*Maria Magdoń*, Agata Pasznicka***

# O KONCEPCJI MIKROŚWIATA - PROPOZYCJA NAUCZANIA WYBRANYCH ELEMENTÓW MATEMATYKI Z UWZGLĘDNIENIEM JĘZYKA LOGO

## UWAGI WSTĘPNE O WYKORZYSTANIU KOMPUTERA W NAUCZANIU MATEMATYKI

Jednym z osiągnięć współczesnej nauki i techniki jest komputer. Różnej jakości sprzęt komputerowy powoli pojawia się także w polskich szkołach. Coraz częściej stawiane jest pytanie o rolę, jaką ten sprzęt może odegrać w procesie kształcenia, w szczególności w nauczaniu matematyki.

W wielu krajach podejmuje się badania nad wykorzystaniem komputera w procesie nauczania matematyki. Do takich należą np. przeprowadzone w latach osiemdziesiątych badania Richarda Nossa i Celii Hoyles [1]. Wymienieni autorzy krytykują współczesny system nauczania. Podkreślają, że szkolna matematyka jest zbyt często oderwana od rzeczywistości, a uczniowie traktują ją jako serie ćwiczeń w rozwiązywaniu zadań. Odnosi się także wrażenie, że celem pracy nauczyciela jest jedynie formalne zrealizowanie treści programowych, bez ich utrwalenia i bez gruntownego sprawdzenia poziomu zrozumienia materiału przez uczniów. Być może, jak przypuszczają R. Noss i C. Hoyles, zastosowanie komputera w procesie dydaktycznym przyczyni się do zmiany sytuacji tak negatywnie ocenianej.

---

* Instytut Fizyki i Informatyki, WSP w Krakowie
** Instytut Matematyki, WSP w Krakowie

Użycie komputerów umożliwia operowanie opracowywanymi pojęciami w różnych kontekstach, ułatwia organizowanie procesu uczenia się w oparciu o badania empiryczne, obserwację i analizę otrzymanych wyników (liczbowych, rysunkowych), co sprzyja rozwijaniu uczniowskiej intuicji. Zadania stawiane przed uczniem mogą obejmować różnorodne zagadnienia. Ich rozważanie może przyczynić się do większej integracji różnych obszarów wiedzy, do lepszego rozumienia matematyki i jej zastosowań, a w dalszej perspektywie - do zmiany tradycyjnego podziału na przedmioty nauczania obowiązującego obecnie w szkole.

## UWAGI WSTĘPNE O PROGRAMOWANIU W JĘZYKU LOGO

Celem tego artykułu jest przybliżenie Czytelnikowi koncepcji tzw. mikroświata, w której łączy się nauczanie matematyki z programowaniem w języku LOGO. Wydaje się ona zbliżona do idei dedukcji lokalnej w nauczaniu matematyki i stosunkowo przystępna, prosta w realizacji na tle różnych innych propozycji. Zarówno mikrokomputer, jak i język LOGO traktowane są jako narzędzie oraz środek nauczania - uczenia się matematyki. Zastosowanie tzw. grafiki żółwia, poza tym, że wnosi elementy zabawy i nowości dla ucznia, może przyczynić się do rozwinięcia takich umiejętności, jak: dostrzeganie analogii, swobodne uogólnienie powiązane z szybką weryfikacją hipotez, operatywne używanie parametrów i symboli matematycznych, racjonalne planowanie konstrukcji i rysunków, które ułatwiają opanowanie algebry czy geometrii.

LOGO jest językiem strukturalnym o przystępnej dla ucznia gramatyce i łatwych do opanowania procedurach pierwotnych. Stosunkowo proste jest definiowanie nowych procedur oraz ich uruchamianie. Realizacja zdefiniowanej procedury odbywa się w trybie interpretacji, co pozwala szybko korygować błędy. W zamyśle twórców jezyk ten - o rodowodzie sięgającym języków sztucznej inteligencji* - opracowano jako środek do nauczania matematyki i informatyki. "Język LOGO został zaprojektowany tak, aby mogły go używać dzieci; nie oznacza to jednak, że jest on dziecinadą. Naprawdę dobre implementacje tego języka pozwalają użytkownikowi zgłębić podstawy programowania, a także badać złożone problemy, na przykład takie, jak fizyka relatywistyczna." (zob. [2]).

Jezyk LOGO powstał z końcem lat sześćdziesiątych w MIT - Massachusetts Institute of Technology, a jego autorem jest Seymour Papert. Wprowadzeniu tego języka do szkół towarzyszyła piękna idea nauczania matematyki, w tym zwłaszcza geometrii, opartego na eksperymentowaniu. Wydawane polecenia służyły do sterowania małym robotem, nazywanym często "żółwiem". Wykonując je żółw - robot przemieszczał sie na kartce papieru położonej na podłodze i wykreślał swoja droge. Dokonywanie wielu ciekawych obserwacji, postrzeganie nowych obiektów i badanie ich własności połączone z "uczeniem" żółwia nowych procedur i szeroko rozumiana nieskrepowana aktywnosć dzieci stanowiły podstawy tej idei. Obszerny opis rozwiniecia koncepcji Paperta nauczania matematyki w powiązaniu z językiem LOGO można znaleźć w ksiażce [3]. Interesujące zadania i propozycje zawieraja także ksiażki [4], [5].

