

Kazimierz Jaracz¹, Miluše Vitečková²

Projektowanie regulatorów konwencjonalnych metodą syntezy bezpośredniej

Ostatnio często pojawiają się prace opisujące projektowanie i dobór nastaw regulatorów konwencjonalnych opartych na równaniu syntezy lub na sterowaniu z modelem wewnętrznym (IMC) [1,3,5,6]. W niniejszym artykule przedstawiono procedurę projektowania regulatorów konwencjonalnych wykorzystującą równanie syntezy dla obiektów inercyjnych pierwszego rzędu z opóźnieniem. Podano tabelę z alternatywnymi wzorami określającymi parametry analogowych regulatorów konwencjonalnych.

Metoda syntezy bezpośredniej

Na rys. 1 przedstawiono schemat blokowy prostego układu regulacji, w którym: $G_R(s)$ – transmitancja regulatora, $G_{OB}^{OP}(s)$ – transmitancja obiektu, $W(s)$ – wielkość zadana, $V(s)$ – wielkość zakłócająca, $Y(s)$ – wielkość regulowana.

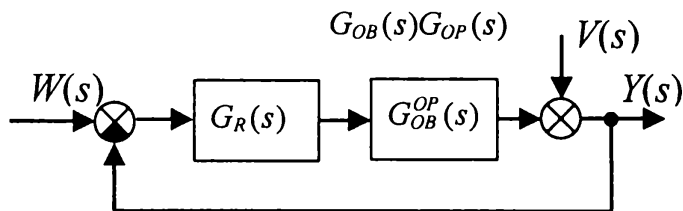
Dla układu regulacji na rys. 1 słuszna jest zależność [4]

$$G_R(s) = \frac{1}{G_{OB}^{OP}(s)} \frac{G_{wy}^*(s)}{1 - G_{wy}^*(s)} \quad (1)$$

gdzie: $G_{wy}^*(s)$ – pożądana transmitancja układu regulacji.

¹ Akademia Pedagogiczna w Krakowie.

² VŠB – Uniwersytet Techniczny Ostrawa.



Rys. 1. Schemat układu regulacji

Z kolei zakłada się, że transmitancja obiektu ma postać

$$G_{OB}^{OP}(s) = G_{OB}(s)G_{OP}(s) \quad (2)$$

gdzie: $G_{OB}(s)$ – czynnik odwracalny transmitancji (z minimalną fazą), $G_{OP}(s)$ – czynnik nieodwracalny transmitancji (z nieminimalną fazą, który najczęściej reprezentowany jest przez element opóźniający).

Zależność (1) nazywa się równaniem syntezy i stosuje się ją do projektowania regulatorów syntezy bezpośrednią.

Pożądaną transmitancję układu regulacji $G_{wy}^*(s)$ przyjmuje się w postaci

$$G_{wy}^*(s) = G_{wy}(s)G_{OP}(s) \quad (3)$$

gdzie: $G_{OP}(s)$ – czynnik nieodwracalny, zgodny z odpowiednim czynnikiem transmitancji obiektu (2), $G_{wy}(s)$ – czynnik transmitancji układu regulacji najczęściej o postaci członu inercyjnego pierwszego lub drugiego rzędu.

Po podstawieniu (2) i (3) do (1) ostatecznie otrzyma się równanie syntezy o postaci

$$G_R(s) = \frac{1}{G_{OB}(s)} \frac{G_{wy}(s)}{1 - G_{wy}(s)G_{OP}(s)} \quad (4)$$

Projektowanie regulatorów

Metoda syntezy bezpośredniej jest metodą bardzo ogólną, która umożliwiła zaprojektowanie regulatorów odpowiadających różnym warunkom i ograniczeniom [1]. W niniejszej pracy metoda syntezy bezpośredniej została zastosowana do zaprojektowania analogowych konwencjonalnych regulatorów PI, PID i PID_i (tab. 1) dla obiektu inercyjnego pierwszego rzędu z opóźnieniem o transmitancji

$$G_{OB}^{OP}(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} e^{-T_o s}, \quad G_{OB}(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1}, \quad G_{OP}(s) = e^{-T_o s} \quad (5)$$

gdzie: k_1 – wzmacnienie obiektu, T_1 – stała czasowa obiektu, T_o – opóźnienie obiektu.

Dla regulatorów PID i PID_i może zostać zastosowany filtr włączony szeregowo z regulatorem o transmitancji

$$G_{RF}(s) = \frac{1}{T_F s + 1} \quad (6)$$

gdzie: T_F – stała czasowa filtra.

