

# PRACE TECHNICZNE

JÓZEF DUDA, KAZIMIERZ JARACZ

## Optymalizacja parametryczna układu napędowego prądu stałego w warunkach zakłóceń stochastycznych

### 1. WSTĘP

Problem optymalizacji układu napędowego prądu stałego rozpatrywany był dotychczas dla różnych aspektów deterministycznego relatywnie wyizolowanego napędu [1-4,7-9]. Pewien aspekt optymalizacji parametrycznej układu napędowego z silnikiem obcowzbudnym prądu stałego dla stochastycznego obciążenia rozpatrzony został w [5].

W niniejszym artykule rozwiązano problem optymalizacji parametrycznej napędu prądu stałego z silnikiem obcowzbudnym, obciążonego momentem reaktywnym o charakterze stochastycznym.

### 2. MODEL UKŁADU I POSTAWIENIE ZADANIA

Model matematyczny rozpatrywanego układu zależy od przyjętych założeń upraszczających. Modele maszyny obcowzbudnej są dość gruntownie opracowane w literaturze [6]. Mając na uwadze dążność do uzyskania na drodze analitycznej rozwiązania niniejszego problemu i możliwej oraz łatwej jego interpretacji fizycznej przyjęto do dalszych rozważań li-

niowy model silnika obcowzbudnego, pominięto nieciągłość napięcia sterującego otrzymywanego z przekształtnika tyrystorowego i opóźnienie wprowadzane przez niego. Przyjęto również, że napięcie wzbudzenia silnika  $u_f$  ma wartość stałą. Sygnałem sterującym silnik jest napięcie twornika  $u_a$ . Wielkościami sterowanymi są prąd twornika  $i_a$  oraz prędkość kątowna  $\dot{\varphi}$ . Pominięto również efekty nieliniowe w układzie (nasycenie, histereza, tarcie). Przyjęto, że reaktywny moment obciążenia posiada charakter procesu stochastycznego stacjonarnego. Zatem

$$m_s(\cdot, \cdot): [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (1)$$

Przecięcia funkcji momentu

$$m_s(t, \cdot): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

w każdej chwili  $t$  są zmiennymi losowymi określonymi w przestrzeni probabilistycznej  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ , przy czym

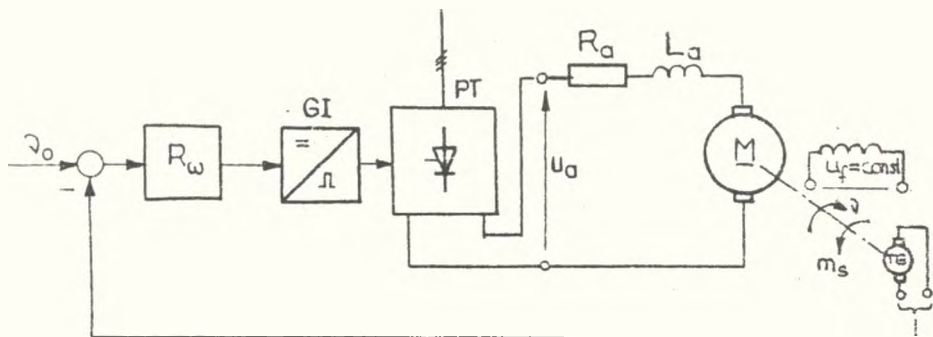
$\Omega$  - przestrzeń podstawowa,

$\mathcal{F}$  -  $\sigma$  - ciało zdarzeń losowych,

$\mathcal{P}$  - miara probabilistyczna określona na  $\mathcal{F}$ .

Schemat ideowy rozpatrywanego układu przedstawia rys. 1.

W układzie tym  $R$  jest regulatorem prędkości,  $GI$  - generatorem impulsów,  $PT$  - przekształtnikiem tyrystorowym,  $TG$  - tachogeneratorem.



Rys. 1

Analizę pracy układu należy rozpatrywać w dwu okresach. W okresie I, dla  $0 \leq t < r$  - gdy silnik się nie obraca, tj.  $\dot{\varphi} = 0$ , bowiem moment obciążenia  $m_g(t, \omega) > m_e(t)$ , dla  $\omega \in \mathcal{R}$ , przy czym  $m_e(\cdot)$  - jest momentem elektrycznym silnika. W okresie I ma miejsce rozruch silnika obciążonego. W okresie tym struktura układu jest opisana układem równań o postaci:

$$R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} = u_a(t) \quad (2)$$

$$i_a(0) = 0 \quad (3)$$

$$\dot{\varphi}(t) = 0 \quad (4)$$

$$m_e(t) = k_m i_a(t) \quad (5)$$

$$u_a(t) = U_a \mathbb{1}(t), \quad U_a = \text{const} \quad (6)$$

gdzie  $L_a, R_a$  - parametry obwodu twornika odpowiednio indukcyjność i rezystancja,  
 $u_a, i_a$  - odpowiednio napięcie i natężenie prądu dla obwodu twornika,  
 $k_m$  - stała momentowa silnika.

Rozwiązanie równania (2) z warunkiem początkowym (3) przy uwzględnieniu (6) jest dane

$$i_a(t) = \frac{U_a}{R_a} (1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad (7)$$

gdzie  $T$  - elektromagnetyczna stała czasowa obwodu twornika. Silnik zacznie się obracać po czasie opóźnienia  $r$ , gdy moment elektryczny przekroczy moment obciążenia zewnętrznego. Ze względu na to, że wartość początkowa tego momentu jest zmienną losową, zatem i opóźnienie  $r$  jest zmienną losową.

