

Barbara Nawolska, Aleksandra Urbańska

Pierwsze kroki w rozwiązywaniu arytmetycznych zadań tekstowych

Trudno wyobrazić sobie edukację matematyczną bez rozwiązywania zadań, nie można ich również pominąć w matematycznej edukacji sześciolatków. Szczególną rolę pełnią tekstowe zadania arytmetyczne. Dotyczą one sytuacji, zjawisk i wielkości z życia codziennego (a więc spoza matematyki, np.: zakupów, podróży, planowania wydatków, przygotowywania posiłków), ale rozwiązuje się je, używając środków matematycznych (odpowiednio dobierając działania, a potem wykonując je).

Zadanie tekstowe stoi między dwoma światami: otaczającej nas rzeczywistości i matematyki. Jest trochę ze świata rzeczywistego, bo opowiada o sytuacjach z życia wziętych, ale wcale niedokładnie takich, jakie przeżyło czy przeżyje dziecko, a z drugiej strony, wyraźnie spreparowanych na użytek szkolny, bo np. ani ceny się nie zgadzają, ani asortyment dostępnych towarów. Jest też trochę ze świata matematycznego, bo zawiera dane liczbowe, bo dane te powiązane są pewnymi zależnościami, które można przełożyć na język działań, bo oczekiwana jest odpowiedź liczbową lub od liczby uzależnioną.

Rozważmy przykład, w którym wykorzystano zdarzenie opowiedziane przez holenderskiego dydaktyka matematyki H. Freudenthala, który uczestniczył w nim jako dziadek.

- 1) *W sklepie z zabawkami są samochody, misie i lalki. Samochód kosztuje 4 guldeny, miś 3 guldeny, a lalka 5 guldenów. Marysia miała 10 guldenów, kupiła sobie jedną z tych zabawek i otrzymała 5 guldenów reszty. Co kupiła Marysia?*

Zadanie to dał dziadek pięcioletniemu wnukowi. Wnuk prawie bez namysłu odpowiedział – „lalkę”. „Skąd wiesz?” – zdziwił się dziadek. „Bo przecież Marysia jest dziewczynką” – odparł wnuczek rezolutnie.

W opowiadaniu dziadka dziecko dostrzegło zwykłą historyjkę o tematyce związanej z jego otoczeniem (zwłaszcza, że działo się to na spacerze

przed wystawą sklepu z zabawkami). Na postawione przez dziadka pytanie odpowiedziało zgodnie ze swym doświadczeniem. Z tekstu wyodrębniło istotne jego zdaniem informacje: jakie zabawki były w sklepie; kupowała je dziewczynka. W ogóle pominięto dane liczbowe, bo nie były mu potrzebne do udzielenia odpowiedzi. Dla wnuka było to zadanie wyłącznie ze świata rzeczywistego i w tym świecie je rozwiązał.

Przypadek sprawił, że odpowiedź dziecka była zgodna z oczekiwaną przez dziadka, a uzyskaną na drodze następującego rozumowania: Marysia miała 10 guldenów; otrzymała 5 guldenów reszty, zatem wydała $10 - 5 = 5$ guldenów; wśród sprzedawanych zabawek tylko lalka kosztowała 5 guldenów, więc Marysia kupiła właśnie lalkę.

By w powyższy sposób szukać odpowiedzi, trzeba w opowiadaniu dziadka dostrzec tekstowe zadanie arytmetyczne. By je dostrzec, trzeba wcześniej znać konwencję, w jakiej wypowiada się takie zadania. Tej konwencji trzeba dzieci uczyć, jak wielu innych obowiązujących w szkole, dotyczących zarówno treści poszczególnych przedmiotów, jak i obyczajów szkolnych. Oto kilka przykładów konwencji szkolnych: w czasie lekcji siedzimy w ławkach, a nie wędrujemy po klasie; nie rozmawiamy swobodnie, lecz prosimy o głos przez podniesienie ręki i czekamy na przyzwolenie nauczyciela; białe kreski na czarnej tablicy w zeszytach wyglądają jak negatyw, są ciemne na białym tle; pytania nauczyciela – w przeciwieństwie do większości pytań poza szkołą – nie są stawiane na serio, nauczyciel nie chce poznać odpowiedzi na swe pytanie, pragnie jedynie dowiedzieć się, czy uczeń tę odpowiedź zna.