Wypada nadmienić, że pomimo znacznego sukcesu koncepcji i języka LOGO w amerykańskich szkołach, znacznie później został on wprowadzony do szkół angielskich. Do polskich szkół LOGO trafia wraz ze sprzetem komputerowym dopiero od paru lat, a dostępne

---

* LOGO wywodzi się z opracowanego w latach sześćdziesiątych języka LISP, z którego m.in. przeniesiono szereg rozwiązań dotyczących operacji na listach.

implementacje tego języka, jak i koncepcja jego nauczania w ramach przedmiotu "Elementy informatyki" są odmienne aniżeli idea *mathlandu* Seymora Paperta czy idea *mikroświata* R. Nossa i C. Hoyles. W praktyce do łączenia nauczania matematyki i programowania dochodzi czasem wtedy, gdy informatyką w szkole zajmuje się matematyk, chociaż i wówczas nierzadko lekcje, np geometrii, mają tradycyjny przebieg. Otwarte na różne propozycje rozwiązań pozostaje nadal zagadnienie, czy poprzez programowanie uczeń może opanować umiejętność praktycznego używania matematyki i komputera dla rozwiązywania własnych bądź wskazanych problemów.

Komputer pozwala skupić uwagę uczniów na wyselekcjonowanych pomysłach rozwiązania zadania, dostarcza możliwości szybkiego badania różnorodnych związków, wyciągania wniosków w oparciu o otrzymane wyniki, bezpośredniego sprawdzania stawianych hipotez z efektami uzyskiwanymi na ekranie monitora. Autorzy badań opisywanych w tym artykule starają się wyjaśnić (co może być cenne dla rodzimych doświadczeń), czy kontekst logiczno-matematyczny jest dostrzegany przez ucznia w procesie uczenia się przez niego równocześnie matematyki i programowania, czy uczeń umie transponować uzyskane wyniki działania procedury do rozwiązania problemu teoretycznego i vice versa. Próbują też ustalić, jaki jest związek pomiędzy programowaniem a matematyką realizowanymi na poziomie szkolnym.

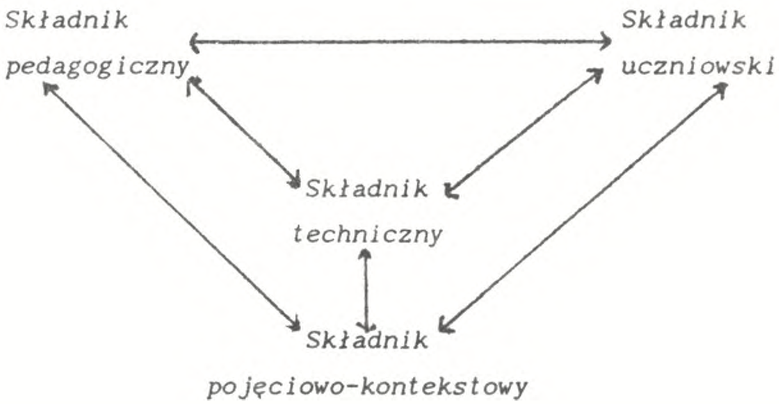
Nawet pobieżna analiza pracy ucznia nad programem pozwala wyłonić takie formy aktywności, jak: stawianie pytań cząstkowych i hipotetycznych odpowiedzi; dzielenie programu na mniejsze zadania i ustalanie kolejności ich wykonania; projektowanie algorytmu, a następnie programu; testowanie i poprawianie programu; wyszukiwanie i porównywanie innych możliwych rozwiązań. Przejście od wyników, których dostarcza program, do treści matematycznych zawartych w zadaniu, jak i droga od zadania do tworzenia programu dostarczają wielu okazji do pogłębienia rozumienia pojęć matematycznych i uwrażliwienia ucznia na istotę procesu matematyzacji. W ten naturalny sposób uczeń rozwija swą matematyczną aktywność.

## MIKROŚWIAT JAKO KONCEPCJA LOKALNEGO ORGANIZOWANIA NAUCZANIA MATEMATYKI Z WYKORZYSTANIEM KOMPUTERA

W rodzimej literaturze mamy już znaczny wybór publikacji dotyczących programowania w LOGO oraz materiałów przydatnych nauczycielom i uczniom. W używanych obecnie podręcznikach matematyki pojawiły się przykładowe programy komputerowe i procedury związane tematycznie z wybranymi zagadnieniami. Nauczyciele niektórych szkół, wyposażonych w sprzet komputerowy, podejmują próby nauczania matematyki z wykorzystaniem elementów programowania. Uczniowie czesci klas szkół średnich wybierają przedmiot "Elementy informatyki" i z niemałym zainteresowaniem uczą się programowania w języku LOGO lub PASCAL. Warunki te wydają się sprzyjać unowocześnieniu procesu nauczania. Nauczycielom zainteresowanym komputerami i jednoczesnie matematyką może wydać się ciekawą koncepcja dydaktyczna tzw. mmikroświata opracowana w Anglii przez R. Nossa i C. Hoyles.