Srednią wartość czasu opóźnienia  $\bar{r}$  wyznaczyć można z równania

$$m_e(\bar{r}) = E\{m_s(t, \omega)\} \Big|_{t=\bar{r}} \quad (9)$$

E - jest operatorem wartości średniej.

W okresie II, dla  $t \gg \bar{r}$  silnik zacznie się obracać; struktura rozpatrywanego napędu opisana jest układem równań o postaci

$$J \frac{d\omega(t, \omega)}{dt} = m_e(t - \bar{r}, \omega) - m_s(t - \bar{r}, \omega) \quad (10)$$

$$m_e(t - \bar{r}, \omega) = k_m i_a(t - \bar{r}, \omega) \quad (11)$$

$$R_a i_a(t - \bar{r}, \omega) + L_a \frac{di_a(t - \bar{r}, \omega)}{dt} + k_e \omega(t, \omega) = u_a(t - \bar{r}) \quad (12)$$

$$k_R k_{PT} u_a^* - k_{TG} k_R k_{PT} \omega(t) = u_a(t) \quad (13)$$

gdzie  $k_e$  - stała napięciowa silnika,

$k_{FT}$  - współczynnik wzmocnienia przekształtnika tyristorowego,

$k_{TG}$  - stała tachogeneratorska,

$k_R$  - wzmocnienie proporcjonalnego regulatora prędkości,

J - moment bezwładności mas wirujących sprowadzony do osi wału silnika,

$u_a^*$  - napięcie zadające prędkość.

Przyjmując podstawienia określone

$$\frac{k_R k_{PT} u_a^*}{L_a} = \omega_0 \quad (14)$$

$$\frac{k_{TG} k_R k_{PT}}{L_a} = k \quad (15)$$

$$\frac{k}{J} T = k_0 \quad (16)$$

$$\frac{k_e}{L_a} = k_1 \quad (17)$$

$$- \frac{m_s(t-\bar{r}, \omega)}{J} = z_1(t, \omega) \quad (18)$$

$$j(t, \omega) = y_1(t, \omega) \quad (19)$$

$$i_a(t-\bar{r}, \omega) = y_2(t, \omega) \quad (20)$$

i wprowadzając je do równań (10) - (13) otrzymujemy

$$\dot{y}_1(t, \omega) = \frac{k_0}{T} y_2(t, \omega) + z_1(t, \omega) \quad (21)$$

$$\dot{y}_2(t, \omega) = -k_1 y_1(t, \omega) - \frac{1}{T} y_2(t, \omega) - k y_1(t-\bar{r}, \omega) + j_0 \quad (22)$$

dla  $t > \bar{r}$ . Natomiast dla  $t \in [0, \bar{r})$  wielkości  $j(t)$ ,  $i_a(t)$  określone są wzorami (4) i (7). Wyrażenia (4), (7) po uwzględnieniu (19), (20) przyjmą formy

$$y_1(t) = 0 \quad (23)$$

$$y_2(t, \omega) = \frac{U_a}{R_a} \left( 1 - e^{-\frac{t-\bar{r}}{T}} \right) \quad (24)$$

Wyrażenia (23) (24) wyrazimy w funkcji nowej zmiennej  $\theta \in [-r, 0]$  stosując następującą translację współrzędnych

$$\begin{aligned} \theta &= t - r \\ \text{lub} \quad \bar{\theta} &= t - \bar{r} \end{aligned} \quad (25)$$

Po uwzględnieniu (25) wyrażenia (23), (24) przyjmą formy odpowiednio

$$y_1(r+\theta) = 0 \quad (26)$$

$$y_2(r+\theta, \omega) = \frac{U_a}{R_a} \left(1 - e^{-\frac{\theta}{T}}\right) \quad (27)$$

Równania (26), (27) stanowią warunek początkowy dla układu równań różniczkowych (21), (22). Układ ten można zapisać w postaci

$$\dot{x}(t, \omega) = Ax(t, \omega) + Bx(t-\bar{r}, \omega) + Cz(t, \omega) \quad (28)$$

$$x(\bar{r}+\bar{\theta}, \omega) = \Phi(\bar{\theta}, \omega) \quad (29)$$

dla  $t \geq \bar{r}$ ,  $\bar{\theta} \in [-\bar{r}, 0]$ ,

gdzie

$$x(t, \omega) = [(y_1(t, \omega) - \bar{y}_1), (y_2(t, \omega) - \bar{y}_2)]^T \quad (30)$$

$$z(t, \omega) = [(z_1(t, \omega) - \bar{z}_1), \mathfrak{J}_0]^T \quad (31)$$

$$\Phi(\bar{\theta}, \omega) = \left[0, \frac{U_a}{R_a} \left(1 - e^{-\frac{\bar{\theta}}{T}}\right)\right]^T \quad (32)$$

przy czym kreskę u góry oznaczono wartości średnie odpowiednich wielkości, oraz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_0}{T} \\ -k_1 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Wprowadzając funkcję

$$x_t(\cdot, \omega) = [x_{1t}(\cdot, \omega), x_{2t}(\cdot, \omega)]^T$$

określoną

$$x_t(\cdot, \omega) : [-\bar{r}, 0) \ni \theta \rightarrow x_t(\bar{\theta}, \omega) := x(t + \bar{\theta}) \in \mathbb{R}^2$$

dla  $t \gg \bar{r}$  i  $\omega \in \mathcal{Q}$ , można równania (28), (29) zapisać w formie

$$\dot{x}(t, \omega) = Ax(t, \omega) + Bx_t(-\bar{r}, \omega) + Cz(t, \omega) \quad (36)$$

$$x(\bar{r} + \bar{\theta}, \omega) = \phi(\bar{\theta}, \omega) \quad (37)$$

dla  $t \gg \bar{r}$ ,  $\theta \in [-\bar{r}, 0)$ ,  $\omega \in \mathcal{Q}$ .