Powróćmy do zadania o sklepie z zabawkami. To samo dziecko otrzymało je po roku nauki szkolnej, w czasie której rozwiązywało wiele zadań tekstowych. I tym razem niedługo się namysłało. Wykonało obliczenia: $4 + 3 + 5 + 10 + 5 = 27$ i na pytanie: Co kupiła Marysia? udzieliło odpowiedzi: „Dwadzieścia siedem guldenów”.

Zdarzenie to karykaturalnie, ale wyraziście pokazuje, jakie mogą być efekty „nauczania”. Rozsądnie myślące pięcioletnie dziecko dwa lata później, po roku nauki szkolnej, traci jakby swój zdrowy rozsądek i stosuje się do niezrozumiałej, wykrzywionej konwencji szkolnych zadań tekstowych. Dawniej udzieliło odpowiedzi zgodnie ze swą wiedzą i doświadczeniem (w ramach świata rzeczywistego), teraz tak oderwało wiadomości matematyczne od wiadomości z życia codziennego, że nawet nie widzi zupełnej niezgodności pytania z odpowiedzią.

Temu dziecku zadanie tekstowe kojarzy się wyłącznie z koniecznością wykonania jakichś rachunków z wykorzystaniem występujących w zadaniu

liczb i udzielenia odpowiedzi liczbowej. Przeskoczyło ono nagle do obcego, nie oswojonego świata matematyki i w tym świecie prawidłowo wykonuje pewne operacje, nie widząc ich związku z sytuacją w zadaniu tekstowym, sytuacją pochodzącą przecież z życia codziennego. Nie widzi tego związku ani wykonując działania, ani udzielając odpowiedzi.

Nie wie bowiem, że zadanie tekstowe wywodzi się z pewnego kontekstu rzeczywistego (życiowego), nie umie przekładać tych treści na język matematycznych działań, nie wie, że odpowiedź uzyskaną drogą matematycznych rachunków trzeba zinterpretować w opisanej w zadaniu sytuacji. Potrafi jedynie w oderwaniu od sytuacji zadaniowej manipulować dosyć przypadkowo występującymi w tekście liczbami. Nie miałoby tych trudności, gdyby wiedziało, co to jest arytmetyczne zadanie tekstowe i na czym polega jego rozwiązanie.

Arytmetyczne zadanie tekstowe jest to tekst słowny, który opisuje pewną sytuację „z życia”. Można w nim wyodrębnić pewne liczby lub wielkości (dane, nieznanne) i dostrzec pewne związki arytmetyczne między tymi liczbami. Zadanie zawiera również polecenie znalezienia pewnej liczby lub wielkości (szukanej), albo pytanie o tę liczbę lub wielkość.

Aby rozwiązać zadanie tekstowe, trzeba uchwycić sens zawartej w nim historyjki z życia, nie zwracając początkowo uwagi na wartości liczbowe. Trzeba rozumieć, o czym to zadanie jest, jakie zdarzenie opisuje, jak ono przebiegało, nie próbując na razie działać na liczbach. Odbywa się to wyłącznie w świecie rzeczywistym.

Dopiero potem można się zbliżyć ze świata rzeczywistego do świata matematyki, próbować przełożyć treść zadania na język liczb i działań, wyluskać matematyczne znaczenie pewnych potocznych słów, a inne słowa zupełnie pominać, trzeba zrozumieć zadanie. Język naturalny jest bogaty i na wiele sposobów może wyrażać ten sam związek arytmetyczny. Odwrotnie, bardzo podobne słowa mogą oznaczać różne działania.

