

KAZIMIERZ JARACZ

Porównanie wybranych charakterystyk probabilistycznych modeli aproksymacyjnych K i S

1. WSTĘP

Przy projektowaniu układów regulacji ze złożonymi obiektami nadal duże znaczenie i szerokie zastosowanie posiadają proste modele aproksymacyjne. Są to przede wszystkim modele Köpfmüllera i Strejca. Modele te w dalszym ciągu oznaczymy jako K i S. Stosowane są i inne modele otrzymywane w wyniku redukcji, agregacji i aproksymacji obiektów regulacji [2,4, 7+10,14]. Praktyczne znaczenie modeli K i S wynika z faktu, że przy obliczeniach projektowych i syntezie układów regulacji umożliwiają one otrzymywanie na drodze analitycznej rozwiązań i ich interpretację fizykalną, czego nie uzyskuje się przy obliczeniach numerycznych. Otrzymywane przy tym rezultaty spełniają kryterium wystarczającej dla praktyki przemysłowej dokładności.

W niniejszej pracy określono niektóre charakterystyki probabilistyczne modeli K i S, tj.: współczynniki filtracji K_F^K , K_F^S , względne różnice wariancji na wejściu i wyjściu modeli $\delta u_2^K(0)$, $\delta u_2^S(0)$, wariancje wyjść $\sigma_y^{2(K)}$, $\sigma_y^{2(S)}$ dla standardowego wymuszenia. Z kolei przy założeniu, że modele K i S aproksymują ten sam obiekt rzeczywisty dokonano porównania tych charakterystyk, przy czym rezultaty porównania związane są z określoną metodą doboru parametrów modeli.

2. PRELIMINARIA

Porównania własności filtrujących zakłócenia stochastyczne modeli K i S dokonano przyjmując następujące założenia:

- modele K oraz S opisane są transmitancjami odpowiednio

$$G^K(s) = k(1+sT_K)^{-1} \exp(-s\tau) \quad (1)$$

$$G^S(s) = k(1+sT_S)^{-n} \quad (2)$$

gdzie k - współczynnik wzmocnienia,
 T_K, T_S - stałe czasowe odpowiednio modelu K oraz S,
 τ - opóźnienie,
 n - rząd modelu S

- obydwa modele znajdują się w identycznych warunkach, tzn. oddziałują na nie identyczne zakłócenia testowe,
- obydwa modele aproksymują ten sam obiekt rzeczywisty, zatem porównanie odpowiednich charakterystyk probabilistycznych związane jest z metodą doboru parametrów tych modeli i odniesione być musi do tych metod doboru wielkości T_K, τ, T_S, n .

3. WYNIKI OBLICZEN

Niech $S_x(\omega)$ będzie dwustronną gęstością widmową mocy stacjonarnego sygnału stochastycznego. Wtedy wyrażenia określające:

- współczynniki filtracji modeli K i S - K_f^K, K_f^S ,
- względne różnice wariancji na wejściu i wyjściu modeli - $\delta\mu_2^K(0), \delta\mu_2^S(0)$,
- wariancje wyjść - $\sigma_y^2(K), \sigma_y^2(S)$

przyjmują formy odpowiednio

$$K_f^K = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega}{k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_x(\omega) d\omega}{1 + (\omega T_K)^2}}} \quad (3)$$

$$K_f^S = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega}{k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_x(\omega) d\omega}{(1 + (\omega T_S)^2)^n}}} \quad (4)$$

$$\delta \mu_2^K(0) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2 T_K^2}{1 + \omega^2 T_K^2} S_x(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega} \quad (5)$$

przy $k = 1$

$$\delta \mu_2^S(0) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{(1 + \omega^2 T_S^2)^n} \right] S_x(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega} \quad (6)$$

przy $k = 1$ i n ułamekowych, lub

$$\delta \mu_2^S(0) = \frac{T_S^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i+1} (\omega^2 T_S^2)^i}{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\omega^2 T_S^2)^i} \omega^2 S_x(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega} = \quad (6a)$$

$$T_S^2 \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2 S_x(\omega) d\omega}{(1+(\omega T_S)^2)^i}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega}{1}$$

przy $k = 1$ i n naturalnych:

$$\sigma_y^2(K) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G^K(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega \quad (7)$$

$$\sigma_y^2(S) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G^S(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega \quad (8)$$

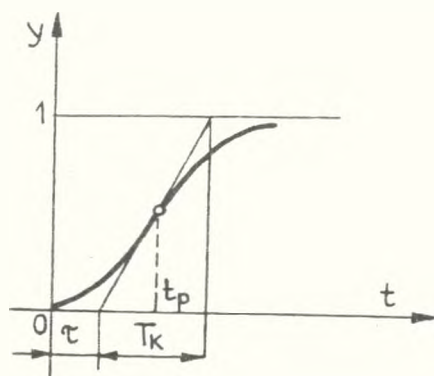
W zależnościach (3) + (8) $S_x(\omega)$ jest gęstością widmową mocy sygnału wejściowego.