W "mikroświat" włączamy pewien zakres materiału nauczania, uwzgledniajac w nim interesujące pojecia, zależności i twierdzenia, które sprzyjają subiektywnie twórczemu poznawaniu matematyki przez ucznia. Żródłem problemów i pytań może być program komputerowy przygotowany przez nauczyciela lub opracowany przez ucznia. Sytuacje i zadania powinny być tak dobrane, aby mogły wyzwalać różnorodne aktywności uczniów, zaś używane programy dostarczały interesujących obserwacji. Niektóre z zadań mogą być sformułowane w programie przez nauczyciela, autorstwo innych może należeć do ucznia. Autorzy tej koncepcji stanowczo podkreślają, że nie należy skupiać się tylko na rozwiązywaniu problemów, ale także na zależnościach, których one dotyczą i ich wzajemnym oddziaływaniu (zob. [6]).

Dla przejrzystości opisu "mikroświata" autorzy wyróżnili cztery jego składniki (komponenty): techniczny, uczniowski, pedagogiczny i kontekstowo-pojęciowy, które wzajemnie się przenikają i na siebie oddziaływają.




Składnik pedagogiczny *(pedagogical component)* - to rozumiane bardzo szeroko oddziaływanie nauczyciela, a także wszelkich innych czynników, jak: książki, fiszki, konspekty, filmy czy materiały dydaktyczne wykorzystywane w procesie nauczania.

Składnik techniczny (*technical component*) - to język programowania, w tym przypadku LOGO, w jego implementacji na konkretny typ mikrokomputera i związane z tym językiem możliwości sprzętu oraz ewentualnego oprogramowania.

Składnik pojęciowo-kontekstowy *(contextual component)* - obejmuje wszelkie relacje, które łączą społeczno-kulturowe uwarunkowania i doświadczenia osobiste z aktywnością ucznia w programowaniu i w pracy nad zadaniem.

Składnik uczniowski *(pupil component)* - dotyczy "centrum" mikroświata, którym jest każdy uczeń traktowany indywidualnie, z uwzględnieniem poziomu jego zainteresowań oraz możliwości uczenia się matematyki i programowania.

Nie każdy program komputerowy ani nie każdy fragment materiału nauczania może być użyty do budowy mikroświata. Rozważmy np. dowolny program (lub algorytm) służący do wyznaczania sumy skończonego ciągu liczb. Pomimo użyteczności tak programu, jak i algorytmu, nie wnoszą one wielu kształcących treści merytorycznych ani umiejętności do wiedzy ucznia. Można dokonać modyfikacji programu, np. przez zmianę algorytmu użytego do wyznaczania sumy, ale są to raczej sztuczne próby. Zastąpienie działania dodawania mnożeniem (dostrzeżenie prostej analogii) pozwala wykorzystać program do obliczania iloczynu skończonej liczby czynników. Pojawia się wtedy okazja do omówienia łączności i przemienności dodawania (i odpowiednio mnożenia). Jednak wyszczególnione tu aktywności nie są bogate w momenty interesujące poznawczo i raczej zbyt mało w nich treści matematycznych aktywizujących ucznia. Dlatego zdaniem autorów nie jest to adekwatny przykład mikroświata.

## MIKROŚWIAT - "RÓWNOLEGŁOBOKI"

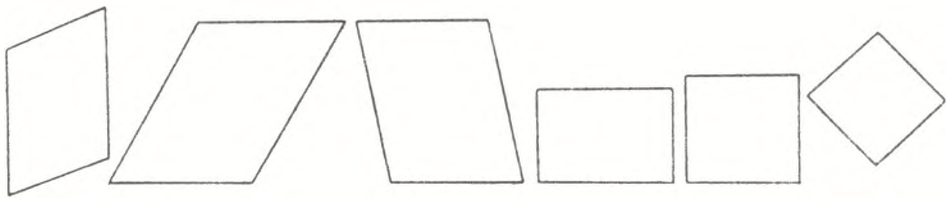
Przykładem zaprojektowanym przez R. Nossa i C. Hoyless, a następnie użytym w badaniach (por. [7]), jest mikroświat zatytułowany "Równoległoboki", opisany poniżej. Aktywność ucznia inspirowana jest zestawem zadań. Sformułowanie tych zadań poprzedzone zostało podaniem definicji dwuparametrowej procedury KSZTAŁT :s1 :s2 *.