Następnie zakłada się, że pożądana transmitancja układu regulacji ma postać

$$G_{wy}^*(s) = \frac{1}{T_w s + 1} e^{-T_o s}, \quad G_{wy}(s) = \frac{1}{T_w s + 1}, \quad G_{OP}(s) = e^{-T_o s} \quad (7)$$

gdzie: T_w – stała czasowa układu regulacji.

| Regulator | |
|-----------|--|
| Rodzaj | Transmitancja |
| PI | $k_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right)$ |
| PID | $k_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \frac{1}{T_F s + 1}$ |
| PID_i | $k_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) (1 + T_D s) \frac{1}{T_F s + 1}$ |

Tabela 1. Transmitancje regulatorów konwencjonalnych

| | Aproksymacja transmitancji (5) | $G_{OB}(s)$ | $G_{OP}(s)$ | Notatka |
|---|--|--|-----------------------|---|
| 1 | $\frac{k_1}{(T_1 + T_o)s + 1}$ | $\frac{k_1}{(T_1 + T_w)s + 1}$ | 1 | Tab. 3, wiersz 1 |
| 2 | $\frac{k_1}{\left(T_1 + \frac{T_o}{2}\right)s + 1} e^{-\frac{T_o}{2}s}$ | $\frac{k_1}{\left(T_1 + \frac{T_o}{2}\right)s + 1}$ | $e^{-\frac{T_o}{2}s}$ | Aproksymacja (9), tab. 3, wiersz 2 |
| 3 | $\frac{k_1}{\left[\left(T_1 + \frac{T_o}{2}\right)s + 1\right] \left[\frac{T_o}{2}s + 1\right]}$ | $\frac{k_1}{\left[\left(T_1 + \frac{T_o}{2}\right)s + 1\right] \left[\frac{T_o}{2}s + 1\right]}$ | 1 | Tab. 3, wiersze 4 i 5 |
| 4 | $\frac{k_1}{(T_1 s + 1) \left(\frac{T_o}{2}s + 1\right)} e^{-\frac{T_o}{2}s}$ | $\frac{k_1}{(T_1 s + 1) \left(\frac{T_o}{2}s + 1\right)}$ | $e^{-\frac{T_o}{2}s}$ | Aproksymacja (9), tab. 3, wiersze 6 i 7 |

Tabela 2. Aproksymacja transmitancji obiektu (5)

Po podstawieniu (5) i (7) do (4) otrzyma się transmitancję regulatora o postaci

$$G_R(s) = \frac{T_1 s + 1}{k_1 (T_w s + 1 - e^{-T_o s})} \quad (8)$$

którą po zastosowaniu aproksymacji

$$e^{-x} \approx 1 - x \quad (9)$$

można przekształcić do postaci transmitancji konwencjonalnego regulatora PI (tab. 1) o parametrach strojenia (tab. 3, wiersz 3)

$$k_P^* = \frac{T_1}{k_1 (T_w + T_o)}, \quad T_i^* = T_1 \quad (10)$$

| | | Regulator | | | |
|---|------------------|--------------------------------------|-----------------------|--|--------------------------------|
| | Rodzaj | k_p^* | T_i^* | T_d^* | T_F |
| 1 | PI | $\frac{T_1 + T_o}{k_1 T_w}$ | $T_1 + T_o$ | – | – |
| 2 | | $\frac{2T_1 + T_o}{k_1(2T_w + T_o)}$ | $T_1 + \frac{T_o}{2}$ | – | – |
| 3 | | $\frac{T_1}{k_1(T_w + T_o)}$ | T_1 | – | – |
| 4 | PID _i | $\frac{2T_1 + T_o}{2k_1 T_w}$ | $T_1 + \frac{T_o}{2}$ | $\frac{T_o}{2}$ | – |
| 5 | PID | $\frac{T_1 + T_o}{k_1 T_w}$ | $T_1 + T_o$ | $\frac{(2T_1 + T_o)T_o}{4(T_1 + T_o)}$ | – |
| 6 | PID _i | $\frac{2T_1}{k_1(2T_w + T_o)}$ | T_1 | $\frac{T_o}{2}$ | – |
| 7 | PID | $\frac{2T_1 + T_o}{k_1(2T_w + T_o)}$ | $T_1 + \frac{T_o}{2}$ | $\frac{T_1 T_o}{2T_1 + T_o}$ | – |
| 8 | PID _i | $\frac{T_1}{k_1(T_w + T_o)}$ | T_1 | $\frac{T_o}{2}$ | $\frac{T_w T_o}{2(T_w + T_o)}$ |
| 9 | PID | $\frac{2T_1 + T_o}{2k_1(T_w + T_o)}$ | $T_1 + \frac{T_o}{2}$ | $\frac{T_1 T_o}{2T_1 + T_o}$ | $\frac{T_w T_o}{2(T_w + T_o)}$ |

