STANISŁAW MIDURA, ZBIGNIEW WILCZYŃSKI

Sur les homomorphismes du group $(R,+)$ au groupe L_s^1 pour $s \leq 5$

Dedicated to Professor Zenon Moszner with best wishes on his 60-th birthday

L'objectif de ce travail c'est la détermination de tous les homomorphismes du groupe additif des nombres réels $(R,+)$ au groupe L_s^1 pour $s = 1,2,3,4,5$.

Le problème de détermination des homomorphismes du groupe $(R,+)$ aux groupes convenables occupait plusieurs auteurs, voir les travaux [2], [4] et [5]. Jeans Schwaiger, inspiré probablement par un problème de Ludvig Reich [5], a posé la question de trouver l'exemple d'un groupe $(G,\circ)$ et de deux homomorphismes f et g du groupe additif des nombres réels $(R,+)$ au $(G,\circ)$, pour lesquels

$$\bigwedge_t f(t)g(t) = g(t)f(t) \tag{1}$$

et

$$\bigvee_{r,s \in R} f(s)g(r) \neq g(r)f(s) \tag{2}$$

J. Wróblewski comme le premier a donné un tel exemple dans [6]. Quelques considerations générales sur le problème donne Z. Moszner dans [3]. Lui aussi a trouvé l'exemple du homomorphisme du groupe $(R,+)$ au groupe L^1_s pour s quelconque, dans [4].

Le groupe L^1_n c'est l'ensemble des suites $(x_1,\ldots,x_n)$ des éléments de R où $x_1 \neq 0$, avec l'opération définie comme il suit

$$(x_1,\ldots,x_S) * (y_1,\ldots,y_S) = (z_1,\ldots,z_s) \tag{3}$$

si et seulement si

$$z_v = \sum_{j=1}^{v} \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_v = j \\ k_1+2k_2+\ldots+vk_v = v \\ k \geq 0 \ k_i \in Z \text{ pour } i=1,\ldots,v}} x_j \frac{v! y_1^{k_1} y_2^{k_2} \ldots y_v^{k_v}}{k_1! \ldots k_v! (1!)^{k_1} \ldots (v!)^{k_v}} \tag{4}$$

pour v = 1, ..., s.

On sait ([1] p. 85), que la formule (4) exprime la dérivée Z_v d'ordre v d'une fonction composé $f(t) = F(\Phi(t))$ par les dérivées $x_1, \ldots, x_v$ des ordres 1,...,v de la fonction éxterieure F(y) et des dérivées $y_1, \ldots, y_v$ des ordres de la fonction intérieure $\Phi(t)$.

Nous allons souvent utiliser (4) et pour cette raison calculans z_s pour $s \leq 5$

$$\begin{cases} z_1 = x_1 y_1 \\ z_2 = x_1 y_2 + x_2 y_1^2 \\ z_3 = x_1 y_3 + 3x_2 y_1 y_2 + x_3 y_1^3 \\ z_4 = x_1 y_4 + 4x_2 y_1 y_3 + 3x_2 y_2^2 + 6x_3 y_1^2 y_2 + x_4 y_1^4 \\ z_5 = x_1 y_5 + 5x_2 y_1 y_4 + 10x_2 y_2 y_3 + 10x_3 y_1^2 \, y_3 + \\ \qquad + 15x_3 y_1 y_2^2 + 10x_4 y_1^3 \quad y_2 + x_5 y_1^5 \end{cases} \tag{4'}$$

Soit F_s un homomorphisme du groupe additif des nombres réels au groupe L_s^1, c'est à dire F_s: $R \longrightarrow L_s^1$, satisfaisant à l'équation fonctionnelle:

$$F_s(x+y) = F_s(x) * F_s(y). \tag{5}$$

Parce que L_s^1 est un ensemble des suites de s-éléments, alors

$$F_s = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle,$$

où f_1: $R \longrightarrow R\setminus\{0\}$, f_k: $R \longrightarrow R$ pour $k = 2,\ldots, s$.