Przyjmujemy, że wskaźnik jakości ma postać

$$J = E \left\{ \int_0^{\infty} x^T(t, \omega) x(t, \omega) dt \right\} \quad (38)$$

dla  $\omega \in \mathcal{Q}$ . Wyznamy parametry rozpatrywanego układu opisanego równaniami (28), (29) lub (36), (37), przy których wskaźnik jakości osiąga wartość minimalną.

### 3. METODA OKREŚLENIA WARTOŚCI ŚREDNIEJ WSKAZNIKA JAKOŚCI

Dla rozpatrywanego układu napędowego opisanego równaniem stanu (36), (37) określimy funkcjonal Lapunowa w klasie funkcjonałów typu

$$\begin{aligned}
 V(s(t, \omega)) = & x^T(t, \omega) x(t, \omega) + \int_{-\bar{r}}^0 x^T(t, \omega) \beta(\theta) x_t(\theta, \omega) d\theta + \\
 & + \int_{-\bar{r}}^0 x_t^T(\theta, \omega) \gamma(\theta) x_t(\theta, \omega) d\theta + \int_{-\bar{r}}^0 \int_{\theta}^0 x_t^T(\bar{\theta}, \omega) \delta(\bar{\theta}, \theta) x_t(\sigma, \omega) d\bar{\theta} d\sigma
 \end{aligned} \tag{39}$$

dla  $t \geq 0$ ,  $\omega \in \Omega$ , przy czym

$$\alpha = \alpha^T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2); \beta, \gamma \in C([- \bar{r}, 0], L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2));$$

$$\delta \in C(\Delta, L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)), \text{ gdzie } \Delta = \{(\bar{\theta}, \sigma) : \bar{\theta} \in [- \bar{r}, 0], \bar{\theta} \leq \sigma \leq 0\},$$

takiego, aby spełniona była zależność

$$E \left\{ \frac{dV(s(t, \omega))}{dt} \right\} = -E \left\{ x^T(t, \omega) x(t, \omega) \right\} \tag{40}$$

dla  $t \geq 0$ , przy czym

$$s(t, \omega) = (x(t, \omega), x_t(\cdot, \omega))$$

Po obustronnym scałkowaniu relacji (40), korzystając z ciągłości funkcjonału Lapunowa oraz ciągłości rozwiązania równania stanu (36) otrzymuje się

$$J = E\{V(s(0, \omega))\} - E\{V(s(\infty, \omega))\} \tag{41}$$

Niech  $E\{V(s(0, \omega))\} \gg E\{V(s(\infty, \omega))\}$ . Wtedy macierze wagowe w funkcjonale Lapunowa (39) można wyznaczyć obliczając pochodną tego funkcjonału i podstawiając obliczoną pochodną do



równania (40). Wykorzystując odpowiednie własności operatorów liniowego i uśredniającego otrzymuje się następujący układ równań macierzowych, z którego obliczyć można macierze wagowe funkcjonału Lapunowa

$$A^T \alpha + \alpha A - \frac{\beta(0) + \beta^T(0)}{2} + \gamma(0) = -I \quad (42)$$

$$2\alpha\beta - \beta(-\bar{r}) = 0 \quad (43)$$

$$\gamma(-\bar{r}) = 0 \quad (44)$$

$$A^T \beta(\bar{\theta}) - \frac{d\beta(\bar{\theta})}{d\bar{\theta}} + \delta^T(\bar{\theta}, 0) = 0 \quad (45)$$

$$B^T \beta(\bar{\theta}) - \delta(-\bar{r}, \bar{\theta}) = 0 \quad (46)$$

$$\frac{d\delta(\bar{\theta})}{d\bar{\theta}} = 0 \quad (47)$$

$$\frac{\partial \delta(\bar{\theta}, \sigma)}{\partial \bar{\theta}} + \frac{\delta(\bar{\theta}, \sigma)}{\partial \sigma} = 0 \quad (48)$$

W układzie równań (42) - (48) o współczynnikach macierzowych niewiadomymi są  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Rozwiązanie tego układu równań można przeprowadzić następująco. Z równań (47) i (44) wynika, że

$$\gamma(\bar{\theta}) = 0 \quad \text{dla} \quad \bar{\theta} \in [-\bar{r}, 0] \quad (49)$$

Równanie (48) jest spełnione dla funkcji

$$\delta(\bar{\theta}, \sigma) = \psi(\bar{\theta} - \sigma) \quad (50)$$

gdzie  $\psi \in C(\Delta, L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2))$ ,  $\Delta = \{\theta - \sigma: \bar{\theta} \in [-\bar{r}, 0], \theta \leq \sigma \leq 0$