Tabela 3. Wartości parametrów strojenia regulatorów dla obiektu (5)

Jeśli zastosować aproksymację

$$e^{-x} \approx \left(1 - \frac{x}{2}\right) / \left(1 + \frac{x}{2}\right) \quad (11)$$

to otrzyma się transmitancję regulatora PID_i z interakcją o parametrach (tab. 3, wiersz 8)

$$k_P^* = \frac{T_1}{k_1(T_w + T_o)}, \quad T_i^* = T_1, \quad T_d^* = \frac{T_o}{2}, \quad T_F^* = \frac{T_w T_o}{2(T_w + T_o)} \quad (12)$$

Dla regulatora PID bez interakcji odpowiednie wzory określające parametry można otrzymać po prostych przekształceniach (tab. 3, wiersz 9) [4].

Z przedstawionego postępowania wynika, że wybór postaci aproksymacyjnej zarówno czynnika $G_{OB}(s)$, jak i czynnika $G_{OP}(s)$ transmitancji obiektu (5) implikuje różne transmitancje regulatorów $G_R(s)$, a więc i różne wzory do obliczeń wartości ich parametrów.

Kolejne możliwe aproksymacje obu czynników przedstawione są w tabeli 2. Odpowiadające im regulatory oraz wzory określające ich parametry umieszczono w tabeli 3. Jest oczywiste, że od zastosowanej aproksymacji będzie zależała również jakość procesu regulacji. Za pomocą weryfikacji symulacyjnej stwierdzono, że najlepsze wyniki z punktu widzenia jakości i odporności regulacji uzyskano dla parametrów z wierszy 3 i 6–9 w tabeli 3, nawet bez wykorzystania filtra (6), tj. dla $T_F = 0$.

Wzory wymienione w tabeli 3 są odpowiednie w przybliżeniu dla $T_1 < 8T_o$, w odwrotnym przypadku odpowiedź na zakłócenie oddziałujące na wejście obiektu jest zbyt wolna [3].

Stałą czasową układu regulacji T_w często oznacza się jako λ i wtedy mówi się o λ – strojeniu regulatorów. Stała czasowa T_w jest parametrem strojenia, który pozwala przeprowadzić proces regulacji według zadanych wymagań. Jako rozsądną wartością początkową wydaje się przyjęcie $T_w = T_o$. Wyższa wartość jest odpowiednia dla większego opóźnienia i dla regulatorów PI.

Przykład obliczeniowy

Dla układu regulacji z obiektem inercyjnym pierwszego rzędu i opóźnieniem o transmitancji danej wyrażeniem

$$G_{OB}^{OP}(s) = \frac{1}{10s + 1} e^{-10s}$$

należy określić wartości parametrów strojenia regulatorów PI i PID na podstawie tabeli 3, (wiersze 3 i 9), które zapewnią przeregulowanie około 5%.

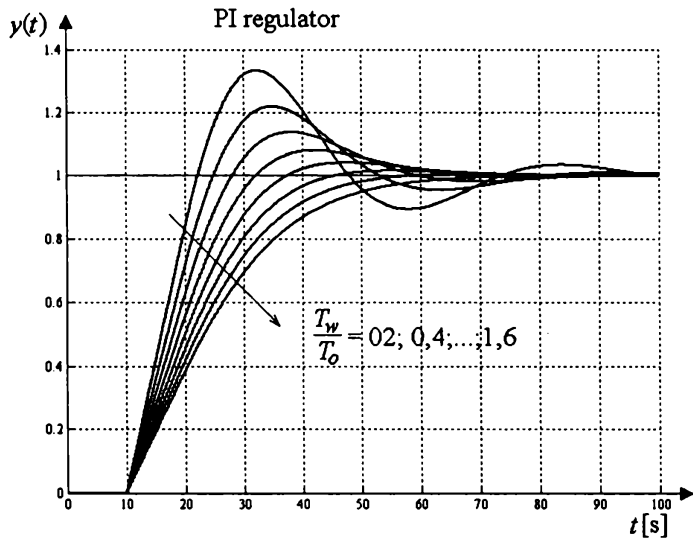
Rozwiązanie:

PI regulator (tab. 3, wiersz 3)

$$T_i^* = T_1 = 10$$

$$k_p^* = \frac{T_1}{k_1(T_w + T_o)} = \frac{T_1}{k_1 T_o \left(\frac{T_w}{T_o} + 1 \right)} = \frac{1}{\left(\frac{T_w}{10} + 1 \right)}$$

Odpowiedzi skokowe dla wartości $\frac{T_w}{T_o} = 0,2; 0,4; \dots; 1,6$ (skok 0,2) przedstawiono na rys. 2. Widoczne jest, że wymagane przeregulowanie około 5% występuje dla wartości $\frac{T_w}{T_o} = 1$.