### "Równoległoboki"

Dana jest procedura:

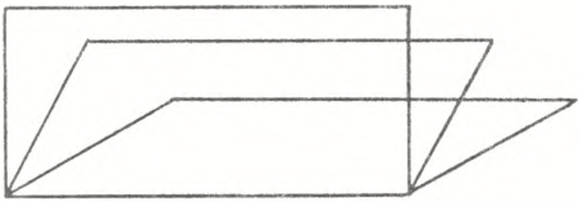
```
Oto KSZTAŁT :s1 :s2
naprzód :s1 prawo 40
naprzód :s2 prawo 140
naprzód :s1 prawo 40
naprzód :s2 prawo 140
już
```

1. Narysuj  KSZTAŁT 150 200  na kartce.
   Oznacz wartości kątów i boków.
2. Sporządź własny rysunek, wykorzystujacy kilkakrotnie procedurę KSZTAŁT.
3. Napisz procedurę, która rysuje podaną figurę: 
4. Napisz procedury rysujące podane figury:

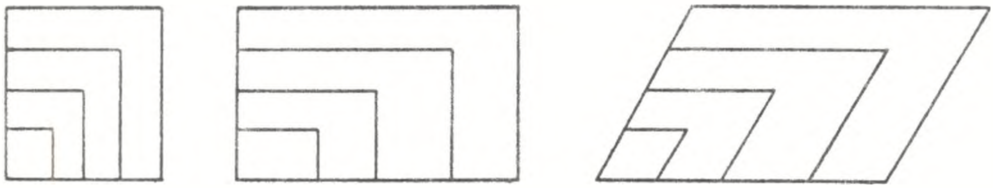


* Treść procedury została przetłumaczona na polską wersję LOGO opracowaną dla potrzeb szkolnych: Junior LOGO wersja 2.1 ([8]).

5. Czy umiesz napisać program, którego wynikiem jest podany rysunek?



6. Napisz program rysowania nastepujacych figur:



Zadania w zestawie "Równoległoboki" zostały tak dobrane, aby można było odpowiedzieć między innymi na następujące pytania.

Czy uczniowie:

- używając procedury uczą się patrzeć na jej wynik jako na pewną całość;
- rozróżniają stopniowo części składowe programu i ich funkcje;
- rozumieją matematyczną treść zawartą w programie;
- potrafią stwierdzić, którą część programu należy zmienić, aby uzyskac jego uogólnienie;
- dostrzegaja, jakie znaczenie mają dane wejściowe i jaki jest zasięg działania danej procedury;
- przenoszą spostrzeżenia i obserwacje dokonywane podczas programo-mowania w LOGO na własności odpowiednich pojęć poznawanych w tradycyjnym toku nauczania matematyki?

Badania o charakterze pilotażowym przeprowadzono z grupą siedmiorga dzieci w wieku 13, 14 lat, które już wcześniej uczyły sie LOGO. (Kurs języka obejmował 120 godzin.) Za pomocą podanego wyżej zestawu zadań starano się w kontekście logiczno-matematycznym zbadać przede wszystkim, czy uczniowie:

- rozpoznają znaczenie parametrów procedury oraz ich związek z bokami i kątami figury;

- odkrywają niezmienniczość sumy miar obrotów wykonanych przez żółwia i sumy miar kątów wewnętrznych czworokąta.

Uczniowie mieli do dyspozycji komputer, mogli także używać kartki i ołówka. Wyniki zadania 1 ujawniły, iż początkowo uczniowie nie odkrywali zależności między obrotami żółwia, a kątami rysowanej figury. Poprzez dalsze stosowanie procedury (w zadaniach 2-4) byli zmuszeni do głębszej analizy treści tej procedury. Korzystając z trybu pracy bezpośredniej (w zadaniach 3 i 4) odkrywali zależność między kolejnymi obrotami żółwia. U większości badanych następowało to jednak nie przez analizę zależności pomiędzy kątami zewnętrznymi i wewnętrznymi równoległoboku, lecz na drodze odejmowania i dodawania stałej wartości do miary kąta prostego. Chcąc narysować równoległobok o bokach poziomych, część uczniów odkrywała wartości kolejnych obrotów żółwia lub omijała ten problem stosując procedurę pierwotną KAT (ustawienie żółwia pod zadanym kątem). W zadaniach 5 oraz 6 niektórzy uczniowie korzystali już z pętli POWTÓRZ i zastosowania rekurencji. Może to świadczyć o postrzeganiu przez nich własności figury (istnienie środka symetrii równoległoboku), jak też roli poszczególnych parametrów i umiejętności uogólnienia swoich spostrzeżeń. Okazało się także, że dzieci nie wykorzystywały wyjściowej procedury w swoich programach, lecz starały się tworzyć własne i te następnie modyfikować. Nie dostrzegały też, że zadania stanowią pewną całość. Wydaje się, że spostrzeżenie tego ostatniego faktu i wynikające stąd uogólnienie na wyższym poziomie abstrakcji leżą w najbliższej strefie możliwości części badanych uczniów.

## UWAGI Z WSTĘPNYCH BADAŃ PORÓWNAWCZYCH*

Podany wyżej zestaw zadań wykorzystano do przeprowadzenia badań wstępnych w jednej ze średnich szkół technicznych południowej Polski. W ramach przedmiotu "Elementy informatyki" uczniowie klas drugich przez rok uczyli się języka LOGO (kurs programowania obejmował 70 godzin lekcyjnych). Obserwacje przeprowadzono w czerwcu, pod koniec roku szkolnego. Badana grupa liczyła 26 uczniów. Każdy otrzymał fiszkę z podanym zestawem zadań, na rozwiązanie których przeznaczono dwie godziny. Celem badań było wstępne sprawdzenie, jak przeciętni uczniowie szkoły średniej potrafią posłużyć się wiedzą zdobywaną na lekcjach matematyki oraz czy programowanie w LOGO przyczynia się do głębszego zrozumienia pewnych pojęć geometrycznych. Chodziło też o zbadanie, czy rozwiązania podawane przez młodzież i popełniane błędy będą się istotnie różnić od tych, które opisane zostały przez R. Nossa i C. Hoyles w pracy [7]. Traktując przeprowadzone obserwacje jako etap wstępny, wymagający gruntownej weryfikacji w trakcie kolejnych szczegółowych badań, tu przedstawimy krótkie omówienie pracy uczniów.

