

Milúše Vitečková¹, Kazimierz Jaracz²

Analityczna metoda strojenia regulatorów cyfrowych i analogowych dla inercyjnych obiektów pierwszego rzędu z opóźnieniem

W literaturze opisanych jest wiele metod doboru nastaw regulatorów konwencjonalnych [1÷10]. Zaprezentowana w niniejszym artykule nowa analityczna metoda stanowi jednolite podejście w określaniu parametrów konwencjonalnych regulatorów cyfrowych i analogowych drogą analityczną dla inercyjnych obiektów pierwszego rzędu z opóźnieniem, których L-transmitancja ma postać:

$$G_{OB}(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} e^{-T_{o1}s} \quad (1)$$

gdzie: k_1 – wzmacnienie obiektu, T_1 – stała czasowa obiektu, T_{o1} – opóźnienie obiektu, s – zmienna zespolona w przekształceniu L (przekształceniu Laplace'a).

Przedstawiona metoda jest oparta na rzeczywistym biegunie wielokrotnym i przekształceniu D. Otrzymane nastawy zapewniają otrzymanie przebiegu wielkości regulowanej o charakterze nieoscylacyjnym bliskim aperiodycznemu krytycznemu. Zastosowanie metody przedstawiono na przykładzie.

Przekształcenie D

Zastosowanie przekształcenia D do wyprowadzenia wzorów dla określenia parametrów strojenia regulatorów pozwala na uzyskanie jednolitych obliczeniowych wzorów tak dla regulatorów cyfrowych, jak i regulatorów analogowych. Podejście to oparte jest na delta modelach i właściwościach względnej różnicy progresywnej

¹ VŠB – Uniwersytet Techniczny Ostrawa.

² Akademia Pedagogiczna w Krakowie.

$$\delta x(kT) = \frac{x[(k+1)T] - x(kT)}{T} \quad (2)$$

dla której istotna jest zależność

$$\lim_{T \rightarrow 0} \delta x(kT) = \dot{x}(kT) \quad (3)$$

Gdzie: δ – operator względnej różnicy progresywnej (delta operator), T – okres próbkowania, k – względny czas dyskretny ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Przekształcenie D definiowane jest za pomocą wzorów [2, 3, 7, 9]:

$$X(\gamma) = D\{x(kT)\} = T \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)(1 + \gamma T)^{-k} \quad (4a)$$

$$x(kT) = D^{-1}\{X(\gamma)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(\gamma)(1 - \gamma T)^{k-1} d\gamma \quad (4b)$$

Gdzie: x – oryginał, X – transformata, D i D^{-1} – operatory bezpośredniego i odwrotnego przekształcenia, γ – zmienna zespolona w przekształceniu D .

Droga całkowania C powinna leżeć w obszarze zbieżności transformaty $X(\gamma)$ i zawierać wszystkie punkty osobliwe. Ograniczenia dla oryginałów są takie same, jak dla przekształcenia Z . Szczegółowe lematy i twierdzenia można znaleźć w publikacjach [2, 3, 8, 9].

Między przekształceniami L , Z i D istotne są relacje:
dotyczące zmiennych zespolonych

$$s = \lim_{T \rightarrow 0} \gamma \quad (5a)$$

$$z = \gamma T + 1 \quad (5b)$$

dotyczące transformat zmiennych

$$X(s) = \lim_{T \rightarrow 0} X(\gamma) \quad (6a)$$

$$X(z) = \frac{1}{T} X(\gamma) \Big|_{\gamma = \frac{z-1}{T}} \quad (6b)$$

dotyczące transmitancji

$$G(s) = \lim_{T \rightarrow 0} G(\gamma) \quad (7a)$$

$$G(z) = G(\gamma) \Big|_{\gamma = \frac{z-1}{T}} \quad (7b)$$

gdzie z jest zmienną zespoloną w przekształceniu Z .