Wyrażenia (4), (6) można obliczyć elementarnie tylko dla niektórych n ułamkowych.

Modele K i S przybliżać mają ten sam proces rzeczywisty. Zatem ich parametry T_K, τ, T_S, n mają być tak dobrane, aby ich odpowiedzi skokowe były bardzo bliskie obserwowanej odpowiedzi obiektu rzeczywistego. Ponieważ istnieje wiele metod i nomogramów obliczania tych parametrów zatem porównanie oraz ocena różnic między odpowiednimi charakterystykami probabilistycznymi modeli K, S i obiektu rzeczywistego odniesiona być musi do zastosowanych metod określania parametrów tych modeli dla tych samych obiektów. Problem ten rozpatrzmy dla konkretnego przypadku, w którym przyjmiemy - dla możliwości oceny różnic między odpowiednimi charakterystykami probabilistycznymi modeli K, S i obiektu - znaną strukturę obiektu. Niech transmitancja obiektu będzie równa

$$G(s) = \frac{k}{\prod_{i=1}^N (1 + sT_i)} \quad (9)$$

w której przykładowo $k=1$, $N=2$, $T_1 = 2 - \sqrt{3}$, $T_2 = 1$.
 Zgodnie z metodyką przedstawioną w [3] parametry modelu K dla obiektu (9) po odpowiednich obliczeniach i przekształceniach są równe (rys. 1):



Rys. 1

$$T_K = T_2 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{T_1}{T_1 - T_2}} \quad (10)$$

$$\tau = \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}} - T_2 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{T_1}{T_1 - T_2}} + T_1 + T_2 \quad (11)$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy $T_K = 1,619$; $\tau = 0,13$.
 Parametry T_K i τ określone na podstawie warunków podobieństwa transmitancji $G^K(s)$ i $G(s)$, tzn.

$$\left. \frac{d^i}{ds^i} G^K(s) \right|_{s=0} = \left. \frac{d^i}{ds^i} G(s) \right|_{s=0} \quad (12)$$

dla $i = 0, 1, 2$ są równe odpowiednio

$$T_K = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} \quad (13)$$

$$\tau = T_1 + T_2 - T_K \quad (14)$$

czyli po podstawieniu danych: $T_K = 1,035$; $\tau = 0,233$.
Różnica zatem między wartościami parametrów T_K i τ dobieranych za pomocą przedstawionych metod są dość znaczne.
Parametry modelu S określone według [11] wynoszą

$$n \approx 1 + 2\pi \left(\frac{t_p}{T_K} \right)^2 \quad (15)$$

$$T_S \approx \frac{t_p}{n - 1} \quad (16)$$

Dla rozpatrywanego obiektu współrzędna t_p punktu przegięcia odpowiedzi skokowej tego obiektu jest równa (rys. 1).

$$t_p = \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right) \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \quad (17)$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy $t_p = 0,4819$, $n = 1,556$,
 $T_S = 0,8659$. Parametry modelu S określone natomiast na podstawie warunków podobieństwa transmitancji $G^S(s)$ i $G(s)$,
tzn.

$$\left. \frac{d^i}{ds^i} G^S(s) \right|_{s=0} = \left. \frac{d^i}{ds^i} G(s) \right|_{s=0} \quad (18)$$

dla $i = 0, 1, 2$ dla rozpatrywanego obiektu wynoszą [15]

$$n = \left(\sum_{i=1}^N T_i \right)^2 \left(\sum_{i=1}^N T_i^2 \right)^{-1} \quad (19)$$

$$T_S = n^{-1} \left(\sum_{i=1}^N T_i \right) \quad (20)$$

Po podstawieniu danych mamy: $n = \frac{3}{2}$, $T_S = 0,845$.

Różnice między wartościami parametrów n oraz T_S dobieranymi zastosowanymi wyżej metodami są nieznaczące.