Następnie przystępujemy do analizy występujących w zadaniu danych liczbowych i ustalamy, czego szukamy. Po tej analizie (rozumiejąc wcześniej zadanie) możemy przystąpić do tworzenia planu rozwiązania, możemy uchwycić strukturę matematyczną zadania (ogółem ze zbędnych słów potocznych, ze zbędnych informacji pozamatematycznych) przedstawić w postaci pewnego schematu (działania, czy też później równania). W ten sposób stopniowo weszliśmy ze świata rzeczywistego do świata matematyki.

Wykonanie planu rozwiązania następuje już w świecie matematyki, polega ono na wykonaniu zaplanowanych działań arytmetycznych. Otrzymujemy pewien wynik liczbowy.

Trzeba teraz sprawdzić, czy otrzymana liczba może stanowić odpowiedź do zadania (lub w zadaniach nietypowych podjąć decyzję zgodną z otrzymaną liczbą). Jest to rzut oka wstecz na uzyskane rozwiązanie. W tym momencie można wyłapać popełnione wcześniej błędy. Może źle wyobraziliśmy sobie przedstawioną w zadaniu historyjkę, może dobraliśmy niewłaściwe działanie, może popełniliśmy błędy rachunkowe.

Dzieci powinny rozwiązywać wiele zadań: o podobnej treści, ale różnych danych liczbowych; o podobnie brzmiącej treści, ale innym schemacie matematycznym; wyrażone bardzo odmiennym językiem, a jednak rozwiązywane według wspólnego schematu itd., by zdobyć umiejętność dobierania różnych dróg rozwiązania.

Rozwiązywanie zadań tekstowych ma wiele zalet. Pozwala asymilować, wykorzystywać i utralać wiadomości matematyczne, pozwala ćwiczyć sprawności rachunkowe, wyrabia elastyczność w wyszukiwaniu i stosowaniu różnych sposobów rozwiązania.

Rozwiązywanie gotowych zadań tekstowych ma też pewne niedostatki. W gotowym typowym zadaniu tekstowym sytuacja jest już zazwyczaj w dużej części zmatematyzowana: wyodrębnione są dane liczbowe, pytanie wyraźnie wskazuje na szukaną, język mocno sugeruje działania arytmetyczne (np. zwroty: *dodał, dołożył, dał* wiążą się z dodawaniem; określenia: *zabrała, wzięła, uciekły* wskazują na odejmowanie). Tekst gotowego zadania arytmetycznego często wyczyszczony jest z szumów informacyjnych, prawie nie zawiera tych informacji o sytuacji konkretnej, które są z nią mocno związane, lecz nie są potrzebne do rozwiązania. Rozwiązanie gotowych zadań tekstowych nie zawsze zatem sprzyja rozwijaniu umiejętności matematyzowania i stosowania matematyki.

Temu celowi może służyć samodzielne układanie zadań tekstowych związanych z pewnymi sytuacjami z życia lub ilustracjami oraz układanie zadań tekstowych do danych wyrażen arytmetycznych (a potem też równań). Dzieci, układając zadania tekstowe, ujawniają swe ułomne rozumienie konwencji takiego zadania, chociaż wcześniej poprawnie rozwiązywały zadania opowiedziane przez nauczycielkę.

Układanie arytmetycznych zadań tekstowych wymaga innej aktywności niż rozwiązywanie gotowych zadań. Dzieci napotykają przy tym różne trudności. Prześledzimy je na kilku przykładach. Pochodzą one z dwóch klas zerowych. W obu klasach dzieci rozwiązywały już z powodzeniem za-

dania tekstowe podawane ustnie przez nauczycielkę. Początkowo realizowały dokładnie akcję zadania (układając jabłka lub rozdając cukierki zgodnie z jego treścią), następnie wykorzystywały żetony i patyczki do symulowania tej treści, a potem obliczały wynik w pamięci i wypowiadały głośno odpowiednie działanie i jego wynik. Dzieci próbowały zapisać rozwiązanie za pomocą kartoników z cyframi i znakami arytmetycznymi.