W przypadku zastosowania w układzie regulacji z regulatorem cyfrowym przetwornika D/A (ekstrapolatora zerowego rzędu), to D-transmitancja obiektu dana jest zależnością [2, 3, 7÷9]

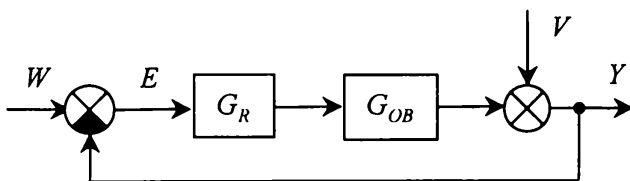
$$G_{OB}(\gamma) = \frac{\gamma}{\gamma T + 1} D \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{G_{OB}(s)}{s} \right\} \right\}_{t=kT} \quad (8)$$

Bardzo obszerne tabele przekształcenia D można znaleźć np. w publikacji [9]. Tabele te upraszczają w znacznym stopniu obliczenia oparte na przekształceniu D.

Dla L-transmitancji obiektu (1) odpowiadająca mu D-transmitancja określona na podstawie (8) dana jest wyrażeniem

$$G_{OB}(\gamma) = \frac{ak_1}{\gamma T + a} (\gamma T + 1)^{-d}, \quad d = \frac{T_{ol}}{T}, \quad a = 1 - e^{-\frac{T}{T_1}} \quad (9)$$

Gdzie: d – względne opóźnienie dyskretne (dla prostoty zakłada się, że jest wielokrotnością okresu próbkowania).



Rys. 1. Schemat układu regulacji

W układzie regulacji przedstawionym na rys. 1 zastosowano regulator konwencjonalny o transmitancji G_R (tab. 1), dla którego odpowiedź sygnału wyjściowego obiektu na skokową zmianę sygnału zadającego lub zakłócającego działającego na wyjściu obiektu, ma charakter nieoscylacyjny krytyczny z zerowym uchybem ustalonym. Na rys. 1 poszczególne symbole: W , V i Y są odpowiednio transformacjami sygnału zadającego w , zakłócającego v i regulowanego y .

Ponieważ obiekt ma charakter statyczny, rozpatrywane są tylko regulatory o działaniu całkującym, tj. regulator typu I, PI, PID, zgodnie z tabelą 1, gdzie: k_p – jest wzmocnieniem regulatora, T_i – czasem zdwojenia (stałą całkującą), T_d – czasem wyprzedzenia (stałą różniczkującą).

Metoda wielokrotnego biegunu dominującego

Metoda wielokrotnego biegunu dominującego oparta jest na założeniu, że biegun dominujący układu regulacji jest wielokrotny i rzeczywisty, który zapewnia stabilny nieoscylacyjny (aperiodyczny) proces regulacji bliski procesowi krytycznemu. Jednocześnie zakłada się, że wpływ biegunów niedominujących oraz zer jest znikomy i można go zaniedbać. Wielokrotność określona jest ilością parametrów strojenia regulatora powiększoną o 1 [7, 8].

Wielomian charakterystyczny układu regulacji (rys. 1) $N(\gamma)$ może zostać określony na podstawie D-transmitancji układu otwartego. Wynosi on

$$G_o(\gamma) = G_R(\gamma)G_{OB}(\gamma) = \frac{M_o(\gamma)}{N_o(\gamma)} \quad N(\gamma) = N_o(\gamma) + M_o(\gamma)$$

Wielokrotny biegun dominujący stanowi rozwiązanie układu równań

$$\frac{d^i N(\gamma)}{d^i \gamma} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (10)$$

gdzie m jest liczbą parametrów strojonego regulatora.

Postępowanie przy doborze nastaw regulatora będzie przedstawione na przykładzie regulatora typu I.

D-transmitancja układu otwartego i wielomian charakterystyczny mają postać odpowiednio:

$$G_o(\gamma) = G_R(\gamma)G_{OB}(\gamma) = \frac{ak_1}{T_i\gamma(\gamma T + a)}(\gamma T + 1)^{-(d-1)}$$

$$N(\gamma) = T_i\gamma(\gamma T + a)(\gamma T + 1)^{d-1} + ak_1$$

m	Rodzaj	$G_R(\gamma)$	$G_R(s)$	$G_R(z)$
1	I	$\frac{\gamma T + 1}{T_i \gamma}$	$\frac{1}{T_i s}$	$\frac{T}{T_i} \frac{z}{z-1}$
2	PI	$k_p \left(1 + \frac{\gamma T + 1}{T_i \gamma} \right)$	$k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$	$k_p \left(1 + \frac{T}{T_i} \frac{z}{z-1} \right)$
3	PID	$k_p \left(1 + \frac{\gamma T + 1}{T_i \gamma} + \frac{T_d \gamma}{\gamma T + 1} \right)$	$k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$	$k_p \left(1 + \frac{T}{T_i} \frac{z}{z-1} + \frac{T_d}{T} \frac{z-1}{z} \right)$