Z równania (46) mamy

$$\delta(-\bar{r}, \bar{\theta}) = B^T \beta(\bar{\theta}) \quad (51)$$

Po uwzględnieniu (50) otrzymujemy

$$\delta(-\bar{r}, \bar{\theta}) = \psi(-\bar{r} - \bar{\theta}) = B^T \beta(\bar{\theta}) \quad (52)$$

z którego można określić funkcję

$$\varphi(\bar{\Theta}) = B^T \beta(-\bar{r} - \bar{\Theta}) \quad (53)$$

Przyjmując podstawienie

$$\beta_1(\bar{\Theta}) = \beta^T(-\bar{r} - \bar{\Theta}) \quad (54)$$

równanie (53) przyjmie postać

$$\varphi(\bar{\Theta}) = B^T \beta_1(\bar{\Theta}) \quad (55)$$

Z równań (50) i (55) można wyznaczyć  $\delta^T(\Theta, 0)$  i podstawić do (45). Otrzymamy wtedy równanie różniczkowe

$$\frac{d\beta(\bar{\Theta})}{d\bar{\Theta}} = A^T \beta(\bar{\Theta}) + \beta_1(\bar{\Theta})B \quad (56)$$

Obliczając pochodną wyrażenia (54) otrzymamy po uwzględnieniu (56)

$$\frac{d\beta_1(\bar{\Theta})}{d\bar{\Theta}} = -\beta_1(\bar{\Theta})A - B^T \beta(\bar{\Theta}) \quad (57)$$

Rozwiązanie układu równań różniczkowych (56), (57) spełnia warunek

$$\beta_1(\bar{\Theta}) \Big|_{\bar{\Theta} = -\frac{\bar{r}}{2}} = \beta^T(\bar{\Theta}) \Big|_{\bar{\Theta} = -\frac{\bar{r}}{2}} \quad (58)$$

Po rozwiązaniu układu równań różniczkowych (56), (57) otrzymamy macierze  $\beta(\bar{\Theta})$ ,  $\beta_1(\bar{\Theta})$  liniowo zależne od  $\beta(0)$  i  $\beta_1(0)$ . Podstawiając te macierze do (58) i dołączając równania (42), (43) otrzymujemy po uwzględnieniu, że

$$\beta(-\bar{r}) = \beta^T(0) \quad (59)$$

$$\delta(0) = 0 \quad (60)$$

układ równań algebraicznych liniowych ze względu na elementy macierzy  $\beta(0)$ ,  $\beta_1(0)$ , o postaci

$$\beta_1(\theta) \Big|_{\bar{\theta} = -\frac{1}{2}} = \beta^T(\theta) \Big|_{\bar{\theta} = -\frac{1}{2}}$$

$$A^T \alpha + \alpha A + \frac{\beta(0) + \beta^T(0)}{2} = -I \quad (61)$$

$$2\alpha B - \beta_1^T(0) = 0$$

Macierz  $\delta(\bar{\theta}, \sigma)$  określić można z równań (50), (55)

$$\delta(\bar{\theta}, \sigma) = B^T \beta_1^T(\bar{\theta} - \sigma) \quad (62)$$

#### 4. OKRESLENIE WYRAZÓW MACIERZY WAGOWYCH DLA UKŁADU OPTYMALNEGO

Wyrazy macierzy wagowych funkcjonału Lapunowa określimy na podstawie równań (56), (57), (61), (62). W tym celu wprowadzimy najpierw następujące oznaczenia

$$s_1 = \frac{1}{T} \sqrt{\frac{1 - 2Tk_0 k_1 + p}{2}}$$

$$s_2 = \frac{1}{T} \sqrt{\frac{1 - 2Tk_0 k_1 - p}{2}}$$

$$p^2 = 4T^2 k_0^2 k^2 - 4Tk_0 k_1 + 1$$

$$ss = \text{sh } \frac{s_1 \bar{r}}{2} \text{sh } \frac{s_2 \bar{r}}{2}$$

$$sc = \text{sh } \frac{s_1 \bar{r}}{2} \text{ch } \frac{s_2 \bar{r}}{2}$$

$$cs = \text{ch } \frac{s_1 \bar{r}}{2} \text{sh } \frac{s_2 \bar{r}}{2}$$

$$cc = \text{ch } \frac{s_1 \bar{r}}{2} \text{ch } \frac{s_2 \bar{r}}{2}$$

$$w = 2k_0(s_1^2 - s_2^2) \left\{ \frac{k_0(k_1 - k)}{T^2 s_1 s_2} ss + \left( s_1 + \frac{k_0(k_1 - k)}{T s_1} \right) sc + \left( s_2 + \frac{k_0(k_1 - k)}{T s_2} \right) cs + \frac{1}{T} cc \right\}$$

