

Bożena Rożek

O trudnościach związanych z rozumieniem pojęcia pola prostokąta przez dzieci w wieku od 6 do 9 lat

Wstęp

W szkolnym nauczaniu kształtowanie pojęcia pola prostokąta rozpoczyna się od liczenia jednostkowych kwadratów wypełniających jego powierzchnię. Następnie przechodzi się od liczenia kratek do pojęcia pola prostokąta. W przejściu tym nauczyciele dostrzegają jedynie problemy związane z pojęciem iloczynu, reszta wydaje się być oczywista. Okazuje się, że kolosalne problemy pojęciowe tkwią w etapie wcześniejszym, od momentu, gdy dziecko „nie wie nic” do czasu, gdy liczy kratki. O etapie tym wiadomo dziś bardzo mało, gdyż niewiele badań dotyczyło tych kwestii.

Dużo światła na tę sprawę rzucają badania Lynne Outhred z Macquarie University w Australii¹. Niniejsza praca zawiera wyniki badań wzorowanych na cytowanych badaniach australijskich przeprowadzonych w Polsce w roku szkolnym 1992/93 z dziećmi w wieku od 6 do 9 lat. Dotyczyły one sposobu postrzegania przez dzieci w prostokącie wyłożonym jednostkowymi kwadratami układu szeregów i kolumn oraz wpływu widzenia takich struktur na obliczanie liczby kraterki w prostokącie.

Ponieważ podstawową rolę w tym artykule odgrywają terminy: „pokratkowany prostokąt”, „kratka”, „szereg” i „kolumna”, konieczne jest wyjaśnienie, w jakim sensie one występują. Przez „pokratkowany prostokąt” rozumiemy prostokąt pokryty jednostkowymi kwadratami, które powstały w wyniku rysowania ciągłych linii, zaś pojedynczy kwadrat nazwiemy „kratką”. W pokratkowanym prostokącie możemy wyróżnić rzędy poziome i rzędy pionowe. Te pierwsze to „szeregi”, a drugie – „kolumny”.

¹ L. Outhred, M. Mitchelmore, *Representation of area: a pictorial perspective*. Proceedings of the Sixteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Durham, New Hampshire 1992; L. Outhred, *The array: convention or confusion*, referat wygłoszony na ICME-7 (VII Międzynarodowy Kongres Nauczania Matematyki). Quebec 1992, (tekst rozdany uczestnikom)

Oczekuje się, że wyznaczenie liczby kraterów w pokratkowanym prostokącie za pomocą iloczynu wymaga od dziecka następujących czynności umysłowych:

- rozpoznania w pokratkowanym prostokącie struktury szeregów i kolumn jako dwóch prostopadłych układów równoległych linii;
- dostrzeżenia relacji pomiędzy liczbą szeregów i kolumn a długością boków prostokąta;
- stwierdzenia, że liczba pojedynczych kwadratów równa się iloczynowi długości boków prostokąta.

Rozpoznanie w pokratkowanym prostokącie dwóch struktur wymaga:

- zauważenia struktury rozbicia prostokąta na pionowe kolumny i przedstawienia tego za pomocą linii;
- zauważenia struktury rozbicia prostokąta na poziome szeregi i przedstawienia tego za pomocą linii;
- jednoczesnego widzenia tych struktur oraz wzajemnych związków między nimi.

Jest dość oczywiste, że widzenie tego wymaga operacyjności w sensie Piageta.

Polecenie rysowania pokratkowanego prostokąta wykazuje, jakie cechy omawianych struktur są istotne dla dzieci oraz pomaga w coraz lepszym rozumieniu układu szeregów i kolumn.

Analiza dziecięcych rysunków pozwoliła wyróżnić kilka aspektów trudności związanych z rozumieniem pojęcia pola prostokąta:

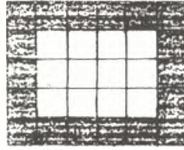
- aspekt geometryczny,
- aspekt pomiaru,
- aspekt liczbowy.

Na przykładzie prac dzieci omówiono różne strategie rysowania. Interesujące jest, jak uczniowie osiągają postęp od rysowania nie uszeregowanych pojedynczych kwadratów do powierzchni, w których linie reprezentują szeregi i kolumny.

Organizacja badań

Badania przeprowadzono w roku szkolnym 1992/93, obejmując nimi sześciolatki krakowskiego przedszkola oraz dzieci w wieku od 7 do 9 lat ze Szkoły Podstawowej nr 82 w Krakowie. Uczniowie w obecności obserwatora indywidualnie rozwiązywali zadania dotyczące liczenia, rysowania oraz mierzenia powierzchni prostokątnych.

W zadaniu pierwszym dzieci pokrywały powierzchnię prostokąta o wymiarach 3 x 4 kartonowymi kwadracikami o boku 4 cm (rys. 1) i liczyły, ile ich zużyły.