Tabela 1. Transmitancje regulatorów

Regulator typu I ma tylko jeden parametr T_i , zatem $m = 1$ i na podstawie (10) otrzymuje się dwa równania:

$$N(\gamma) = 0 \Rightarrow T_i \gamma (\gamma T + a) (\gamma T + 1)^{d-1} + ak_1 = 0$$

$$\frac{dN(\gamma)}{d\gamma} = 0 \Rightarrow (d+1)\gamma^2 T^2 + (ad+2)\gamma T + a = 0$$

Z drugiego równania obliczono biegun podwójny (11) – w dziedzinie zmiennej zespolonej γ . Ze względu na to, że biegun musi być dominujący, należy przed pierwiastkiem uwzględnić znak plus. Łatwo sprawdzić, że uzyskany biegun podwójny jest stabilny.

Po podstawieniu bieguna podwójnego (11) do pierwszego równania można określić stałą całkowania (12) dla regulatora typu I.

Dla okresu próbkowania dążącego do zera, tj. dla $T \rightarrow 0$, można otrzymać odpowiednie wzory określając biegun podwójny w dziedzinie zmiennej zespolonej s [wzory (13), (14)] dla regulatora analogowego typu I.

W taki sam sposób można otrzymać odpowiednie zależności określające parametry regulatorów cyfrowych i analogowych typu PI, PID [wzory (15) ÷ (20) i (22) ÷ (29)]. Parametry te oznaczono gwiazdką *.

Regulator (cyfrowy) I

$$\gamma_2^* = -\frac{ad+2}{2(d+1)T} + \sqrt{\frac{a^2 d^2 - 4a + 4}{4(d+1)^2 T^2}} < 0 \quad (11)$$

$$T_i^* = T_i^*(\gamma_2^*) = -\frac{ak_1}{\gamma_2^* (\gamma_2^* T + a) (\gamma_2^* T + 1)^{d-1}} \quad (12)$$

Regulator (analogowy) I

$$s_2^* = \lim_{T \rightarrow 0} \gamma_2^* = -\frac{1}{T_{o1}} - \frac{1}{2T_1} + \sqrt{\frac{1}{T_{o1}^2} + \frac{1}{4T_1^2}} < 0 \quad (13)$$

$$T_i^* = T_i^*(s_2^*) = \lim_{T \rightarrow 0} T_i^*(\gamma_2^*) = -\frac{k_1}{s_2^* (T_1 s_2^* + 1) e^{T_{o1} s_2^*}} \quad (14)$$

Regulator (cyfrowy) PI

$$\gamma_3^* = -\frac{ad+4}{2(d+2)T} + \sqrt{\frac{(a^2 d^2 + a^2 d - 8a + 8)d}{4(d+1)(d+2)^2 T^2}} < 0 \quad (15)$$

$$k_p^* = k_p^*(\gamma_3^*) = -\frac{1}{ak_1} \left[T^2(d+1)\gamma_3^{*2} + T(ad+2)\gamma_3^* + a \right] (\gamma_3^*T+1)^d \quad (16)$$

$$T_i^* = T_i^*(\gamma_3^*) = -\frac{\left[T^2(d+1)\gamma_3^{*2} + T(ad+2)\gamma_3^* + a \right] (\gamma_3^*T+1)}{\gamma_3^{*2}T \left[T(d+1)\gamma_3^* + ad+1 \right]} \quad (17)$$