Równania (12) i (18) prowadzą do warunków podobieństwa modeli K oraz S , z których wynikają związki między ich parametrami

$$T_K = T_S \sqrt{n} \quad (21)$$

$$\tau = T_S (n - \sqrt{n}) \quad (22)$$

Wartości współczynników filtracji: modelu $K - K_F^K$, modelu $S - K_F^S$, obiektu opisanego równaniem (9) - K_F , obliczone według wzorów odpowiednio (3), (4) oraz

$$K_F = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)|^2 S_X(\omega) d\omega}} \quad (23)$$

przy założeniu, że na modele i obiekt działa identyczne wymuszenie stochastyczne, którego gęstość widmowa mocy jest dana wyrażeniem

$$S_x(\omega) = \begin{cases} A & \text{dla } 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \text{dla } \omega < 0 \text{ i } \omega > \omega_c \end{cases} \quad (24)$$

$A, \omega_c \in \mathbb{R}^+$, dla parametrów T_K, T_S, n dobranych różnymi metodami zestawione zostały w tabeli 1. Relacje określające te wielkości zamieszczono w dodatku. Również w dodatku zamieszczono relacje określające $\delta_{\mu_2}^K(0), \delta_{\mu_2}^S(0), \sigma_2(0), \sigma_y^2(K), \sigma_y^2(S), \sigma_y^2$.

Tabela 1

K_f^K	K_f^S	K_f	$\frac{K_f^K - K_f}{K_f} \cdot 100\%$	$\frac{K_f^S - K_f}{K_f} \cdot 100\%$	Uwagi
3,275	2,917	2,847	15,03	2,45	Parametry modelu K dobrane wg (10), (11) Parametry modelu S dobrane wg (19), (20)
2,649	2,917	2,847	-6,95	2,45	Parametry modeli K i S spełniają warunki podobieństwa (13), (14), (19), (20), (21), (22)

$$k = 1, \quad \omega_c = 10$$

Wartości względnej różnicy wariancji na wejściu i wyjściu: modelu K - $\delta_{\mu_2}^K(0)$, modelu S - $\delta_{\mu_2}^S(0)$, obiektu - $\delta_{\mu_2}(0)$ określone według wzorów odpowiednio (5), (6) oraz wyrażenia

$$\delta\mu_2(0) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} [1 - |G(j\omega)|^2] S_x(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega} \quad (25)$$

przy założeniu, że $S_x(\omega) = \frac{1}{2} A^2 \pi \delta(|\omega| - \omega_0)$, $A, \omega_0 \in \mathbb{R}^+$ zestawione zostały w tabeli 2.

Tabela 2

$\delta_{\mu_2^k}(0)$	$\delta_{\mu_2^S}(0)$	$\delta\mu_2(0)$	$\frac{\delta\mu_2^k(0) - \delta\mu_2(0)}{\delta\mu_2(0)} \cdot 100\%$	$\frac{\delta\mu_2^S(0) - \delta\mu_2(0)}{\delta\mu_2(0)} \cdot 100\%$	Uwagi
0,9627	0,9562	0,9461	1,75	1,06	Parametry modelu K dobrane wg (10), (11) Parametry modelu S dobrane wg (19), (20)
0,9137	0,9562	0,9451	-3,42	1,06	Parametry modeli K i S spełniają warunki podobieństwa (13), (14), (19), (20), (21), (22)

$$k = 1, \omega_0 = \pi$$

Wartości wariancji sygnału wyjściowego: modelu K - $\sigma_y^{2(K)}$, modelu S - $\sigma_y^{2(S)}$ i obiektu - σ_y^2 określone według wzorów odpowiednio (7), (8) oraz wyrażenia

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega \quad (26)$$

dla przyjętego wymuszenia o charakterze białego szumu, którego gęstość widmowa mocy jest równa jedności, zestawione zostały w tabeli 3.

Tabela 3

$\sigma_y^2(K)$	$\sigma_y^2(S)$	σ_y^2	$\frac{\sigma_y^2(K) - \sigma_y^2}{\sigma_y^2} \cdot 100\%$	$\frac{\sigma_y^2(S) - \sigma_y^2}{\sigma_y^2} \cdot 100\%$	Uwagi
0,308	0,3766	0,394	-21,83	-4,42	Parametry modelu K do- bierane wg (10), (11) Parametry modelu S do- bierane wg (13), (20)
0,483	0,3766	0,394	22,58	-4,42	Parametry modeli K i S spełniają warunki po- dobieństwa (13), (14), (19), (20), (21), (22)

k = 1

Wnioski (dla N=2) wynikają z tabel 1, 2, 3 i świadczą na korzyść stosowania modelu S do aproksymacji obiektów rzeczywistych w warunkach zakłóceń stochastycznych. Dla N > 2 problem ten zostanie rozpatrzony oddzielnie.