W większości badani uczniowie rozwiązywali zadania od 1 do 4. Zadanie 1 było błędnie rozwiązane w trzech przypadkach. Dwukrotnie pomylono miary kątów i zamiast pary kątów (40, 140) wprowadzono parę (30, 150) oraz parę (60, 120). W trzecim przypadku boki równo-

* Opracowanie bardziej miarodajnych wniosków możliwe będzie dopiero po przeprowadzeniu badań właściwych.

ległoboku podpisano literami: a,b,c,d, zaś osobno pod rysunkiem umieszczono zapis: s1 = 150, s2 = 200. Tylko dwie osoby narysowały równoległobok bez wpisywania podanej procedury KSZTAŁT i jej wywoływania, korzystając jedynie z trybu pracy bezpośredniej.

W zadaniu 2 uczniowie wykorzystywali pętlę POWTÓRZ oraz polecenie obrotu żółwia o dany kąt. Dwóch uczniów napisało procedury, w wyniku działania których powstawały rysunki podobne do przedstawionych w zadaniu 6. Nie pojawiły się żadne parkietaże tworzone z rysunków równoległoboków, które wystąpiły w pracach dzieci angielskich.

Prawie wszyscy uczniowie próbowali rozwiązać zadanie 3, nie zawsze jednak z pozytywnym rezultatem. Bardzo częstym błędem było wpisanie procedury analogicznej do podanej procedury KSZTAŁT z parami miar kątów (30, 150) lub (150, 30). Dopiero po wywołaniu nowej procedury dostrzegano rożnicę w rysunkach. Część uczniów wykonywała dodatkowe rysunki oraz obliczenia na kartkach, a niewielu korzystało z komputera i komend wydawanych w trybie bezpośrednim. Po kilku próbach większość zauważała prawidłową kolejność wpisania poleceń dotyczących obrotów oraz przesunięć żółwia. Niektórzy uczniowie stosowali procedurę KSZTAŁT, wpisując w odpowiednich miejscach wartości obrotów 150 i 30, a w treści procedury dołączali polecenie obrotu żółwia w prawo o 90 (PW 90), co dawało żądany wynik.

Niestety, otrzymane efekty nie zawsze były wykorzystywane w następnym zadaniu. Często uczniowie powtórnie układali analogiczne procedury inaczej je nazywając. Nikt nie miał kłopotu z napisaniem procedur dla rysowania prostokąta, kwadratu oraz rombu, żądanych w zadaniu 4, chociaż kilka osób napisało procedury nie korzystając ani z parametryzacji boków, ani z pętli POWTÓRZ. W treści procedury tworzonej dla trzeciej figury rysunku korzystano z procedury dla figury pierwszej i dopisywano na końcu polecenia obrotu żółwia (w prawo lub w lewo) o 90 (co daje poprawny wynik). Postępowano także inaczej; zastępowano w procedurze KSZTAŁT obroty w prawo - obrotami w lewo (co nie daje jeszcze poprawnego wyniku), następnie dopisywano polecenie obrotu żółwia w lewo o pewien kąt, a następnie w prawo, z odpowiednio dobranymi wartościami. Otrzymana tą drogą procedura daje w wyniku żądany rysunek. Widać z tych rozwiązań, że znana jest uczniom niezmienniczość sumy miar odpowiednich kątów wewnętrznych równoległoboku. Nadmieńmy, że żaden z uczniów nie korzystał z polecenia KĄT (ustawienie żółwia pod danym kątem).

Zaledwie sześć osób próbowało rozwiązać zadanie 5. Zauważyły one, że można posłużyć się tutaj procedurami z zadania 4, jednak część rozwiązujących nie umiała dobrać takiego ustawienia żółwia, aby w wyniku wywołania procedury otrzymać żądany rysunek. W podanych rozwiązaniach równoległoboki miały wspólny wierzchołek albo wspólny pionowy bok, albo otrzymana figura była odwrócona o kąt półpełny. Spośród rozwiązujących to zadanie nikt nie wykorzystał rekurencji.