Regulator (analogowy) PI

$$s_3^* = \lim_{T \rightarrow 0} \gamma_3^* = -\frac{2}{T_{o1}} - \frac{1}{2T_1} + \sqrt{\frac{2}{T_{o1}^2} + \frac{1}{4T_1^2}} < 0 \quad (18)$$

$$k_p^* = k_p^*(s_3^*) = \lim_{T \rightarrow 0} k_p^*(\gamma_3^*) = -\frac{1}{k_1} \left[T_{o1}T_1s_3^{*2} + (2T_1 + T_{o1})s_3^* + 1 \right] e^{T_{o1}s_3^*} \quad (19)$$

$$T_i^* = T_i^*(s_3^*) = \lim_{T \rightarrow 0} T_i^*(\gamma_3^*) = -\frac{T_{o1}T_1s_3^{*2} + (2T_1 + T_{o1})s_3^* + 1}{s_3^{*2}(T_{o1}T_1s_3^* + T_1 + T_{o1})} \quad (20)$$

Stabilne zero w liczniku transmitancji układu regulacji ma dodatni wpływ na szybkość odpowiedzi. Dla $T_{o1} < T_1$ stabilne zero powoduje przeregulowanie, które praktycznie dla $T_{o1} > 0,7T_1$ jest znikome.

Dla regulatora PI przeregulowanie zależne jest również od okresu próbkowania T . Dla większej wartości T powstaje ono przy niższych wartościach ilorazu $T_{o1} < T$.

Dla $T_{o1} < 0,8T_1$ stała całkowania powinna być określona z zależności:

$$T_i^* = T_1 - 0,5T \quad (21)$$

Natomiast wartość obliczonego wzmocnienia regulatora k_p^* należy pozostawić na obliczonym poziomie. W tym przypadku przeregulowanie nie przekroczy 2%. W każdym przypadku jeśli wystąpi niepożądane przeregulowanie, należy zwiększyć wartość stałej całkowania T_i (w żadnym przypadku nie należy obniżać wartości wzmocnienia regulatora k_p).

Regulator (cyfrowy) PID

$$\gamma_4^* = -\frac{ad+6}{2(d+3)T} + \sqrt{\frac{a^2d^3 + 2a^2d^2 + 12(1-a)d}{4(d+2)(d+3)^2T^2}} < 0 \quad (22)$$

$$k_p^* = k_p^*(\gamma_4^*) = \frac{1}{ak_1} \left\{ T^4\gamma_4^{*4}(d+1)(d+2) + T^3\gamma_4^{*3} [(a+1)d^2 + (a+6)d + 5] + \right. \quad (23)$$

$$\left. + T^2\gamma_4^{*2} [ad^2 + (2a+3)d + 3] + aT\gamma_4^*(d-1) - a \right\} (\gamma_4^*T+1)^{d-1}$$

$$T_i^* = T_i^*(\gamma_4^*) = -2 \left\{ T^4 \gamma_4^{*4} (d+1)(d+2) + T^3 \gamma_4^{*3} [(a+1)d^2 + (a+6)d + 5] + \right. \\ \left. + T^2 \gamma_4^{*2} [ad^2 + (2a+3)d + 3] + aT\gamma_4^*(d-1) - a \right\} \left\{ T^2 \gamma_4^{*3} (d+1)[T(d+2)\gamma_4^* + ad + 2] \right\} \quad (24)$$

$$T_d^* = T_d^*(\gamma_4^*) = -\frac{T}{2} \left\{ T^4 \gamma_4^{*4} (d+1)(d+2) + T^3 \gamma_4^{*3} [(a+2)d^2 + (a+10)d + 8] + \right. \\ \left. + T^2 \gamma_4^{*2} [(2a+1)d^2 + (4a+11)d + 12] + T\gamma_4^*[ad^2 + (5a+4)d + 8] + 2(ad+1) \right\} \\ \left\{ T^4 \gamma_4^{*4} (d+1)(d+2) + T^3 \gamma_4^{*3} [(a+1)d^2 + (a+6)d + 5] + T^2 \gamma_4^{*2} [ad^2 + (2a+3)d + 3] + aT\gamma_4^*(d-1) - a \right\} \quad (25)$$