DODATEK

Wzory określające współczynniki filtracji przy wymuszeniu stochastycznym, którego gęstość widmowa mocy jest równa:

$$S_x(\omega) = \begin{cases} A & \text{dla } 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \text{dla } \omega > \omega_c \end{cases} \quad (27)$$

- modelu K

$$K_f^K = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\omega_c T_K}{\arctg \omega_c T_K}} \quad (28)$$

- modelu S

$$K_f^S = \frac{1}{k} \sqrt{\sqrt{1 + T_S^2 \omega_c^2}} \quad (29)$$

- obiektu

$$K_f = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\omega_c}{\frac{c}{h} \left(\frac{1}{c_f} \arctg \omega_c \sqrt{\frac{c}{f}} + \frac{1}{\sqrt{c_g}} \arctg \omega_c \right) \frac{c}{g}}}$$

gdzie $a=1$, $b=T_1^2+T_2^2$, $c=T_1^2 T_2^2$, $h = \sqrt{b^2 - 4ac}$,

$$f = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4ac}, \quad g = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Wzory określające względne różnice wariancji na wejściu i wyjściu przy wymuszeniu o gęstości widmowej mocy

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2} \pi A^2 \delta(|\omega| - \omega_0)$$

- modelu K (przy $k=1$)

$$\delta \mu_2^K(0) = \frac{\omega_0^2 T_K^2}{1 + \omega_0^2 T_K^2} \quad (30)$$

- modelu S (przy $k=1$)

$$\delta \mu_2^S(0) = 1 - \frac{1}{(1 + \omega_0^2 T_S^2)^n} \quad (31)$$

- obiektu (przy $k=1$)

$$\delta \mu_2(0) = 1 - \frac{1}{1 + (T_1^2 + T_2^2)\omega_0^2 + T_1^2 T_2^2 \omega_0^4} \quad (32)$$

Wzory określające wariancję wyjść przy wymuszeniu o charakterze białego szumu, którego gęstość widmowa mocy jest równa jedności oraz $k=1$, dla

- modelu K

$$\sigma_y^2(K) = \frac{1}{2T_K} \quad (33)$$

- modelu S

$$\sigma_y^2(S) = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega}{M} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi T_S} \quad (34)$$

$$\text{gdzie } M = \sqrt{T_S^2 \omega^2 + 1}$$

- obiektu

$$\sigma_y^2 = \frac{T_1 T_2}{2T_1 T_2 (T_1 + T_2)} \quad (35)$$

LITERATURA

- [1] D a v o u s t G.: Nomogrammes pour l'analyse et le réglage des systèmes industriels. Automatisme, avril, t. X, No 4, 1965, s. 139-144.

- [2] Elrazaz Z., Sinha N.K.: On the Selection of the Dominant Poles of a System to be Retained in a Low-Order Model. IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-24, 5, 1979, s. 792-793.
- [3] Findelsen W.: Technika regulacji automatycznej PWN, Warszawa 1978.
- [4] Föllinger C.: Reduction der Systemordnung. Regelungstechnik, 11, 1982, s. 367-377.
- [5] Górecki H.: Analiza i synteza układów regulacji z opóźnieniem. WNT, Warszawa 1971.
- [6] Kupfmüller K.: Über die Dynamik der selbsttätigen Verstärkungsregler. Zeitschrift für Techn. Physik 9, 1928, s. 469-472
- [7] Litiz L.: Reduktion der Ordnung linearer Zustandsraummodelle mittels modaler Verfahren. Hochschulverlag-Stuttgart 1979.
- [8] Litiz L.: Ordnungsreduktion linearer Zustandsraummodelle durch Beibehaltung der dominanten Eigenbewegungen. Regelungstechnik 3, 1979, s. 80-86.
- [9] Marshall S.A.: An Approximate Method for Reducing the Order of a Linear System. Control 12, 1966, s. 642-643.
- [10] Rac A.S., Lamba S.S., Vital Rao S.: Application of Routh Approximant Method for Reducing the Order of a Class of Time-Varying Systems. IEEE Trans. Autom. Contr., Vol AC-25, 1, 1980, s. 110-113.
- [11] Skoczowski S.: Einige Bemerkungen zur Approximierung von Regelstrecken mit Ausgleich. Regelungstechnik, Jg 31, Heft 7, 1983, s. 231-234.
- [12] Strejc W.: Näherungsverfahren für aperiodische Übergangscharakteristiken. Regelungstechnik 7, 1959, s. 124-128.

- [13] Szklarski L., Jaracz K., Víteček A.: Optymalizacja układów napędowych PWN, Warszawa 1989.
- [14] Trilling U., Klein H.J.: Erfahrungen bei der Reduktion der Ordnung linearer dynamischer Prozessmodelle höher Ordnung mit Hilfe von modelen Verfahren. Regelungstechnik 2, 1979, s. 37-45.
- [15] Żuchowski A.: O uproszczonych modelach dynamiki elementów inercyjnych. PAK nr 8-9, 1980, s. 292-294.
- [16] Żuchowski A.: O uproszczonym modelu dynamiki elementów z ułamkowym rzędem inercji. PAK nr 2, 1985, s. 48-50.