Zadanie 6 rozwiązywało tylko 12 osób. Najczęściej wykorzystywano pętlę POWTÓRZ i instrukcję PRZYPISZ (do wartości parametru dodawano lub odejmowano w kolejnych powtórzeniach pewną liczbę). Tylko dwie osoby zauważyły, że można napisać procedurę wspólną dla przypadku pierwszego i drugiego rysunku. Nikt jednak nie zastanawiał się nad procedurą, w wyniku której można byłoby otrzymać wszystkie trzy przypadki

Ciekawe, oryginalne rozwiązanie zaproponował jeden uczeń, który napisał następującą procedurę:

```
KSZTAŁT3 :s1 :s2 :s3 :s4
powtórz 2 [np :s1 pw (180 - :s2) np :s3 pw (180 - :s4)]
już
```

Wykorzystał ją we wszystkich zadaniach wpisując odpowiednie wartości kątów dla odpowiedniej figury. Jest to jedyna praca, świadcząca o tym, że uczeń dostrzegał, iż zadania dotyczą jednego ogólnego problemu - własności równoległoboków. Zatem starał się dokonać jak największych uogólnień. Podczas swej pracy uczeń ten prawie nie korzystał z mikrokomputera, jedynie rozwiazując ostatnie zadanie sprawdził działanie nowej procedury, w której treści uwzględnił procedurę KSZTAŁT3 oraz instrukcję przypisania.

Z obserwacji zachowań uczniów w czasie rozwiązywania przez nich zadań i analizy oddanych prac pisemnych wynika, iż wiekszość uczniów była świadoma możliwości parametryzacji nie tylko boków, ale także kątów równoległoboku. Napisanie ogólnej procedury i dobranie właściwych dla niej danych było jednak jeszcze dla nich za trudne. Niewielka czteroosobowa grupa uczniów w swoich rozwiązaniach proponowała tylko procedury bezparametrowe. Uczniowie ci nie korzystali także z pętli POWTÓRZ, w nikłym stopniu posługiwali się trybem pracy bezpośredniej. Mogło wynikać to ze zbyt dużej koncentracji uwagi na postaci żądanego rysunku i preferowania pracy z ołówkiem i kartką. Zaobserwować można było, że dość często pomagali sobie w pracy ruchami rąk czy też obracaniem kartki.

Generalnie udało się zaobserwować, że w trakcie badania uczniów przeważały momenty ich pracy z kartką i ołówkiem oraz pracy w edytorze, podczas gdy rzadziej podejmowano próby szybkiej weryfikacji częściowych rozwiązań przez wykorzystanie trybu pracy bezpośredniej (odmiennie, aniżeli u dzieci angielskich). Wydaje się, że można to tłumaczyć brakiem wprawy oraz brakiem pewnych nawyków w posługiwaniu się komputerem. Z drugiej strony dość dobre zrozumienie problemów podanych w zadaniach mogło przyczynić się do zarzucenia metody "prób i błędów", chętnie stosowanej przez młodszych angielskich uczniów.

Niektóre prace świadczą o tym, że piszący je uczniowie traktują wskazane problemy i "geometrię żółwia" jako coś całkowicie różnego od geometrii poznawanej na lekcjach matematyki i nawet nie próbują zastosować w podanych zadaniach znanych im matematycznych zależności. Dla takich uczniów programowanie w języku LOGO jest od pewnego momentu operowaniem liczbami i poleceniami, których nie łączą z rzeczywistymi ruchami żółwia i własnościami wykreślanych figur geometrycznych.

Przedstawione zadania pozwalają sprawdzić, czy uczniowie potrafią odczytać liczbę parametrów występujących w danej sytuacji, a także, czy zastanawiają się nad problemem, dla jakich danych zaprojektowana procedura będzie działała poprawnie. Okazało się, że żaden z badanych uczniów tego problemu nie rozważał. Niestety, nie zawsze też uczniowie pamiętają o warunkach zadania. Uważają niejednokrotnie, że napisanie procedury, w wyniku działania której otrzymają jakiś rysunek równoległoboku, jest już wystarczającym i ostatecznym rozwiązaniem podanego im polecenia.

W związku z projektowanymi badaniami właściwymi, z rozmów, refleksji i dyskusji nad ideą mikroświata powstał pomysł opracowania kilku innych propozycji tematów zadań i umieszczenia ich w niniejszym artykule. Każdy z poniżej podanych opisów jest przykładem teoretycznym, jeszcze nie sprawdzonym w praktyce szkolnego nauczania, może jednak na tyle inspirującym, by zachęcić Czytelnika do wykorzystania go na lekcjach matematyki lub na zajęciach kółka matematycznego.

## PRZYKŁADY INNYCH MIKROŚWIATÓW

### Przykład I - "Trójkąty"

Polecenie: "Napisz procedurę rysującą trójkąt." może być niebanalnym zadaniem (o charakterze otwartym) dostarczającym okazji do różnorodnych aktywności uczniów. Rozważmy wstępne rozwiązania tego polecenia, zaproponowane w dwóch (istotnie różnych) procedurach trójparametrowych:

TRÓJKĄT1 :a :b :c oraz

TRÓJKĄT2 :bok1 :kąt :bok2 *.

```
Oto TRÓJKĄT1 :a :b :c
cs sż pod
poz :a opu
poz :b poz :c poz :a
pod wróć opu
już
```

```
Oto TRÓJKĄT2 :bok1 :kąt :bok2
cs sż
np :bok1
pw :kąt
np :bok2
wróć
już
```