Wyrazy macierzy wagowej

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$$

są równe

$$\begin{aligned} \alpha_{11} = \frac{1}{w} & \left\{ \frac{T^2 s_1 s_2 (s_1^2 - s_2^2)}{k_0(k_1 + k)} \left( \frac{k_0}{T} + k_1 - k + \frac{1}{T^2(k_1 - k)} \right) ss + (k_1 s_1 k s_1 + \right. \\ & - \frac{k_0(k_1 - k)^2}{T s_1} - \frac{2k_0^2 k_1}{T^2 s_1} - \frac{k_0 s_2^2}{T s_1} + \frac{s_1}{T^2(k_1 + k)} - \frac{s_1 s_2^2}{k_1 + k} \left. \right) sc + \\ & + (-k_1 s_2 - k s_2 + \frac{k_0(k_1 - k)^2}{T s_2} + \frac{2k_0^2 k_1}{T^2 s_2} + \frac{k_0 s_1^2}{T s_2} - \frac{s_2}{T^2(k_1 + k)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{s_1^2 s_2^2}{k_1+k} cs + T(s_1^2 - s_2^2) \left( \frac{k_0}{T} + k_1+k + \frac{1}{T^2(k_1+k)} \right) cc \\
\alpha_{12} = & \frac{1}{w} \left\{ \frac{k_0^2 (s_1^2 - s_2^2)}{T^2 s_1 s_2} ss + \left( -\frac{k_0^2}{T^3 s_1} + 2k_0 k s_1 + \frac{k_0 s_1}{T^2 (k_1+k)} + \right. \right. \\
& + \frac{2k T s_1 s_2^2}{k_1+k} ) sc + \left( \frac{k_0^2}{T^3 s_2} - 2k_0 k s_2 - \frac{k_0 s_2}{T^2 (k_1+k)} - \frac{2k T s_1^2 s_2}{k_1+k} \right) cs + \\
& \left. + \frac{k_0 (s_1^2 - s_2^2)}{T (k_1+k)} cc \right\} \\
\alpha_{22} = & \frac{1}{w} \left\{ \left( \frac{k_0^3}{T^2 s_1 s_2} + \frac{T s_1 s_2}{k_1+k} \right) (s_1^2 - s_2^2) ss + \left( -\frac{k_0^3}{T^3 s_1} + T k_0 s_1^3 + \right. \right. \\
& + \frac{k_0^2 k_1 (s_1^2 - s_2^2)}{s_1} + \frac{k_0^2 k (s_1^2 + s_2^2)}{s_1} + \frac{k_0^2 s_1}{T^2 (k_1+k)} - \frac{T k_0 s_1 s_2^2 (k_1 - k)}{k_1+k} ) sc + \\
& + \left( \frac{k_0^3}{T^3 s_2} - T k_0 s_2^3 + \frac{k_0^2 k_1 (s_1^2 - s_2^2)}{s_2} - \frac{k_0^2 k (s_1^2 + s_2^2)}{s_2} - \frac{k_0^2 s_2}{T^2 (k_1+k)} + \right. \\
& \left. + \frac{T k_0 s_1^2 s_2 (k_1 - k)}{k_1+k} \right) cs + \left( k_0 + \frac{k_0^2}{T (k_1+k)} \right) (s_1^2 - s_2^2) cc \left. \right\}
\end{aligned}$$

Wyraży macierzy wagowej

$$\beta(\bar{\theta}) = \begin{bmatrix} \beta_{11}(\bar{\theta}) & 0 \\ \beta_{21}(\bar{\theta}) & 0 \end{bmatrix}$$

