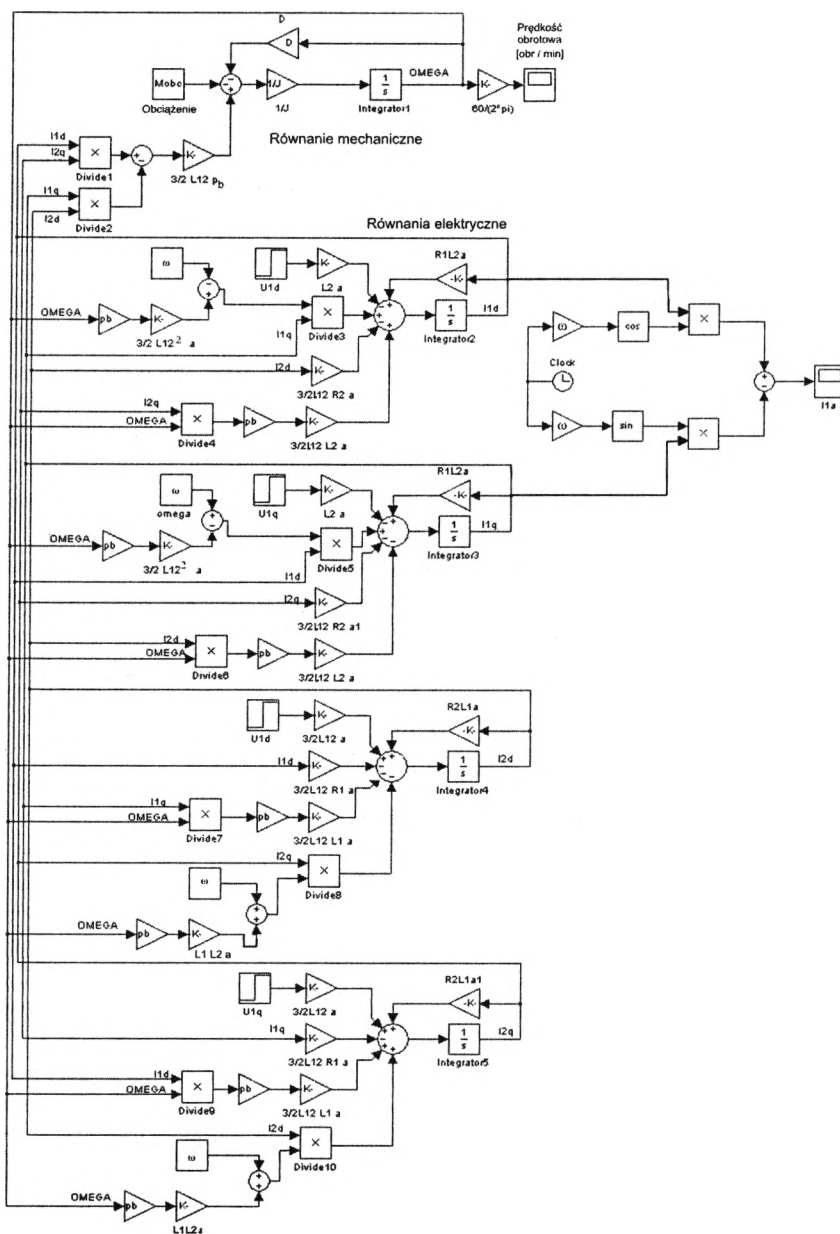
Obliczenia przeprowadzono dla różnych wartości momentu bezwładności, tj.:

$$J_1 = 1 \text{ kg/m}^2$$

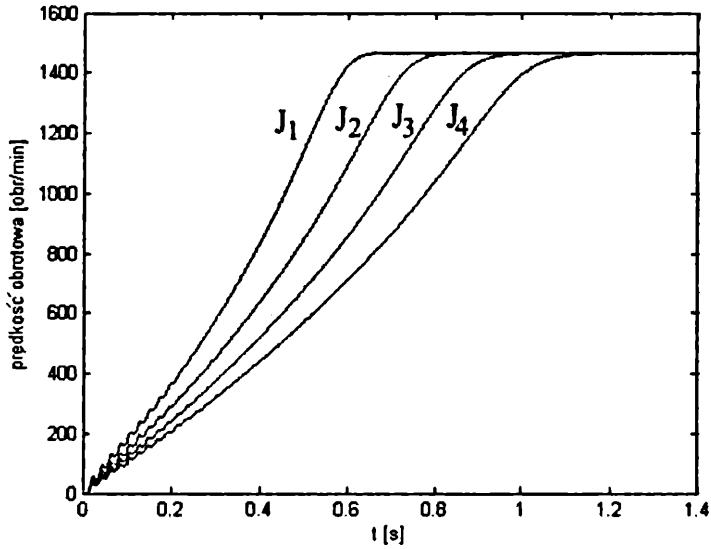
$$J_2 = 1,25 \text{ kg/m}^2$$

$$J_3 = 1,5 \text{ kg/m}^2$$

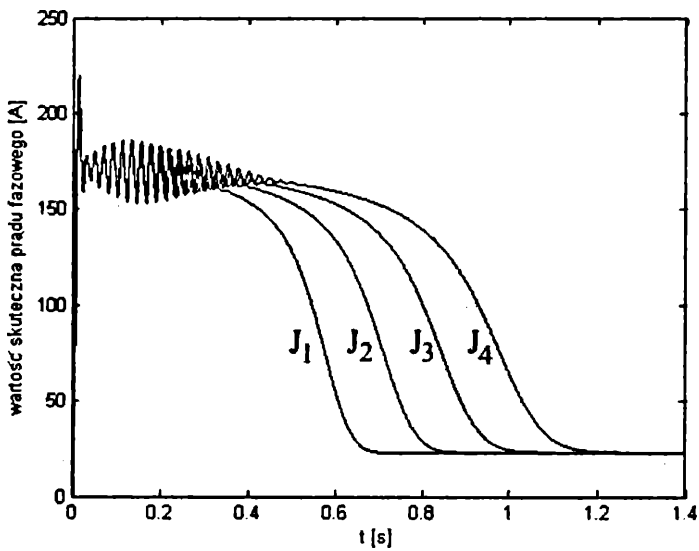
$$J_4 = 1,75 \text{ kg/m}^2$$



Rys. 2. Graf funkcyjny modelu maszyny klatkowej do symulacji rozruchu w języku Matlab/Simulink



Rys. 3. Zależność prędkości obrotowej silnika indukcyjnego od czasu



Rys. 4. Zależność wartości skutecznej prądu pierwszej fazy stojana od czasu

Podsumowanie

Modele matematyczne mają za zadanie opisać procesy jakie zachodzą w maszynach indukcyjnych w różnych stanach pracy: w czasie rozruchu, obciążenia i hamowania. Są też przydatne do określania wpływu zmian parametrów maszyny (rezystancji i indukcyjności) na zachowanie się przebiegów dynamicznych maszyny. Transformacje modelu z układu naturalnego ABC do innych układów mają na celu uprościć podstawowe równania opisujące maszynę z wyjściowych ośmiu równań nieliniowych o współczynnikach zależnych od czasu do prostszego układu równań. Układ w osiach ortogonalnych $0\alpha\beta$ zawiera pięć równań różniczkowych (równania dla składowych zerowych przy symetrycznym zasilaniu można pominąć), natomiast model w układzie ortogonalnym $0dq$ jest czasowo inwariantnym (posiada dodatkowo współczynniki równań niezależne od czasu). W takiej postaci łatwiejsza jest symulacja rozruchu maszyny indukcyjnej na komputerze. Układ opisany w przestrzeni zespolonej przy symetrycznym zasilaniu redukuje się do trzech równań różniczkowych, gdyż zgodnie ze wzorem (6) odpowiednie prądy są ze sobą sprzężone. Układ ten również nadaje się do symulacji stanów dynamicznych, jednak należy w tym przypadku różniczkować numerycznie funkcje zespolone, zatem liczba równań powiększa się do pięciu (równanie ruchu jest równaniem skalarnym). W praktyce do symulacji numerycznych wykorzystuje się model matematyczny w układzie ortogonalnym $0dq$ wirującym, w tym przypadku, synchronicznie. Przy symulacji należy dokonywać transformacji odwrotnych do układu współrzędnych naturalnych ABC, by uzyskać rzeczywiste napięcia i prądy płynące przez fazy maszyny. Oprócz przedstawionych w pracy modeli istnieją jeszcze inne, ale są rzadziej stosowane [10], niż przedstawione w niniejszej pracy.

Bibliografia

- [1] Bajorek Z., *Teoria maszyn elektrycznych*, t. 2, wyd. 6, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 1991
- [2] Jaracz K., Szklarski L., *Sterowanie i regulacja w napędach elektrycznych. Automatyka napędów górniczych*, Skrypty uczelniane nr 911, AGH, Kraków 1983
- [3] Jaracz K., Vitecek A., Szklarski L., *Optymalizacja układów napędowych*, PWN, Warszawa 1989
- [4] Kalus M., Skoczkowski T., *Sterowanie napędami asynchronicznymi i prądu stałego*, Pracownia Komputerowa Jacka Skalmierskiego, Gliwice 2003
- [5] Kovacs K.P., Racz I., *Transiente Vorgänge in Wechselstrommaschinen*, vol. 1 & 2, Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest 1959
- [6] Macek-Kamińska K., *Estymacja parametrów modeli matematycznych silników indukcyjnych dwuklatkowych i głębokożłobkowych*, Wydaw. Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Opolu, Opole 1992

- [7] Orłowska-Kowalska T., *Bezczujnikowe układy napędowe z silnikami indukcyjnymi*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2003
- [8] Plamitzer A.M., *Maszyny elektryczne*, wyd. 4, WN-T, Warszawa 1970
- [9] Rusek J., *Elektrotechnika z elementami napędów*, wyd. 3, Wydawnictwo AGH, Kraków 1996
- [10] Sobczyk T.J., *Metodyczne aspekty modelowania matematycznego maszyn indukcyjnych*, WN-T, Warszawa 2004
- [11] Tunia H., Kaźmierkowski M.P., *Podstawy automatyki napędu elektrycznego*, wyd. 2, PWN, Warszawa–Poznań 1983

Review of mathematical models of an induction machine

Summary

In this paper chosen mathematical models of a three-phase squirrel-cage asynchronous motor, both in real and complex space, are introduced. Matrixes of transformation between the most frequently described coordinate systems are presented. The mathematical model is created in coordinate system $0dq$, written in Matlab/Simulink, and shows the results of simulation of asynchronous motor for different values of inertia torque.

Key words: asynchronous motor, modelling, nonlinear model, Matlab/Simulink