Notons par

$$x_i := f_i(x) \qquad\qquad \text{pour } i = 1,\ldots, s.$$

En utilisant les égalités (4') nous pouvons constater, que $F_5 = \langle f_1, f_2, \ldots, f_5 \rangle$ est un homomorphisme du groupe $(R,+)$ au groupe L_5^1 si et seulement si les fonctions $f_1, \ldots, f_5\big(f_i(x) =: x_i\big)$ satisfont au système des équations fonctionnelles

$$(x+y)_1 = x_1y_1 . \tag{6}$$

$$(x+y)_2 = x_1y_2 + x_2y_1^2 . \tag{7}$$

$$(x+y)_3 = x_1y_3 + 3x_2y_1y_2 + x_3y_1^3 . \tag{8}$$

$$(x+y)_4 = x_1y_4 + 4x_2y_1y_3 + 3x_2y_2^2 + 6x_3y_1^2y_2 + x_4y_1^4 . \tag{9}$$

$$\begin{aligned}(x+y)_5 = {} & x_1x_5 + 5x_2y_1y_4 + 10x_2y_2y_3 + 10x_3y_1^2y_3 . \\ & + 15x_3y_1y_2^2 + 10x_4y_1^3y_2 + x_5y_1^5 .\end{aligned} \tag{10}$$

Remarquons, que si nous résolvons le système de k premières équations parmi (6) - (10) pour $k = 1,\dots, s$, nous déterminerons alors tous les homomorphismes du groupe $(R,+)$ au groupe L_k^1. En résolvant successivement les équations (6) - (10), dans chaque équation suivante nous utiliserons les solutions des équations précedentes et pas à pas nous trouverons des homomorphismes F_1, F_2, ...,F_s. Avant cela rappelons, que nous appelons fonction additive toute solution $f\colon R \longrightarrow R$ de l'équation $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous les $x,y \in R$, et fonction exponentielle toute solution $g\colon R \longrightarrow R \setminus \{0\}$ de l'équation fonctionnelle

$$g(x+y) = g(x) \cdot g(y) \tag{11}$$

pour tous les x et $y \in R$.

La solution générale de l'équation (6) c'est la famille des fonctions exponentielles.

A présent nous allons nous occuper de détermination des homomorphismes F_s pour s = 2,3,4,5. Parce que le groupe(R,+) est commutatif, donc à partir des équations (7), (8), (9) et (10) nous obtenons

$$x_2y_1(y_1-1) = x_1(x_1-1)y_2 \tag{12}$$

$$x_3y_1(y_1-1)(y_1+1) = x_1(x_1-1)(x_1+1)y_3 + 3x_2y_2(x_1-y_1) \tag{13}$$

$$x_4y_1(y_1-1)(y_1^2+y_1+1) = x_1(x_1-1)(x_1^2+x_1+1)y_4 \tag{14}$$

$$+ x_2y_3(6x_1^2-4y_1) + x_3y_2(4x_1-6y_1^2) + 3x_2y_2(x_2y_2)$$

$$x_5y_1(y_1-1)(y_1^3+y_1^2+y_1+1) = x_1(x_1-1)(x_1^3+x_1^2+x_1+1)y_5 \tag{15}$$

$$+ x_2y_4(10x_1^3-5y_1) + x_4y_2(5x_1-10y_1^3)$$

$$+ x_2y_3(15x_1x_2-10y_2) + x_3y_2(10x_2-15y_1y_2)$$

$$+ 10x_3y_3(x_1^2-y_1^2).$$

Distinguerons deux cas:

a) $f_1 \not\equiv 1$

b) $f_1 \equiv 1$

Dans le cas a) il existe y tel, que

$$y_1 \neq 1 \ \left(f_1(y) = y_1 \neq 1\right). \tag{16}$$

Posons cet y dans les équations (12), (13), (14) et (15). Alors d'après (12) nous avons

