KAROL BARON, PETER VOLKMANN

Unicité pour une équation fonctionnelle

A Monsieur Zenon Moszner, à l'occasion de son soixantième anniversaire

1. Soit l'équation fonctionnelle

$$f(qx) = \frac{1}{4q}[f(x-1) + f(x+1) + 2f(x)] \qquad (x \in \mathbb{R}) \qquad (1)$$

$(0 < q < 1)$, où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Cette équation a été considérée en physique par R. Schilling, qui s'est intéressé à des solutions satisfaisant à $f(x)=0$ pour $|x|>q/(1-q)$ (voir [1]). Ici nous donnerons un théorème d'unicité pour les solutions de ce problème, intégrables au sens de Lebesgue. D'autres résultats d'unicité sont déjà connus: D'après [1], si $0 < q \leq \sqrt{2}-1$, alors $f(x)=0$ est la seule solution bornée dans un voisinage de zéro. W. Förg-Rob [2] considère les cas $0 < q \leq 1/3$ et $q = 1/2$: Si $0 < q < 1/3$, chaque solution s'annule presque partout (p.p.); si $q = 1/3$, chaque solution mesurable s'annule p.p.; si $q = 1/2$ et f est mesurable dans un sous-ensemble de mesure positive de l'intervalle $(-1,1)$, alors $f(x) = \text{const.}(1-|x|)$ p.p. dans $(-1,1)$.

THÉORÈME. *Soient* $0 < q < 1$, $-\infty < a < b < \infty$ *et*

$$I_{ab} = \{f \mid f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \textit{ intégrable}, f(x) = 0 \ (x \notin [a,b])\}.$$

Identifions deux fonctions de I_{ab} ayant les mêmes valeurs p.p., et désignons par L l'espace vectoriel des solutions de (1) dans I_{ab}. On a alors

$$\dim L \leq 1. \tag{2}$$

DÉMONSTRATION. 1. Soit $f \in L$ telle que

$$\int_a^b f(x)dx = 0. \tag{3}$$

Montrons que

$$f = 0. \tag{4}$$

Pour cela, introduisons

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi, \quad f_2(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(\xi)d\xi \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Il découle de (1) que

$$f_1(qx) = \frac{1}{4}\,[f_1(x-1) + f_1(x+1) + 2f_1(x)] \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$f_2(qx) = \frac{q}{4}\,[f_2(x-1) + f_2(x+1) + 2f_2(x)] \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{5}$$

Grâce à (3) on a $f_1 \in I_{ab}$, donc $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que

$$f_2(x) = 0 \qquad (x \le a), \qquad f_2(x) = f_2(b) \qquad (x \ge b).$$

Il existe alors

$$M = \max_{x \in \mathbb{R}} |f_2(x)|.$$

(5) entraîne $M \le qM$, d'où $M = 0$ (parce que $0 < q < 1$), donc $f_2 = 0$, $f_1 = 0$, $f = 0$, et (4) est établie.

2. Pour établir (2), supposons que

$$L \neq \{0\}.$$

D'après ce qui précède, il existe un élément f de L tel que (3) n'a pas lieu, et en particulier il existe $f_0 \in L$ tel que

$$\int_a^b f_0(x)dx = 1.$$

Soit maintenant $g \in L$. Si l'on pose

$$c = \int_a^b g(x)dx,$$

alors $f=g-cf_0$ est un élément de L vérifiant (3), donc $f=0$, c.-à-d. $g=cf_0$. Il en résulte que $\dim L=1$.

REMARQUE. La méthode utilisée ici s'applique aussi à des équations fonctionnelles un peu plus générales que (1). La théorie générale de telles équations (qui cependant n'est pas utilisable dans notre problème) peut être trouvée dans [3] et [4].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Baron K., *On a problem of R. Schilling*, Berichte der Mathematish-statistischen Sektion in der Forschungsgesellschaft Joanneum – Graz, Bericht Nr. 286 (1988).

[2] Förg-Rob W., *On the functional equation* $f(qx) = \frac{1}{4q} \cdot (f(x+1) + f(x-1) + 2f(x))$, Manuscrit.

[3] Kuczma M., Choczewski B. et Ger R., *Iterative functional equations*, Cambridge University Press, Cambridge et al. 1990.

[4] Matkowski J., *Integrable solutions of functional equations*, Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne) 127 (1975).

Instytut Matematyki
Uniwersytet Śląski
PL–40-007 Katowice

Mathematisches Institut I
Universität Karlsruhe
D–76128 Karlsruhe