Rys. 1

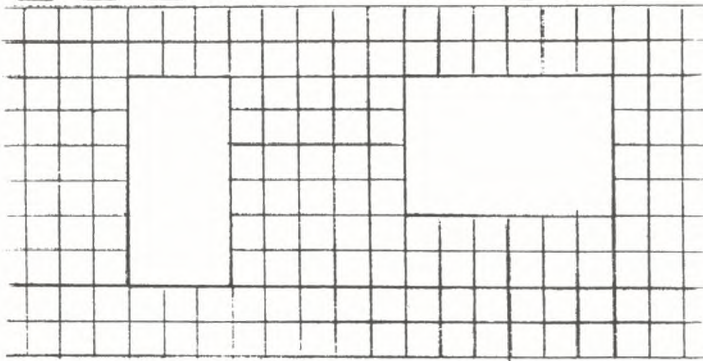
Następnie obserwator prosił: „Narysuj teraz to, co ułożyłeś” oraz pytał o liczbę narysowanych kwadratów.

Później dzieci otrzymywały plansze z rysunkami (rys. 2).

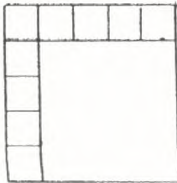
2a



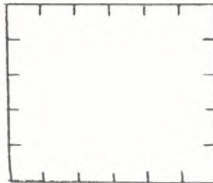
2b



2c



2d



2e



Rys 2

Dwa zadania dotyczyły samego liczenia. Dzieci obliczały liczbę kropek w układzie 5 rzędów po 6 (rys. 2a) oraz liczbę kafelków potrzebnych do wypełnienia prostokątów o wymiarach 3×6 i 4×6 umieszczonych na kwadratowej sieci (rys. 2b).

W następnych zadaniach dzieci pytano o liczbę kwadratów potrzebnych do pokrycia całego prostokąta, ale również proszono o uzupełnienie rozpoczętego rysunku (rys. 2c, 2d).

W zadaniu ostatnim należało obliczyć, ile potrzeba kwadracików o boku 1 cm do pokrycia prostokąta o wymiarach 5 cm x 4 cm (dzieciom pokazujemy narysowany z boku kwadracik – rys. 2e), a następnie pokratkować prostokąt. Tym razem nie było żadnych wskazówek dotyczących układu szeregów i kolumn. Przed przystąpieniem do tego zadania dzieci otrzymały zadanie pomocnicze: zmierzyć narysowaną obok linię (o długości 10 cm). Miało to na celu zachęcenie ich do używania linijki również w 2e.

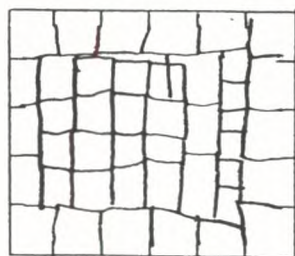
Aspekty dziecięcych trudności

Analiza rysunków pozwoliła wyróżnić istotne elementy, które niewątpliwie mają zasadnicze znaczenie dla rozumienia przez dzieci pojęcia pola prostokąta. Największy problem sprawiała badanym nieumiejętność uchwycenia wszystkich cech jednocześnie. Dzieci napotkały trudności trojakiego rodzaju: w aspekcie geometrycznym, w aspekcie pomiaru oraz w aspekcie liczbowym.

Aspekt geometryczny zostaje przez dziecko uchwycony, gdy postrzegając układ jednostkowych kwadratów, uświadamia sobie intuicyjnie, ale wyraźnie, że są ułożone one w regularny wzór w postaci szeregów i kolumn, równoległe do boków prostokąta. Aby obserwator mógł stwierdzić, że ta geometryczna struktura została dostrzeżona przez dziecko, nie jest konieczne odtworzenie jej w postaci pokratkowanego prostokąta, czasem wystarcza analiza sposobu, w jaki dziecko układa pojedyncze kwadraciki.

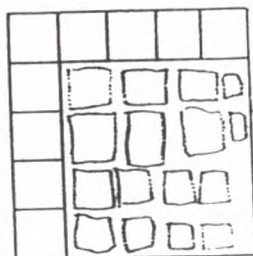
Z aspektem tym łączą się trzy charakterystyczne poziomy zachowań dzieci, które zilustrujemy przykładami dziecięcych prac:

- całkowite pomijanie układu szeregów i kolumn (rys. 3a),
- zachowanie tylko szeregów (rys. 3b) albo tylko kolumn;
- zachowanie wyraźnego zarówno układu szeregów, jak i kolumn (przez rysowanie pokratkowanego prostokąta bądź rysowanie pojedynczych kwadratów mających niektóre boki wspólne), (rys. 3c).