$$x_2 = x_1(x_1-1)\,\frac{y_2}{y_1-1}$$

De – l'égalité ci-dessus, en posant $C_1 = \dfrac{y_2}{y_1-1}$ nous obtenons

$$x_2 = x_1(x_1 - 1)C_1. \tag{17}$$

Il est facile à vérifier, que toute fonction sous la forme (17), où C_1 est un réel arbitraire et x_1 une fonction satisfaisant à l'équation (6), satisfait aussi à l'équation (7). Remarquous, que pour $f \equiv 1$, l'équation (7) est vérifiée par toute fonction additive. De cette façon nous avons démontré:

LEMME 1. *L'ensemble de tous les homomorphismes du groupe* $(R,+)$ *aù groupe* L_2^1 *c'est l'ensemble des couples de fonctions de la forme*

$$\langle f_1,\ f_1(f_1-1)C_1\rangle$$

$$\langle 1,\ f_2\rangle$$

où f_1 *est une fonction exponentielle,* C_1 *un réel arbitraire* f_2 *une fonction additive arbitraire.*

Nous allons résoudre le système d'équations (6) - (8) dans le cas a). En profitant la forme (17) de la fonction f_2, nous aurons d'apriès (13)

$$x_3 y_1(y_1-1)(y_1+1) = x_1(x_1-1)\Big[(y_3+3C_1^2 y_1(y_1-1))(x_1+1)$$

$$-3C_1^2(y_1-1)(y_1+1)\Big] .$$

D'où, en posant

$$C_2 := \frac{y_3 + 3C_1^2 y_1(y_1-1)}{y_1(y_1-1)(y_1+1)}$$

(en vertu de l'hypothèse $y_1 \neq 1$) nous avons

$$x_3 = x_1(x_1-1)\left(C_2(x_1+1) - 3C_1^2\right) . \tag{18}$$

Il est facile de vérifier, que toute fonction de la forme (18) où C_2 est un réel arbitraire, x_1 une fonction exponentielle et x_2 est de la forme (17), satisfait à l'équation (8).

Donc, nous avons démontré dans le cas a)

LEMME 2. *La solution générale du système d'équations* (6) - (8) *c'est une famille des triplets des fonctions*

$$<x_1, \; x_1(x_1-1)C_1, \; x_1(x_1-1)\left[C_2(x_1+1) - 3C_1^2\right]>,$$

où C_1 et C_2 sont des réels arbitraires (et x_1 - une fonction exponentielle).

En procedant avec l'équation (14) de la fason analogique que dans le cas de l'équation (13) et profitant de (17) et de (18) pour

$$C_3 := \frac{y_4 + C_1y_1(y_1-1)\left(6C_2y_1 + 10C_2 - 15C_1\right)}{y_1(y_1-1)\left(y_1^2 + y_1 + 1\right)}$$

nous obtiendrons

$$x_4 = x_1(x_1-1)\left[C_3\left(x_1^2+x_1+1\right) - 6C_1C_2x_1 - C_1\left(10C_2-15C_1^2\right)\right]. \tag{19}$$

Il est facile de vérifier, que les fonctions de la forme (17), (18) et (19) avec C_1,C_2,C_3 arbitraires et une fonction exponentielle quelquonque x_1, satisfont à l'équation (9). Nous avons démontré alors.