Rys. 2. Odpowiedzi skokowe dla regulatora PI

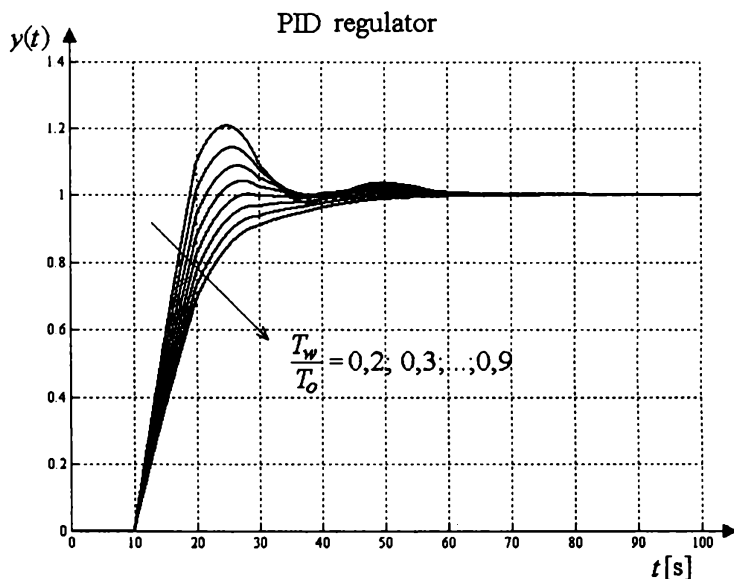
PID regulator – (tab. 3, wiersz 9, bez filtru)

$$T_i^* = T_1 + \frac{T_o}{2} = 15$$

$$T_d^* = \frac{T_1 T_o}{2T_1 + T_o} \doteq 3,33$$

$$k_p^* = \frac{2T_1 + T_o}{2k_1(T_w + T_o)} = \frac{2T_1 + T_o}{2k_1 T_o \left(\frac{T_w}{T_o} + 1 \right)} = \frac{1,5}{\left(\frac{T_w}{10} + 1 \right)}$$

Odpowiedzi skokowe dla wartości $\frac{T_w}{T_o} = 0,2; 0,3; \dots; 0,9$ (skok 0,1) zaprezentowano na rys. 3. Przeregulowanie około 5% występuje dla wartości $\frac{T_w}{T_o} = 0,5$.



Rys. 3. Odpowiedzi skokowe dla regulatora PID

Wnioski

W artykule zaprezentowano projektowanie analogowych regulatorów konwencjonalnych metodą syntezy bezpośredniej. Dla obiektu inercyjnego pierwszego rzędu z opóźnieniem uzyskano wzory dla parametrów regulatorów i zestawiono je w przejrzystej tabeli. Uzyskane wzory zapewniają dobrą jakość i odporność procesu regulacji i umożliwiają dostrojenie go do założonych wymagań za pomocą jednego parametru T_w .

Bibliografia

- [1] Ogunnaike B.A., Ray W.H., *Process Dynamics, Modelling and Control*, Oxford University Press, New York–Oxford 1994
- [2] Rivera D.E., Morari M., *Internal Model Control. 4. PID Controller Design*. Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev. Vol. 25, 1/1986, p. 252–265

- [3] Skogestad S., *Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning*, Journal of Process Control 13, 2003, p. 291–309
- [4] Šulc B., Vitečková M., *Teorie a praxe návrhu regulačních obvodů*. Vydavatelství ČVUT, Praha 2004
- [5] Tarnowski W., *Projektowanie układów regulacji automatycznej ciągłych z liniowymi korektorami ze wspomaganie za pomocą MATLAB'a*, Wydawnictwo Uczelniane Polit. Koszalińskiej, Koszalin 2001
- [6] Vitečková M., *Jednoduché seřízení regulátorů metodou SIMC*. AT&P journal PLUS 2/2006, s. 50–54

Conventional controller design by direct synthesis method

Abstract

The paper is devoted to a conventional controller design by the direct synthesis method. On the basis of synthesis equation for the first order plant plus time delay the computational formulas for controller adjustable parameters are derived.

Key words: direct synthesis, PID, PD, time delay