są równe

$$\begin{aligned}
 \beta_{11}(\bar{\theta}) = \frac{2}{w} \left\{ \left[ \left( -\frac{k_0^2 k s_2}{T^2 s_1} + k s_1 s_a \right) s s + \left( T k s_1 s_2^2 - \frac{k_0^2 k s_2^2}{T s_1} - \right. \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{k_0 k s_1 s_2^2}{k_1 - k} + \frac{T^2 k s_1^3 s_2^2}{k_0 (k_1 - k)} \right) s c + \left( -\frac{T^2 k s_1^2 s_2^3}{k_0 (k_1 + k)} + \frac{k_0 k s_2^3}{k_1 + k} + \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{T k s_1^2 s_2 (k_1 - k)}{k_1 + k} + \frac{k_0^2 k s_2 (k_1 - k)}{T (k_1 + k)} \right) c s + \left( \frac{k_0 k s_2^2}{T (k_1 + k)} + \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{T k s_1^2 s_2^2}{k_0 (k_1 + k)} \right) c c \right] \text{ch } s_1 \bar{\theta} + \left[ \left( -\frac{T^2 k s_1^2 s_2^3}{k_0 (k_1 + k)} + \frac{k_0 k s_2^3}{k_1 + k} + \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{T k s_1^2 s_2 (k_1 - k)}{k_1 + k} + \frac{k_0 k s_2 (k_1 - k)}{T (k_1 + k)} \right) s s + \left( \frac{k_0 k s_2^2}{T (k_1 + k)} + \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{T k s_1^2 s_2^2}{k_0 (k_1 + k)} \right) s c + \left( -\frac{k_0^2 k s_2}{T^2 s_1} + k s_1 s_2 \right) c s + \left( T k s_1 s_2^2 + \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{k_0^2 k s_2^2}{T s_1} - \frac{k_0 k s_1 s_2^2}{k_1 - k} + \frac{T^2 k s_1^3 s_2^2}{k_0 (k_1 - k)} \right) c c \right] \text{sh } s_1 \bar{\theta} + \left[ \left( \frac{k_0^2 k s_1}{T^2 s_2} + \right. \right. \\
 \left. \left. - k s_1 s_2 \right) s s + \left( \frac{T^2 k s_1^3 s_2^2}{k_0 (k_1 + k)} - \frac{k_0 k s_1^3}{k_1 + k} + \frac{T k s_1 s_2^2 (k_1 - k)}{k_1 + k} + \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{k_0^2 k s_1 (k_1 - k)}{T (k_1 + k)} \right) s c + \left( -T k s_1^2 s_2 + \frac{k_0 k s_1^2}{T s_2} + \frac{k_0 k s_1^2 s_2}{k_1 - k} + \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{T k s_1^2 s_2^3}{k_0 (k_1 - k)} \right) c s + \left( -\frac{k_0 k s_1^2}{T (k_1 + k)} + \frac{T k s_1^2 s_2^2}{k_0 (k_1 + k)} \right) c c \right] \text{ch } s_2 \theta +
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \left[ \left( \frac{T^2 k s_1^3 s_2^2}{k_0(k_1+k)} - \frac{k_0 k s_1^3}{k_1+k} + \frac{T k s_1 s_2^2 (k_1-k)}{k_1+k} - \frac{k_0^2 k s_1 (k_1-k)}{T(k_1+k)} \right)_{ss} + \right. \\
& + \left( \frac{k_0^2 k s_1}{T^2 s_2} - k s_1 s_2 \right)_{sc} + \frac{k_0 k s_1^2}{T(k_1+k)} + \frac{T k s_1^2 s_2^2}{k_0(k_1+k)} \Big)_{cs} + \\
& + \left( -T k s_1^2 s_2 + \frac{k_0^2 k s_1^2}{T s_2} + \frac{k_0 k s_1^2 s_2}{k_1-k} - \frac{T^2 k s_1^2 s_2^3}{k_0(k_1-k)} \right)_{cc} \Big] \text{sh } s_2 \bar{\theta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{21}(\bar{\theta}) = \frac{2}{w} \Big\{ & \left[ \left( k_0 k s_1 s_2 - \frac{k_0^3 k s_2}{T^2 s_1} + \frac{T k s_1^3 s_2}{k_1+k} - \frac{k_0^2 k s_1 s_2}{T(k_1+k)} \right)_{ss} + \right. \\
& + \left( -\frac{k_0^3 k}{T^3 s_1} + \frac{k_0 k s_1}{T} \right)_{sc} + \left( \frac{k_0^2 k s_2}{T^2(k_1+k)} - \frac{k s_1^2 s_2}{k_1+k} \right)_{cs} + \\
& + \left( -k_0 k s_1^2 + \frac{k_0^3 k}{T^2} - \frac{T k s_1^2 s_2^2}{k_1+k} + \frac{k_0^2 k s_2^2}{T(k_1+k)} \right)_{cc} \Big] \text{ch } s_1 \bar{\theta} + \\
& + \left[ \left( \frac{k_0^2 k s_2}{T^2(k_1+k)} - \frac{k s_1^2 s_2}{k_1+k} \right)_{ss} + \left( -k_0 k s_1^2 + \frac{k_0^3 k}{T^2} - \frac{T k s_1^2 s_2^2}{k_1+k} + \right. \right. \\
& + \left. \frac{k_0^2 k s_2^2}{T(k_1+k)} \right)_{sc} + \left( k_0 k s_1 s_2 - \frac{k_0 k s_2}{T^2 s_1} + \frac{T k s_1^3 s_2}{k_1+k} + \right. \\
& - \left. \frac{k_0^2 k s_1 s_2}{T(k_1+k)} \right)_{sc} + \left. \left( -\frac{k_0^3 k}{T^3 s_1} + \frac{k_0 k s_1}{T} \right)_{cc} \right] \text{sh } s_1 \bar{\theta} + \\
& + \left[ \left( -k_0 k s_1 s_2 + \frac{k_0^3 k s_1}{T^2 s_2} - \frac{T k s_1 s_2^3}{k_1+k} + \frac{k_0^2 k s_1 s_2}{T(k_1+k)} \right)_{ss} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( -\frac{k_0^2 k s_1}{T^2 (k_1 + k)} + \frac{k s_1 s_2^2}{k_1 + k} \right) s c + \left( \frac{k_0^3 k}{T^3 s_2} - \frac{k_0 k s_2}{T} \right) c s + \\
& + \left( k_0 k s_2^2 - \frac{k_0^3 k}{T^2} + \frac{T k s_1^2 s_2^2}{k_1 + k} - \frac{k_0^2 k s_1^2}{T (k_1 + k)} \right) c c ] \operatorname{ch} s_2 \bar{\theta} + \\
& + \left[ \left( -\frac{k_0^2 k s_1}{T^2 (k_1 + k)} + \frac{k s_1 s_2^2}{k_1 + k} \right) s s + \left( -k_0 k s_1 s_2 + \frac{k_0^3 k s_1}{T^2 s_2} + \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{T k s_1 s_2^3}{k_1 + k} + \frac{k_0^2 k s_1 s_2}{T (k_1 + k)} \right) s c + \left( k_0 k s_2^2 - \frac{k_0^3 k}{T^2} + \frac{T k s_1^2 s_2^2}{k_1 + k} + \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{k_0^2 k s_1^2}{T (k_1 + k)} \right) c s + \left( \frac{k_0^3 k}{T^3 s_2} - \frac{k_0 k s_2}{T} \right) c c ] \operatorname{sh} s_2 \bar{\theta} \right\}
\end{aligned}$$

Wyraży macierzy wagowej

$$\delta(\theta, \sigma) = \begin{bmatrix} \delta_{11}(\theta, \sigma) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