LEMME 3. *La solution générale du systéme d'équations* (6) - (9) *dans le cas a) c'est la famille quadrupletes des fonctions: la première est une solution arbitraire de l'équation* (6) *et les suivantes sont sous la forme* (17), (18) *et* (19) *où* C_1, C_2, C_3 *sont des réels arbitraires.*

A présent nous allons résoudre l'équation (10), ayant déjà trouvées les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4. Si dans l'équation (15) nous profitons (17), (18) et (19) en posant

$$C_4 = \frac{y_5+y_1(y_1-1)(C_1C_3\left(10y_1^2+10y_1+15\right) + C_1^2C_2(-45y_1-105)}{y_1(y_1-1)\left(y_1^3 + y_1^2 + 1\right)}$$

$$+ \frac{105C_1^4+10C_2^2(y_1+1)}{y_1(y_1-1)\left(y_1^3 + y_1^2 + 1\right)}$$

nous obtiendrons

$$x_5 = x_1(x_1-1)C_4\left(x_1^3+x_2^2+x_1+1\right) - 10C_1C_3x_1^2 \tag{20}$$

$$- \left(10C_1C_3-45C_1^2C_2 + 10C_2^2\right)x_1 - \left(15C_1C_3- 105C_1^2C_2\right.$$

$$\left.+ 105C_1^4 + 10\ C_2^2\right).$$

De la manière analogue comme dans le cas des équations considérées précédement, on peut démontrer, que les fonctions f_2, f_3, f_4 de la forme réspectivement (17), (18), (19) et (20) avec une arbitraire fonction exponentielle f_1 et des constantes quelconques C_1, C_2, C_3 et C_4, satisfont à l'equation (10).

Nous avons démontré alors,

LEMME 4. *La solution génèrale du système d'équation* (6) - (10) *dans le cas* a) *c'est l'ensemble des suites à cinq éléments* f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 *telles, que* f_1 *est une solution arbitraire de l'équation* (6) *et* f_2, f_3, f_4, f_5 *sont de la forme* (17), (18), (19) *et* (20), *où* C_1, C_2, C_3, C_4 *et* C_5 *sont des constantes* $\left(x_1 = f_1(x)\right)$ *réels quelconques.*

Considérons à présent le cas b)

$$f_1 \equiv 1.$$

D'aprés l'hypothèse ci-dessus, le système d'équations (6) - (10) prend la forme

$$x_1 \equiv 1 \tag{21}$$

$$(x+y)_2 = x_2 + y_2 \tag{22}$$

$$(x+y)_3 = x_3 + y_3 + 3x_2y_2 \tag{23}$$

$$(x+y)_2 = x_4 + y_4 + 4x_2y_3 + 6x_3y_2 + 3x_2y_2^2 \tag{24}$$

$$(x+y)_5 = x_5 + y_5 + 5x_2y_4 + 10x_3y_2 + 10x_2y_2y_3 \tag{25}$$

$$+ 15x_3y_2^2 + 10x_3y_3 .$$

De la symètrie des parties gauches de (24) et (25) il résulte respectivement

$$x_3y_2 = x_2y_3 + \frac{3}{2} x_2y_2(x_2-y_2) , \tag{26}$$

$$x_4y_2 = x_2y_4 + x_2y_3(3x_2-2y_2) + x_3y_2(2x_2-3y_2) . \tag{27}$$

Le solution générale de l'équation (22) c'est la famille des fonctions additives f_2: R $\longrightarrow$ R.

Nous allons résoudre successivement les équations (23) - (25).

Considerons l'équation fonctionnelle

$$h(x+y) = h(x) + h(y) + r(x,y) \tag{28}$$

où r: R x R $\longrightarrow$ R est la fonction donnée et h: R $\longrightarrow$ R est une fonction récherchée. Soient h_1 et $h_\circ$ des solutions de l'équation (28). Désignons par

$$g := h - h_\circ$$

Remarquons, que

$$g(x+y) = h(x+y) - h_o(x+y) = h(x) + h(y) - h_o(x) - h_o(y) = g(x) + g(y).$$

Ceci implique, que g est une fonction additive.