Parametrami procedury TRÓJKĄT1 powinny być trzy listy dwuelementowe, określające współrzędne wierzchołków trójkąta. Nie ma w niej żadnych poleceń sprawdzających poprawność danych ani w kontekście logiczno-matematycznym, ani w kontekście technicznym. Kolejnym etapem pracy ucznia może być zredagowanie dalszych procedur i włączenie ich do tworzonego programu. Poprawność rozwiązania w aspekcie logiczno-matematycznym wymaga, aby zbadać współliniowość punktów, których współrzędne są wprowadzane przy wywoływaniu procedury. Pozwala to na opracowanie (bądź utrwalenie) takich zagadnień, jak np. wyznaczanie równania prostej przechodzącej przez dwa punkty

---

* Przykłady programów opracowano w wersji 2.1 Junior LOGO.

i sprawdzenie, czy punkt o podanych współrzędnych należy do danej prostej, względnie wyznaczanie długości odcinka o podanych końcach połączone z badaniem metrycznego warunku niewspółliniowości punktów lub też wykorzystanie warunku równoległości wektorów. Kontekst techniczny (zakres dostępnych liczb, wymiary ekranu, lokalizacja układu współrzędnych, tryby pracy w grafice LOGO) wymaga dodatkowych sprawdzeń poprawności danych, jeśli chcemy, aby program był odpowiednio zabezpieczony. Z drugiej strony możliwości przeskalowywania ekranu (zob. [8] - procedura pierwotna PROPORCJA) mogą być uwzględnione w tworzeniu żądanej procedury i rysunku trójkąta, co dostarcza kolejnych okazji do rozważań treści geometrycznych. Uwzględnić w nich można własności takich przekształceń płaszczyzny, jak np. jednokładność, podobieństwo, powinowactwo prostokątne, a w szczególności przedyskutować cechy podobieństwa trójkątów. Podany szkic ukazuje jedną z możliwych dróg rozwijania wyjściowego problemu.

Procedura TRÓJKĄT2, w której parametrami są dwa boki rysowanego trójkąta i kąt (przyległy do kąta wewnętrznego trójkąta, zawartego między tymi bokami), nie zawiera jawnych odwołań do współrzędnych punktów ekranu. Można ją wykorzystać dla odkrywania i opracowania twierdzenia o przystawaniu trójkątów (cecha "bok-kąt-bok"). Przedłużeniem problemów merytorycznych może być wówczas poszukiwanie innych metod rysowania trójkątów i odpowiadających im cech przystawania. Zagadnienia uzupełnienia tworzonych procedur sprawdzeniami związanymi z kontekstem technicznym mogą być i w tym przypadku interesująco rozwinięte, z mniejszym lub obszerniejszym wyeksponowaniem geometrii analitycznej. Proponowany mikroświat "trójkątów" może być użyty z zamiarem opracowania nowych treści nauczania, jak też służyć powtórzeniu, usystematyzowaniu i utrwaleniu poznanych przez uczniów wiadomości.

Przykład II - "**Fraktale**"

Zainteresowanie fraktalami, także w nauczaniu, zaowocowało publikacjami, w tym popularyzującymi tę ciekawą problematykę, a pewna moda na fraktale dotarła już nawet do podręczników szkolnych. Tak np. w licealnym podręczniku [9] podano procedury napisane w polskiej wersji LOGO, pozwalające na uzyskanie rysunków: dywanu Sierpińskiego, drzewa Pitagorasa, a w zadaniach zaproponowano przeprowadzenie pewnych obliczeń dla płatka Kocha.

Uwzględniając materiał merytoryczny opracowywany na lekcjach (pojęcie zbieżności ciągu i jego granicy, pojęcie szeregu geometrycznego, jego zbieżności i sumy) można przedłużyć problemy pojawiające się w zadaniach o fraktalach, np. badając długości otrzymywanych krzywych zamkniętych i obliczając pola nietypowych figur. Analiza działania procedur rysujących fraktale może dopomóc uczniom w zrozumieniu i opanowaniu pojęcia zbieżności, co na ogół nie było łatwe do osiągnięcia tradycyjnymi metodami nauczania. W rozwijaniu tematyki mikroświata "fraktali" z uczniami bardziej zainteresowanymi można uwzględnić propozycje podane przykładowo w artykule [10].

Przykład III - "**Ułamki**"

Procedura o nazwie PRZELICZENIE, której treść przytoczono poniżej (wraz z wewnętrzną dwuparametrową procedurą rekurencyjną PORÓWNAJ), umożliwia otrzymywanie rozwinięcia dziesiętnego podanego dodatniego ułamka zwykłego. (Dla przejrzystości analizy jej działania i skrócenia zapisu pominięto wszelkie procedury sprawdzające poprawność wprowadzanych danych, w szczególności zbadanie, czy mianownik ułamka nie jest zerem.) Objaśnienia wprowadzonych oznaczeń i komentarze umieszczone w treści procedur powinny ułatwić Czytelnikowi zrozumienie ich działania.