wynoszą

$$\begin{aligned}
\delta_{11}(\theta, \sigma) = \frac{2}{W} \left\{ \left[ \left( k_0 k^2 s_1 s_2 - \frac{k_0^3 k^2 s_2}{T^2 s_1} - \frac{k_0^2 k^2 s_1 s_2}{T (k_1 + k)} + \frac{T k^2 s_1^3 s_2}{k_1 + k} \right) s s + \right. \right. \\
\left. \left. + \left( -\frac{k_0^3 k^2}{T^3 s_1} + \frac{k_0 k^2 s_1}{T} \right) s c + \left( -\frac{k_0^2 k^2 s_2}{T^2 (k_1 + k)} + \frac{k^2 s_1^2 s_2}{k_1 + k} \right) c s + \right. \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + (k_0 k^2 s_1^2 - \frac{k_0^3 k^2}{T^2} + \frac{T k^2 s_1^2 s_2^2}{k_1+k} + - \frac{k_0^2 k^2 s_2^2}{T(k_1+k)}) cc] chs_a(\theta-\sigma) + \\
& + [(-\frac{k_0^2 k^2 s_2^2}{T^2(k_1+k)} + \frac{k^2 s_1^2 s_2^2}{k_1+k}) ss + (k_0 k^2 s_1^2 - \frac{k_0^3 k^2}{T^2} + \\
& + \frac{T k^2 s_1^2 s_2^2}{k_1+k} - \frac{k_0^2 k^2 s_2^2}{T(k_1+k)}) sc + (k_0 k^2 s_1 s_2 - \frac{k_0^3 k^2 s_2}{T^2 s_1} + \\
& - \frac{k_0^2 k^2 s_1 s_2}{T(k_1+k)} + \frac{T k^2 s_1^3 s_2}{k_1+k}) cs + (-\frac{k_0^3 k^2}{T^3 s_1} + \frac{k_0 k^2 s_1}{T}) cc] shs_1(\theta-\sigma) + \\
& + [(-k_0 k^2 s_1 s_2 + \frac{k_0^3 k^2 s_1}{T^2 s_2} + \frac{k_0^2 k^2 s_1 s_2}{T(k_1+k)} + \frac{T k^2 s_1 s_2^3}{k_1+k}) ss + \\
& + (\frac{k_0^2 k^2 s_1}{T^2(k_1+k)} - \frac{k^2 s_1 s_2^2}{k_1+k}) sc + (\frac{k_0^3 k^2}{T^3 s_2} - \frac{k_0 k^2 s_2}{T}) cs + \\
& + (\frac{k_0^3 k^2}{T^2} + k_0 k^2 s_2^2 - \frac{T k^2 s_1^2 s_2^2}{k_1+k} + \frac{k_0^2 k^2 s_1^2}{T(k_1+k)}) cc] chs_2(\theta-\sigma) + \\
& + [(\frac{k_0^2 k^2 s_1}{T^2(k_1+k)} - \frac{k^2 s_1 s_2^2}{k_1+k}) ss + (-k_0 k^2 s_1 s_2 + \frac{k_0^3 k^2 s_1}{T^2 s_2} + \\
& + \frac{k_0^2 k^2 s_1 s_2}{T(k_1+k)} - \frac{T k^2 s_1 s_2^3}{k_1+k}) sc + (-k_0 k^2 s_2^2 + \frac{k_0^3 k^2}{T^2} + \\
& + -\frac{T k^2 s_1^2 s_2^2}{k_1+k} + \frac{k_0^2 k^2 s_1^2}{T(k_1+k)}) cs + (\frac{k_0^3 k^2}{T^3 s_2} - \frac{k_0 k^2 s_2}{T}) cc] shs_2(\theta-\sigma)
\end{aligned}$$

## Macierz

$$\chi(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wartość średnia wskaźnika jakości dla optymalnych wartości wyrazów macierzy wagowych jest równa