Nous avons démontré

LEMME 5. *Si* h_o *est une solution particulière de l'équation* (28), *alors la solution générale de l'équation* (28) *e'est la famille des fonctions sous la forme*

$$h(x) = h_o(x) + g(x),$$

où g *est une arbitraire fonction additive.*

Il est facile à vérifier, que la fonction f_3 *de la forme*

$$x_3 = \frac{3}{2} x_2^2, \tag{29}$$

où x_2 est une fonction additive, satisfait à l'équation (23), donc, d'après le lemme 5, la famille des fonctions f_3, de la forme

$$x_3 = \frac{3}{2} x_2^2 + g_1(x) \tag{30}$$

où x_2, g_1 sont des arbitraires fonctions additives, c'est la solution de l'équation (23).

Nous avons démontré alors:

LEMMA 6. *La solution générale du systéme d'équations* (21) - (23) *c'est la famille de triplets de fonctions*

$$<1, f_2, \frac{3}{2} f_2^2 + g_1>,$$

où f_2 *et* g_1 *sont des arbitraires fonctions additives.*

Considérons la famille de fonctions de la forme (30) dans deux cas

$\alpha)$ $x_2 \not\equiv 0$ ou $\beta)$ $x_2 \equiv 0$

Nous allons examiner le cas α). Dans ce cas il existe $y \in R$ tel, que $f_2(y) = y_2 \neq 0$. Mettons cet y dans (26), d'où nous obtaiendrons

$$x_3 = \frac{3}{2} x_2^2 + x_2 \left(\frac{y_3}{y_2} - \frac{3}{2} y_2 \right)$$

D'où pour $d_1 := \dfrac{y_3}{y_2} - \dfrac{3}{2} y_2$ nous aurons

$$x_3 = \frac{3}{2} x_2^2 + d_1 x_2 \tag{31}$$

Parce que la fonction $d_1 x_2$ est additive, donc f_3 de la forme (31) est aussi sous la forme (30). Remarquons, que nous avons obtenu l'équation (26) à partir de l'équation (24). Donc l'équation (24) peut avoir des solutions seulement pour la fonction sous la forme (31) (et non pour une fonction arbitraire de la forme (30)) satisfaisant à l'équation (23).

D'où

REMARQUE 1. Le système d'équations (21) - (24) possède des solutions seulement pour certaines solutions du système (21) - (23)

(seulement pour les fonctions sous la forme (31) et non de la forme (30)).

Après avoir utilisé (31) l'équation (24) prendra la forme

$$(x+y)_4 = x_4 + y_4 + 9x_2y_2(x_2+y_2) + 10d_1x_2y_2. \tag{32}$$

Il est facile de vérifier, q'une fonction de la forme

$$x_4 = 3x_2^3 + 5d_1x_2^2,$$

où x_2 est une fonction additive, c'est une solution de l'équation (32), donc d'après le lemme 5, la famille des fonctions sous la forme

$$x_4 = 3x_2^3 + 5d_1x^2 + g_2(x), \tag{33}$$

où g_2 est une arbitraire fonction additive, c'est la solution générale de l'équation (32).

Donc, nous avons démontré.

LEMME 7. *La solution générale du système d'équations* (21) - (24) c'est la famille de quadruples de fonctions

$$\langle 1, f_2, \frac{3}{2} f_2^2 + d_1f_2, 3f_2^3 + 5d_1f_2^2 + g_2\rangle,$$

où f_2, g_2 *sont des arbitraires fonctions additives et* d_1 *une constante quelconque.*

Nous allons résoudre l'équation (25). En vertu de l'égalitè (31) dans (27) nous obtiendrons

$$x_4y_2 = x_2y_4 + 5d_1x_2^2y_2 - 5d_1x_2y_2^2 + 3x_2^3y_2 - 3x_2y_2^3$$

D'où, posant $d_2 = \frac{y_4}{y_2} - 5d_1y_2 - 3y_2^2$ il résulte que

$$x_4 = 3x_2^3 + 5d_1x_2^2 + d_2x_2. \tag{34}$$

REMARQUE 2. L'équation (25) possède une solution seulement pour les fonctions de la forme (34) et non pour des fonctions arbitraires sous la forme (33). Le système d'équations (21) - (25) possède alors des solutions seulement pour certaines solutions du système (21) - (24).