Regulator (analogowy) PID

$$s_4^* = \lim_{T \rightarrow 0} \gamma_4^* = -\frac{3}{T_{01}} - \frac{1}{2T_1} + \sqrt{\frac{3}{T_{01}^2} + \frac{1}{4T_1^2}} < 0 \quad (26)$$

$$k_p^* = k_p^*(s_4^*) = \lim_{T \rightarrow 0} k_p^*(\gamma_4^*) = \frac{1}{k_1} \left[T_{01}^2 T_1 s_4^{*3} + (3T_{01}T_1 + T_{01}^2) s_4^{*2} + T_{01} s_4^* - 1 \right] e^{T_{01} s_4^*} \quad (27)$$

$$T_i^* = T_i^*(s_4^*) = \lim_{T \rightarrow 0} T_i^*(\gamma_4^*) = -2 \frac{T_{01}^2 T_1 s_4^{*3} + (3T_{01}T_1 + T_{01}^2) s_4^{*2} + T_{01} s_4^* - 1}{s_4^{*3} (T_{01}^2 T_1 s_4^* + 2T_{01}T_1 + T_{01}^2)} \quad (28)$$

$$T_d^* = T_d^*(s_4^*) = \lim_{T \rightarrow 0} T_d^*(\gamma_4^*) = -\frac{1}{2} \frac{T_{01}^2 T_1 s_4^{*2} + (4T_{01}T_1 + T_{01}^2) s_4^* + 2T_{01} + 2T_1}{T_{01}^2 T_1 s_4^{*3} + (3T_{01}T_1 + T_{01}^2) s_4^{*2} + T_{01} s_4^* - 1} \quad (29)$$

Dla cyfrowego i analogowego regulatora typu PID przeregulowanie nie powstaje, jeśli $T_{01} \geq 2T_1$. Dla $T_{01} > 1,4T_1$ przeregulowanie jest praktycznie zerowe. Dla większych wartości T przeregulowanie pojawia się dla niższych wartości ilorazu T_{01}/T_1 .

Dla $T_{01} < 1,6T_1$ stała całkowania powinna być określona z zależności:

$$T_i^* = 1,3T_1 - T \quad (30)$$

natomiast wzmocnienie regulatora k_p^* należy pozostawić na obliczonej wartości. W tym przypadku przeregulowanie nie przekroczy 2%. W każdym przypadku, jeśli wystąpi niepożądane przeregulowanie, należy zwiększyć wartość stałej całkowania T_i (w żadnym przypadku nie należy obniżać wartości wzmocnienia regulatora k_p).

Przykład

Dla obiektu określonego L-transmitancją o postaci:

$$G_{OB}(s) = \frac{1}{10s + 1} e^{-20s}$$

należy dobrać nastawy cyfrowych i analogowych regulatorów I, PI i PID metodą wielokrotnego bieguna dominującego.

Rozwiązanie:

Parametry obiektu są następujące: $k_1 = 1$, $T_1 = 10$ s, $T_{o1} = 20$ s .

Dla regulatorów cyfrowych dobrano okres próbkowania $T = 4$ s, wtedy względne opóźnienie dyskretne wynosi $d = \frac{T_{o1}}{T} = 5$ i stałą $a = 1 - e^{-\frac{T}{T_1}} \doteq 0,3297$.

Regulator (cyfrowy) I [wzory (11) i (12)]

$$\gamma_2^* \doteq -1,642; \quad T_i^* \doteq 86,98$$

Regulator (analogowy) I [wzory (13) i (14)]

$$s_2^* \doteq -0,03; \quad T_i^* \doteq 86,74$$

Regulator (cyfrowy) PI [wzory (15) ÷ (17)]

$$\gamma_3^* \doteq -0,053; \quad k_p^* \doteq 0,16; \quad T_i^* \doteq 8,87$$

Regulator (analogowy) PI [wzory (18) ÷ (20)]

$$s_3^* \doteq -0,063; \quad k_p^* \doteq 0,21; \quad T_i^* \doteq 10,52$$

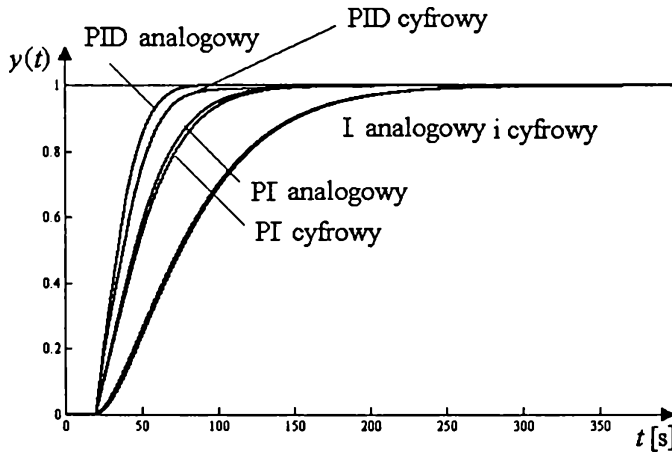
Regulator (cyfrowy) PID [wzory (22) ÷ (25)]