Nowa sytuacja, jaką jest układanie zadań do podanych działań, sprawia spore trudności. Zobaczmy to na przykładach.

Nauczycielka zapisała na tablicy $2 + 3 = 5$ i wypowiedziała zadanie:

2) *Babcia miała dwa jabłka, dziadek przyniósł jeszcze trzy. Ile jabłek mieli razem?*

Dzieci bez trudu podały rozwiązanie, więc nauczycielka zaproponowała im, by same wymyśliły inne zadanie tekstowe do tego samego działania.

Oto ich kolejne propozycje:

3) *Kasia: Były w lesie dwa wilki, doszły trzy wilki i było pięć wilków.*

4) *Agnieszka: Były w lesie dwa muchomorki, wyrosły trzy muchomorki.*

5) *Marianna: Na polanie skakały dwa zajączki i przyskakały jeszcze trzy zajączki. Ile było zajączków? Pięć.*

Propozycja Kasi (3) to opowiadanie o wyobrażonej sytuacji, w którym można dostrzec strukturę dającą się opisać działaniem $2 + 3 = 5$. Dziecko umieściło w swym opowiadaniu wszystkie dane liczbowe, a arytmetyczny związek między nimi adekwatnie przełożyło na język potoczny (+ doszły, = i było). Kasia nie zdecydowała jednak, która liczba ma zostać szukaną, więc nie zataiła jej w treści zadania i nie wskazała jej w pytaniu. Po wyjaśnieniach nauczycieli (nie można wszystkiego mówić, trzeba o coś zapytać) padła propozycja Agnieszki (4). Uwzględniła w niej dwie dane liczbowe i działanie między nimi, ale skutecznie ukryła szukaną, nawet o nią nie pytając. Dopiero propozycja Marianny (5) jest zadaniem tekstowym, wyposażonym jednak od razu w odpowiedź.

Wydawałoby się, że dzieci już zrozumiały, na czym polega układanie zadań do podanego wyrażenia arytmetycznego. Nauczycielka zaproponowała im zatem nowe: $8 - 3 = 5$. Dzieci podały kolejno następujące przykłady:

6) *Paweł: Miał chłopczyk trzy zabawki, tatuś mu kupił jeszcze pięć.*

7) *Paweł (ten sam): Chłopczyk miał osiem zabawek, i tata przyniósł mu jeszcze trzy.*

- 8) Marianna: *Przyniosła dziewczynka osiem kotków, a chłopczyk jej wzięł trzy kotki i było pięć kotków.*
- 9) Piotr: *Miał dziadek osiem bułeczek. Weszła wnuczka i zjadła trzy bułeczki. I było pięć bułeczek.*
- 10) Kasia: *Miałam w ogródku osiem kwiatków. Przyszedł kolega i zerwał trzy kwiatki. Ile było kwiatków? Pięć.*

Nauczycielka poleciła układać zadania do nowego działania: $6 - 4 = 2$.

- 11) Agnieszka: *W klasie było sześć tablic. Przyszła pani i zabrała cztery. Ile to się równa?*

Paweł (6) wziął pod uwagę tylko dwie (mniejsze) liczby, nie uzgodnił działania, trzecią liczbę (sumę pozostałych) pozostawił jako szukaną, nie pytając o nią. W przykładzie (7) ten sam chłopiec wykorzystał dwie liczby kolejno występujące w odejmowaniu, ale użył złego czasownika *przyniósł* i nie zapytał o szukaną. Zmiana dodawania na odejmowanie stworzyła chłopcu nową trudność.