A partir de (25) et en vertu de (31) et (34) nous obtenons

$$(x+y)_5 = x_5 + y_5 + 15x_2y_2\left(2x_2^2+3x_2y_2 + 2y_2^2\right)$$

$$+ 65d_1x_2y_2(x_2+y_2) + \left(15d_2+10d_1^2\right)x_2y_2 . \tag{35}$$

Il est facile de vérifier, q'une fonction de la forme

$$x_5 = \frac{15}{2}x_2^4 + \frac{65}{3}d_1x_2^3 + \frac{15d_2 + 10d_1^2}{2}x_2^2$$

satisfait à l'équation (35). Alors, en vertu du lemme 5, la solution générale de l'équation (35) c'est la famille de fonctions sous la forme

$$x_5 = \frac{15}{2} x_2^2 + \frac{65}{3} d_1 x_2^3 + \frac{5d_2 + 10d_1^2}{2} x_2^2 + g_3 \tag{36}$$

où g_3 est une fonction additive arbitraire.

LEMME 8. *La solution générale du systéme d'équations* (21) - (25) *dans le cas* α), *c'est la famille de suites à cinq élémentes*

$$<1, f_2, \frac{3}{2} f_2^2 + d_1 f_2, f_4, f_5>,$$

où f_4, f_5 *sont de la forme* (34), (36), f_2, g_3 *sont des fonctions additives arbitraires, et* d_1, d_2 *des constantes quelconques.*

Considérons le cas β)

$$f_2 \equiv 0$$

Dans ce cas les équations (23) - (25) prennent la forme:

$$(x+y)_3 = x_3 + y_3 , \tag{37}$$

$$(x+y)_4 = x_4 + y_4 , \tag{38}$$

$$(x+y)_5 = x_5 + y_5 + 10x_3y_3 . \tag{39}$$

Aux équations (37) - (38) satisfont des fonctions additives arbitraires. Remarquons, que la fonction f_5 sous la forme

$$x_5 = 5x_3^2$$

est une solution de l'équation (39). Donc, en vertu du Lemme 5, la solution générale de l'équation (39) c'est la famille de fonctions de la forme

$$x_5 = 5x_3^2 + g_5$$

où g_5 est une fonction additive arbitraire.

Nous avons démontrè alors

LEMME 9. *La solution générale du système d'équations fonctionnelles* (37) - (39) *c'est la famille de fonctions*

$$\langle f_3, f_4, 5f_3^2 + g_5 \rangle$$

où f_3, f_4 *et* g_5 *sont des fonctions additives arbitraires.*

En vertu de lemmes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 nous avons

THÉORÈME 1. *L'ensemble de tous les homomorphismes du groupe additive des nombres réels au groupe* L_s^1 *ce sont les familles des suites des fonctions*

1. *pour* $s=1$ $\langle f_1 \rangle$

2. *pour* $s=2$ $\langle f_1, f_1(f_1-1)C_1 \rangle$ *pour* $f_1 \not\equiv 1$

   $\langle 1, f_2 \rangle$

3. *pour* $s=3$ $\langle f_1, f_1(f_1-1)C_1, f_1(f_1-1)\left[C_2(f_1+1) - 3C_1^2\right] \rangle$ *pour* $f_1 \neq 1$

   $\langle 1, f_2, \frac{3}{2} f_2^2 + g_1 \rangle$

4. *pour* $s=4$ $\langle f_1, f_1(f_1-1)C_1, f_1(f_1-1)\left[C_2(f_1+1) - 3C_1^2\right], g_4 \rangle$

   $\langle 1, f_2, \frac{3}{2} f_2^2 + d_1 f_2, 3f_2^3 + 5d_1 f_2^2 + f_4 \rangle$ *pour* $f_2 \neq 0$