$$\gamma_4^* \doteq -0,074; \quad k_p^* \doteq 0,28; \quad T_i^* \doteq 12,32; \quad T_d^* \doteq 2,77$$

Regulator (analogowy) PID [wzory (26) ÷ (29)]

$$s_4^* \doteq -0,1; \quad k_p^* \doteq 0,41; \quad T_i^* \doteq 15; \quad T_d^* \doteq 3,33$$

Odpowiedzi skokowe przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Odpowiedzi skokowe układu regulacji dla rozpatrywanego przykładu

Wnioski

Analityczna metoda wielokrotnego bieguna dominującego dla inercyjnych obiektów pierwszego rzędu z opóźnieniem daje dla konwencjonalnych regulatorów cyfrowych i analogowych bardzo dobre rezultaty. Otrzymane przebiegi odpowiedzi skokowych są w przybliżeniu krytyczne nieoscylacyjne (aperiodyczne). Zastosowanie przekształcenia D umożliwiło jednolite podejście do układów dyskretnych i ciągłych. W przypadku potrzeby uzyskania „szybszych” odpowiedzi można obniżyć wartość stałej całkowania.

Bibliografia

- [1] Filasová A., *Robust Decentralized Regulator for System with Unknown Uncertainty Boundaries*, [in:] *Process Control '99: Proceedings of the 12th Conference*, Vol. 2., 1999, Tatranské Matliare, STU Bratislava, pp. 86–90
- [2] Feuer A., Goodwin G.C., *Sampling in Digital Signal Processing and Control*, Birkhäuser, Boston 1996
- [3] Goodwin G.C., Graebe S.F., Salgado M.E., *Control System Design*, Prentice-Hall, New Jersey 2001

- [4] Hudzovič P., Kozáková A., *A Contribution to the Synthesis of PI Controllers*, [in:] Abstract Proceedings of Conference "Cybernetics and Informatics". April 5–6, 2001, STU Bratislava, Piešťany, pp. 31–34
- [5] Krokavec D., Filasová A., *Optimal Stochastic Systems*, 2nd Edition. Elfa, Bratislava 2002
- [6] Tarnowski W., *Projektowanie układów regulacji automatycznej ciągłych z liniowymi korektorami ze wspomaganie za pomocą MATLAB'a*, Copyright by Wydawnictwo Uczelniane Polit. Koszalińskiej, Koszalin 2001
- [7] Vašek V., Janáčková D., *Vulcameter Control and Evaluation System*, [in:] Proceedings of International Carpathian Control Conference '2001, 22–25 May, 2001 Krynica, Poland, pp. 27–32
- [8] Vitečková M., *Use of delta models for Analog and Digital Controllers Tuning*, [in:] Proceedings of XXVI. Seminar ASR'2001 "Instruments and Control". Ostrava, April 26–27, 2001, Paper 75, pp. 1–10
- [9] Vitečková M., *Use of D-transform in Dominant Multiple Poles Method for Controller Tuning*, [in:] Proceedings of the Conference on Information Engineering and Process Control. Praha: ČVUT Praha, September 4, 2001, pp. 65–66
- [10] Vitečková M. et al., *Metody syntézy systémů řízení založené na delta modelech*, Technická zpráva grantového projektu 102/00/0186. VŠB-TU Ostrava, Ostrava 2002

Analytical digital and analog controller tuning method for the first order plus time delay plants

Abstract

The article deals with the analytical digital and analog controller tuning method for the first order plus time delay plants. The described method is based on the real dominant multiple pole and the D-transform. The resultant control process is closed to the marginal non-oscillatory course. The application is shown on the example.

Key words: time delay, controller tuning, PID controller, dominant pole