Marianna (8) i Piotr (9) ułożyli nie zadania, lecz opowiadania z wykorzystaniem wszystkich liczb i w zgodności z odejmowaniem. Dopiero Kasia (10) ułożyła poprawnie zadanie tekstowe, nie powstrzymała się jednak od natychmiastowego podania wyniku. Agnieszka (11) w swoim zadaniu pyta nie o szukaną z wyobrażonej sytuacji (Ile tablic zostało w klasie?), a o wynik działania arytmetycznego opisującego tę sytuację.

Trudno się dziwić trudnościom dzieci. Aby bowiem ułożyć arytmetyczne zadanie tekstowe do zadanego wyrażenia arytmetycznego, trzeba wyobrazić sobie pewną sytuację z otaczającej nas rzeczywistości i „nagiać” ją do danej formuły arytmetycznej. Ponadto trzeba zdecydować, która wartość liczbowa będzie szukaną, zataić ją w treści zadania i wskazać ją w pytaniu. Gdy dzieci tę umiejętność opanują (czego były bliskie na wspomnianej lekcji), głębiej zrozumieją konwencję arytmetycznego zadania tekstowego.

Układanie zadań tekstowych od pewnych sytuacji konkretnych czy obrazków nie jest łatwiejsze. Rozważmy przykłady z innej grupy sześciolatków.

Nauczycielka pokazuje dzieciom różne obrazki. Początkowo sama układa do nich zadania tekstowe, a dzieci je rozwiązują. Gdy wydaje się, że dzieci zrozumiały konwencję zadania tekstowego, nauczycielka proponuje im samodzielne ułożenie zadań do następnych obrazków. I tu pojawiają się trudności: dzieci albo układają historyjki, w których brak jest py-

tania (szukanych), albo układają poprawne w treści zadania tekstowe, niestety niezgodne z danymi na obrazku. Rozważmy przykłady.

(Obrazek przedstawia pięć kotów. Trzy się bawią, dwa śpią).

12) Nauczycielka: *Na podwórku pięć kotów bawilo się piłką. Dwa poszły spać. Ile kotów zostało przy zabawie?*

(Na obrazku: trzy koty piją mleko z trzech misek. Dwie miski z mlekiem leżą obok).

13) Marta: *Kotki grały w piłkę. Się zmęczyły. Trzy poszły pić.*

Nauczycielka: *O co zapytasz?*

Marta: *Ile kotków brakuje do tych dwóch misek?*

14) Monika: *Przyszły do mleka trzy kotki. Ile kotków brakuje?*

15) Nauczycielka: *Dziewczynka postawiła na podłodze pięć misek z mlekiem. Trzy kotki przybiegły i zaczęły pić mleko, każdy ze swojej miski. Ile misek zostało z mlekiem?*

Marta (13) i Monika (14) wykorzystały w swych zadaniach za mało danych z rysunku, czego nie były świadome, bo rejestrowały potrzebne informacje oczyma. Równocześnie wiedziały, że dane te widzą też ich koledzy. Marta początkowo nie pytała o żadną szukaną, a potem zdradziła w pytaniu odpowiedź.

(Na rysunku: chłopiec zrywa jabłka z jabłoni. W rękach trzyma dwa, a cztery pozostają na jabłoni).

16) Nauczycielka: *Na jabłoni rośło sześć jabłuszek. Co dalej?*

Tomek: *Na jabłoni rośło sześć jabłuszek. Chłopak zerwał dwa jabłka. Ile zerwał?*

17) Tomek (ten sam): *Na jabłoni rośło sześć jabłuszek. Przyszedł chłopak, zerwał jabłka i zostało ile?*

18) Nauczycielka: *Na jabłoni rośło sześć jabłuszek. Przyszedł chłopczyk i zerwał kilka jabłuszek. Na jabłonce zostało cztery. Ile jabłek zerwał chłopiec?*

Tomek (16) zapytał o daną, którą wcześniej podał. Nie zaniepokoiło go to, bo przecież i tak pytał o liczbę, którą można odczytać z rysunku. W drugim zadaniu (17) pominął widoczną na rysunku daną niezbędną do rozwiązania. Tomek miesza informacje wypowiedziane z zaobserwowanymi na rysunku. Jego koledzy również, bo odpowiedzieli na pytanie (17), zliczając cztery jabłka wiszące na jabłoni, a nie potrafili podać działania. Ujawnili tym samym niestabilność swego rozumienia konwencji zadania tekstowego.