$$\begin{aligned}
 J = E \left\{ \frac{z_0 + \frac{z_0(\omega)}{k_0}}{k_1+k} \right. & \frac{1}{W} \left[ ss \left[ \frac{T^2 s_1 s_2 (s_1^2 - s_2^2)}{k_0 (k_1 + k)} \left( \frac{k_0}{T} + k_1 - k + \right. \right. \right. \\
 + \frac{1}{T^2 (k_1 - k)} \right) & + \frac{4k}{k_1 + k} \left( \frac{T^2 s_1^3 s_2}{k_0} - \frac{T^2 s_1 s_2^3}{k_0} + \frac{k_0 s_2^3}{s_1} - \frac{k_0 s_1^3}{s_2} + \right. \\
 + \frac{k_0^2 s_2 (k_1 - k)}{T s_1} & - \left. \frac{k_0^2 s_1 (k_1 - k)}{T s_2} \right) + 4k_0 k^2 \left( -\frac{s_2}{s_1} + \frac{k_0 s_2}{T^2 s_1^3} + \right. \\
 + \frac{k_0 s_2}{T (k_1 + k) s_1} & + \frac{s_1}{s_2} - \frac{k_0^2 s_1}{T^2 s_2^3} - \frac{k_0 s_1}{T (k_1 + k) s_2} - \frac{k_0 s_2^r}{2T^2 (k_1 + k) s_1} + \\
 + \left. \frac{k_0 s_1^r}{2T^2 (k_1 + k) s_2} \right) & \left. \right] + sc \left[ k_1 s_1 + k s_1 - \frac{k_0 (k_1 - k)^2}{T s_1} - \frac{2k_0^2 k_1}{T^2 s_1} + \right. \\
 - \frac{k_0 s_2^2}{T s_1} & + \frac{s_1}{T^2 (k_1 + k)} - \frac{s_1 s_2^2}{k_1 + k} + \frac{4k_0 k s_2^2}{T (k_1 + k) s_1} - \frac{4T k s_1 s_2^2}{k_0 (k_1 + k)} + \frac{4k_0^3 k^2}{T^3 s_1^3} + \\
 - \frac{4k_0 k^2}{T s_1} & - \frac{2k_0^3 k^2 r}{T^2 s_1} - \frac{2k_0^2 k^2 s_2^2 r}{T (k_1 + k) s_1} + \frac{2k_0^3 k^2 s_1 r}{T^2 s_2^2} + \left. \frac{2k_0^2 k^2 s_1 r}{T (k_1 + k)} \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + cs \left[ -k_1 s_2 - ks_2 + \frac{k_0(k_1-k)^2}{Ts_2} + \frac{2k_0^2 k_1}{T^2 s_2} + \frac{k_0 s_1^2}{Ts_2} - \frac{s_2}{T^2(k_1+k)} + \right. \\
& + \frac{s_1^2 s_2}{k_1+k} - \frac{4k_0 k s_1^2}{Ts_2(k_1+k)} + \frac{4Tks_1^2 s_2}{k_0(k_1+k)} - \frac{4k_0^3 k^2}{T^3 s_2^3} + \frac{4k_0 k^2}{Ts_2} - \frac{2k_0^3 k^2 s_2 r}{T^2 s_1^2} + \\
& - \frac{2k_0^2 k^2 s_2 r}{T(k_1+k)} + \frac{2k_0^3 k^2 r}{T^2 s_2} + \left. \frac{2k_0^2 k^2 s_1^2 r}{T(k_1+k)s_2} \right] + cc \left[ T(s_1^2 - s_2^2) \left( \frac{k_0}{T} + k_1 + \right. \right. \\
& + k + \frac{1}{T^2(k_1+k)} \left. \left. + \frac{2k_0^3 k^2 r}{T^3} \left( \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1} \right) \right] \right] - \frac{z_0(\omega)}{k_1+k} \\
& \cdot \frac{2Tz_0(\omega)}{k_0 W} \left\{ ss \left[ \frac{k_0^2(s_1^2 - s_2^2)}{T^2 s_1 s_2} + \frac{2k_0^2 k s_2}{T^2(k_1+k)s_1} - \frac{2k_0^2 k s_1}{T^2(k_1+k)s_2} \right] + \right. \\
& + sc \left[ -\frac{k_0^2}{T^3 s_1} + \frac{k_0 s_1}{T^2(k_1+k)} + \frac{2k_0^3 k}{T^2 s_1} + \frac{2k_0^2 k s_2^2}{T(k_1+k)s_1} \right] + \\
& + cs \left[ \frac{k_0^2}{T^3 s_2} - \frac{k_0 s_2}{T^2(k_1+k)} - \frac{2k_0^3 k}{T^2 s_2} - \frac{2k_0^2 k s_1^2}{T(k_1+k)s_2} \right] + \frac{k_0(s_1^2 - s_2^2)}{T(k_1+k)} cc \left. \right\} + \\
& + \frac{T^2 z_0^2(\omega)}{k_0 W} \left\{ \left( \frac{k_0^3}{T^2 s_1 s_2} + \frac{T s_1 s_2}{k_1+k} \right) (s_1^2 - s_2^2) ss + \left( -\frac{k_0^3}{T^3 s_1} + \right. \right. \\
& + Tk_0 s_1^3 + \frac{k_0^2 k_1 (s_1^2 - s_2^2)}{s_1} + \frac{k_0^2 s_1}{T^2(k_1+k)} + \frac{k_0^2 k (s_1^2 + s_2^2)}{s_1} + \\
& - \left. \frac{Tk_0 s_1 s_2^2 (k_1 - k)}{k_1+k} \right) sc + \left( \frac{k_0^3}{T^3 s_2} - Tk_0 s_2^3 + \frac{k_0^2 k_1 (s_1^2 - s_2^2)}{s_2} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{k_0^2 k (s_1^2 + s_2^2)}{s_2} - \frac{k_0^2 s_2}{T^2 (k_1 + k)} + \frac{T k_0 s_1^2 s_2 (k_1 - k)}{k_1 + k} \} cs + \\
& + \left( k_0 + \frac{k_0^2}{T(k_1 + k)} \right) (s_1^2 - s_2^2) cc \} \}
\end{aligned}$$

#### LITERATURA

- [1] C i e p i e l a A., K o z i o ł R., S a w i c k i J.: Problemy sterowania napędem prądu stałego przy kwadratowym wskaźniku jakości. ZN AGH, Elektryfikacja i Mech. Górń. i Hutn. z. 64, Kraków 1974.
- [2] C i e p i e l a A., K o z i o ł R.: Problem stabilizacji stanu w napędach prądu stałego. ZN AGH, Elektryfikacja i Mech. Górń. i Hutn. z. 73, Kraków 1976.
- [3] D ę b o w s k i A.: O możliwości syntezy układu napędowego prądu stałego suboptymalnego ze względu na straty energii. Prace VIII KKA, Szczecin, wrzesień 1980, s. 176-180.
- [4] D u d a J.: Problem optymalizacji parametrycznej dla układu regulacji stałowartościowej prędkości kątowej silnika obcowzbudnego prądu stałego. ZN AGH, Automatyka z. 44, Kraków 1989, s. 157-173.
- [5] J a r a c z K.: Selection of the optimal working point of the speed regulator of a drive system operating under random disturbance conditions. 10. Int. Fachtagung "Industrielle Automatisierung - Automatisierte Antriebe", 14. Febr.-16. Febr. 1989, Karl-Marx-Stadt s. 124-127.
- [6] K o z i o ł R., C i e p i e l a A., S a w i c k i J.: Modele matematyczne silnika obcowzbudnego. ZN AGH, Elektryfikacja i Mech. Górń. i Hutn. z. 64, Kraków 1974.

- [7] P e ł c z e w s k i W.: Optimal and suboptimal minimum - time control of electric drive system subjected to variations of load. Paper 72 Section 6, World Electrotechnical Congress, June 1977, Moscow.
- [8] S z k l a r s k i L., J a r a c z K.: Wybrane zagadnienia dynamiki układów napędowych. PWN, Warszawa 1986.
- [9] S z k l a r s k i L., J a r a c z K., V í t e ě k A.: Optymalizacja układów napędowych. PWN, Warszawa 1989.