   $\langle 1, 0, f_3, f_4 \rangle$

5. *pour* $s=5$ $\langle f_1,\ f_1(f_1-1)C_1,\ f_1(f_1-1)\left[C_2(f_2-1)\ -\ 3C_1^2\right],\ g_4,\ g_5\rangle$

pour $f_1 \neq 1$

$\langle 1,\ f_2,\ \frac{3}{2}\ f_2^2 + d_1f_2,\ h_4,\ h_5\rangle$ *pour* $f_2 \neq 0$

$\langle 1,\ 0,\ f_3,\ f_4,\ 5f_3^2 + f_5\rangle$

où

$$g_4 = f_1(f_1-1)\left[C_3(f_1^2+f_1+1) - 6C_1C_2x_1 - C_1(10C_2 - 15C_1^2)\right.$$

$$g_5 = f_1(f_1-1)\left[C_4(f_1^3+f_1^2+1) - 10C_1C_3f_1^2 -\right.$$

$$(10C_1C_3-45C_1^2C_2+10C_2^2)f_1 - (15C_1C_3-105C_1^2C_2+105C_1^4+10C_2^2)$$

$$h_4 = 3f_2^3 + 5d_1f_2^2 + C_2f_2$$

$$h_5 = \frac{15}{2}\ f_2^4 + \frac{65}{3}\ C_1f_2^3 + \frac{15C_2 + 10C_1^2}{2}\ f_2^2 + f_5$$

f_1 *est une fonction exponentielle arbitraire,* f_2, f_3, f_4, f_5 *sont des fonctions additives arbitraires et* C_1, C_2, C_3, C_4, d_1 *des constantes réels quelconques.*

DÉFINITION. *Un homomorphisme* $F_s = (f_1, \ldots, f_s)$ *du groupe additive des nombres réels au groupe* L_s^1 *est dit prolongable au groupe* L_t^1 *pour* $t > s$ *si et seulement si, guand il existent des fonctions* $f_{s+1},\ldots,f_t$ *telles, que* $F_t = (f_1,\ldots,f_s,f_{s+1},\ldots,f_t)$ *est un homomorphisme du groupe additive des nombres réels au groupe* L_t^1.

En vertu du théorème 1 et de remarques 1 et 2 nous pouvons etablir.

THÉORÈME 2. *Parmi les homomorphismes* $F_s = (f_1,\dots,f_s)$ *pour* $s = 1,2,3,4$ *considérés dans l'énoncé du théorème* 1, *ne sont pas prolongables les suivants*:

1. *pour* $s=3$ $\langle 1, f_2, \frac{3}{2} f_2^2 + f_3\rangle$ *si pour tout* $C_1 \in R$, $f_3 \neq C_1 f_2$

2. *pour* $s=4$ $\langle 1, f_2, \frac{3}{2} f_2^2 + d_1 f_2, 3f_2^3 + 5d_1 f_2^2 + f_4\rangle$

si pour tout $C_2 \in R$, $f_4 \neq C_2 f_2$.

Admetons, que Z. Moszner a donné l'exemple du homomorphisme du groupe additive des nombres réels au groupe L_3^n, lequel n'est pas prolongable au groupe L_4^n.

TRAVAUX CITÉS

[1] Lipski W., Marek W., *Analiza kombinatoryczna*, PWN, Warszawa 1971.

[2] Leszczyńska Z., Moszner Z., *Sur la commutativité des homomorphismes des valeurs matricielles*, Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, Matematyka-Fizyka-Chemia 10 (1986).

[3] Moszner Z., *Sur un problème au sujet des homomorphismes*, Aequationes Math. 32 (1987) 297-303.

[4] Moszner Z., *Sur un sous-groupe a un paramètre du groupe* L_∞^1, Opuscula Mathematica.

[5] Reich L., *Problem* (P 232), Aequationes Math. vol 26 No 2/3 (1986) 283-284.

[6] Wróblewski J., *On two homomorphismus on the additive groups of real numbers*, Demonstratio Math. 18 (1985), 1161.