(Rysunek przedstawia 5 jaskółek siedzących na drutach i 5 nadlatujących).

19) Przemek układa zadanie: *Pięć ptaszków było na drucie. Jeszcze jeden usiadł na drucie. Ile ptaszków zostało?*

Dla Przemka rysunek był jedynie inspiracją do ułożenia zadania o jaskółkach. Nie skorzystał on dosłownie z ilustracji, tylko w wyobraźni przesunął jedną jaskółkę na drut. Szkoda, że nie miał okazji objaśnić tego zadania.

Układanie zadań do obrazków nie wydaje się być trudne, ponieważ wszystkie liczby (dane i szukane) są widoczne na rysunku. Ale właśnie to sprawia trudność. Trzeba wyłuskać z sytuacji te elementy, które można określić liczbami; znaleźć związki między nimi dające wyrazić się przez działania arytmetyczne; zdecydować, która liczba będzie szukaną, udawać, że jej nie widać na obrazku, zataić ją przy opisie sytuacji (obrazka) i zapytać o nią na końcu zadania. To wszystko zrobić wiedząc, że inni też tylko udają, że nie widzą wszystkiego. Uświadomienie sobie przez dzieci tego, że wspólnie uczestniczą w pewnej umowie, że pytanie w zadaniu nie jest „na serio”, pomaga w zrozumieniu konwencji arytmetycznego zadania tekstowego.

Nie można przecenić roli, jaką spełnia rozwiązywanie arytmetycznych zadań tekstowych w edukacji matematycznej. Należy zatem dzieci od początku zapoznawać z konwencją tych zadań i oswajać z towarzyszącymi im przeżyciami emocjonalnymi oraz wymaganym wysiłkiem intelektualnym.

Sześćcioletnie dzieci wstępujące do klasy zerowej nie umieją jeszcze układać zadań tekstowych, muszą się oni tej sztuki dopiero nauczyć, muszą zrozumieć i przyjąć konwencję zadania tekstowego. Często pozory – poprawne rozwiązywanie niektórych gotowych zadań – wskazują na to, że dzieci rozumieją tę konwencję. Tak jednak nie jest. Dzieci podają poprawne rozwiązanie i wynik między innymi dlatego, że traktują te zadania jako pewne rzeczywiste problemy, podobne do tych, które rozwiązywały w życiu codziennym (np. przypominają sobie rzeczywistą sytuację kupowania dwóch ciastek). Te przedszkolne intuicje można przedłużać, zachęcając dzieci do tworzenia i rozwiązywania różnorodnych arytmetycznych zadań tekstowych.

Literatura

- Gruszczyk-Kolczyńska E., *Dlaczego dzieci nie potrafią uczyć się matematyki?*, Warszawa 1989
- Gruszczyk-Kolczyńska E., *Edukacja matematyczna sześciolatków*, Wychowanie w Przedszkolu nr 1–12 LW – Wkładka matematyczna, Warszawa 1993
- Krygowska Z., *Zarys dydaktyki matematyki, część 3*, Warszawa 1980
- Polya G., *Jak to rozwiązać?*, Warszawa 1964
- Turnau S., *Zadania tekstowe i nauczanie stosowania pojęć matematycznych*, w: *Nauczanie początkowe matematyki*, pod red. Z. Semadeniego t. 3, Warszawa 1986
- Urbańska A., *Pojęcie liczby naturalnej w rozumieniu dzieci rozpoczynających naukę szkolną*, Kraków 1987, (nie publikowana rozprawa doktorska)