Obserwowanie działania procedury PRZELICZENIE dla różnych danych liczbowych pozwala na dość szybkie zgromadzenie dużej liczby wyników (niejako "empirycznych"). Ich analiza może być wstępem do formułowania różnych hipotez i roboczych definicji dotyczących długości rozwinięcia, jego okresowości, postaci oraz długości okresu itp.. Ze zdolniejszymi uczniami można przeprowadzać bardziej formalne dowody odpowiednich twierdzeń. W dalszej pracy z komputerem można zaproponować uczniom zbudowanie algorytmu, a następnie stosownych procedur uzupełniających dla znajdowania i wyodrębniania pierwszego najkrótszego okresu rozwinięcia dziesiętnego danego ułamka zwykłego.

```
Oto PRZELICZENIE
      { oznaczenia: l - licznik ułamka,  m - mianownik ułamka
                    k - numer kolumny,   w - numer wiersza }
teksty
      { wczytanie danych - licznika i mianownika ułamka }
pisz [Podaj licznik będący liczbą naturalną dodatnią ]
przypisz "l pierw czytajlistę
pisz [Podaj mianownik będący liczbą naturalną dodatnią ]
przypisz "m pierw czytajlistę
teksty
jeśli :l >= :m  [ kursor [5 0]
      pisz  zdanie [część całkowita ułamka:] ent :l / :m
      przypisz "l :l - :m * ent :l / :m ]
kursor [0 1]   pisz  [rozwinięcie dziesiętne ułamka:]
przypisz "k 0  przypisz "w 2
porównaj :l :m
      { dwuparametrowa procedura rekurencyjna - obliczanie
        kolejnych cyfr rozwinięcia i ich wypisywanie }
już
```

```
Oto PORÓWNAJ :l :m
      { sterowanie wydrukiem - po 60 cyfr w jednym wierszu,
        po każdym wierszu pytanie o kontynuację obliczeń }
przypisz "k :k + 1
kursor  zdanie :k :w
jeśli :k = 61  [ kursor  zdanie 1  w + 1
      pisz [Kontynuacja obliczeń po naciśnięciu klawisza
            z literą K]
      jeśli nie równe?  czytajznak "k [ uswz  stop ]
            inaczej [ przypisz "k 1
                      przypisz "w :w + 1 ]
                      kursor zdanie :k :w ]    ]
jeśli :w = 23 [ teksty   przypisz "w 2 ]
      { obliczanie kolejnej cyfry rozwinięcia dziesiętnego }
przypisz "l :l * 10
jeśli :l < :m  [ pisz 0  porównaj :l :m ]
      inaczej  [ pisz iloraz :l :m
                 przypisz "l reszta :l :m
                 porównaj :l :m ]
już
```

W każdym z podanych przykładów starano się ukazać inną drogę tworzenia mikroświata. Ostatni przykład - arytmetyczny, a przez to mniej specyficzny dla języka LOGO, bazuje na danej procedurze, której uczniowie nie muszą sami tworzyć. Nie jest też konieczne jej analizowanie, gdy nie stanowi ono celu lekcji. Posługując się gotowym krótkim programem można skupić uwagę i zainteresowania uczniów na treściach matematycznych, minimalizując problemy informatyki i języka LOGO. Wydaje się, że praktyczne odpowiedzi na pytania: Czy i jak realizować ideę "mikroświata"? - wymagają wnikliwej oceny szeroko rozumianych uwarunkowań, a zwłaszcza możliwości uczniów.

## BIBLIOGRAFIA

1. Hoyles C., Noss R., *Synthesizing mathematical conceptions and their formalization through the construction of a Logo-based school mathematics curriculum*, International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 1987, vol.18, no 4.
2. *Języki mikrokomputerów*, pod redakcją Mike'a Ducka, WNT, Warszawa 1988, s. 78-99.
3. Abelson H., A. di Sessa A., *Turtle Geometry, The Computer as a Medium for Exploring Mathematics*, MTI Press, Massachusetts 1980, Cambridge, London 1981.
4. Abelson H., *TI Logo*, McGraw-Hill Book Company, New York 1984.
5. Waligórski S., *LOGO na Sinclair Spectrum*,(część 1 - dla początkujących, część 2 - dla zaawansowanych), IWZZ, Warszawa 1987.
6. Noss R., *The computer as a cultural influence in mathematical learning*, Educational Studies in Mathematics, 1988, vol.19.
7. Hoyles C., Noss R., *Children working in a structured Logo environment: From doing to understanding*, Recherches en Didactique des Mathematiques, 1987, no 7.
8. Cellary W., Pielesiak K., *Leksykon Logo*, WNT, Warszawa 1990.
9. Walat A., Zawadowski W., *Matematyka III*, (wyd. 2), WSiP, Warszawa 1989.
10. Jabłoński L., *Krzywa Peano i dywan Sierpińskiego*, Komputer w Szkole, 1990, nr 2.
11. Gurbiel E., Krupicka H., Płoski Z., *Programowanie i Logo*, Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 1987.
12. Kania J., *Pierwsze kroki w LOGO*, WSiP, Warszawa 1987.

Abstract

Some research, carried out by Richard Noss and Celia Hoyles in order to explore their idea of "microworld" - teaching mathematics in a structured Logo environment, are described and compared with results obtained in one of Polish schools. Three easy examples, connected with that idea, are added as a suggestion for teachers to use them during lessons of mathematics.