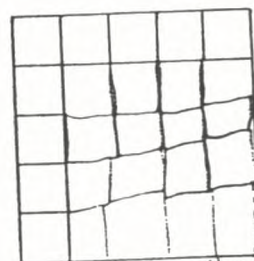
Łukasz - lat 7

Rys. 3a



Krzysztof - lat 6

Rys. 3b

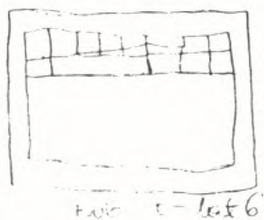


Magda - lat 6

Rys. 3c

W aspekcie pomiaru dzieci muszą sobie uzmysłowić, że konieczne jest pokrycie całej powierzchni prostokąta i to kwadratami tej samej wielkości. Prace na rys. 4a, 4b, 4c ukazują typowe dla tego aspektu zachowania uczniów:

- Niepokrywanie całej powierzchni, gdyż ważniejsza jest zależność liczbowa (rys. 4a). Robert, mimo iż zauważył możliwość narysowania poziomej linii ciągłej, nie dokonuje dalszego dzielenia na pojedyncze kwadraty, gdyż ma ich już 12.
- Nierysowanie jednakowych kwadratów, w wyniku czego powstają odstępy lub luki często wypełniane dodatkowymi kwadratami (rys. 4b, 4c).
- Pokrywanie całej powierzchni jednakowymi kwadratami.



Robert - lat 6

Rys. 4a



Włocławek - lat 7

Rys. 4b



Włocławek - lat 7

Rys. 4c

Rozumienie aspektu liczbowego polega na uzmysłowieniu sobie, że liczba rzędów i kolumn w geometrycznej strukturze prostokąta odpowiada liczbie jednostek długości zawartych w bokach prostokąta (tą jednostką długości jest bok kwadratu jednostkowego).

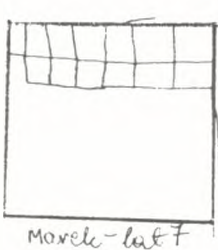
Prace z rys. 5a, 5b, 5c, 5d ukazują następujące postawy uczniów:

– Zachowanie liczby kwadratów, ale nieukładanie ich w strukturę szeregów i kolumn (rys. 5a). Marek po narysowaniu liczy kwadraty, w liczeniu popełnia błąd, jest przekonany, że jest ich 12, więc rezygnuje z dalszego rysowania).

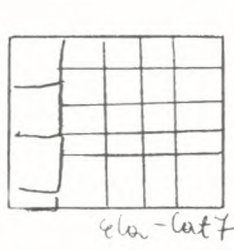
– Rysowanie szeregów i kolumn równej długości bez powiązania ich z zadaną długością boków (rys. 5b, 5c).

– Ograniczanie związków liczbowych do jednego wymiaru prostokąta, np. rysowanie struktury tak, że liczba szeregów równa jest długości jednego boku, ale liczba kolumn różni się od długości drugiego boku prostokąta (rys. 5c). Ela rysując ułożoną przed chwilą strukturę, mierzy bok kwadratu i rysuje trzy pojedyncze kwadraty wzdłuż krótszego boku. Następnie rezygnując z mierzenia, dorysowuje kolejne, nie dbając o długość drugiego boku.

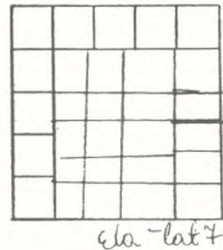
– Uwzględnianie liczby szeregów i kolumn odpowiadającej długościom boków prostokąta.



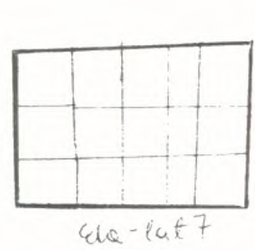
Rys. 5a



Rys. 5b



Rys. 5c



Rys. 5d

Sposoby rysowania

W wyniku obserwacji poczynionych w trakcie samodzielnej pracy dzieci oraz analizy ich wytworów można wyróżnić kilka sposobów rysowania.

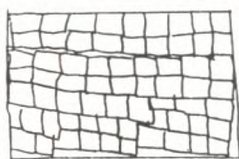
1) Sposoby związane z pojedynczymi kwadratami:

- a) pomijanie szeregowania w pionie i w poziomie;
- b) szeregowanie w jednym kierunku (pionowo albo poziomo);
- c) rysowanie szeregów i kolumn, ale ze stopniowym gubieniem uszeregowanej struktury;
- d) prawidłowe układanie szeregów i kolumn.

2) Sposoby dotyczące struktury szeregów i kolumn:

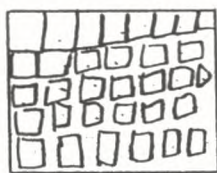
- przejsięcie od pojedynczych kwadratów do częściowego liniowania;
- rysowanie linii w jednym wymiarze i dzielenie na pojedyncze kwadraty;
- rysowanie kilku kwadratów (np. wzdłuż boków) jako linie przewodnie, a następnie liniowanie;
- rysowanie prawidłowego układu szeregów i kolumn metodą liniowania.

Aby zilustrować wymienione sposoby rysowania stosowane przez dzieci, omówimy kilka przykładów ich prac (rys. 6a-i).



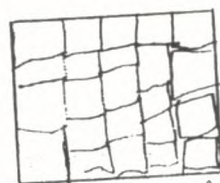
Witek - lat 6

6a



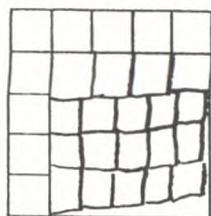
Ma - lat 7

6b



Magda - lat 6

6c



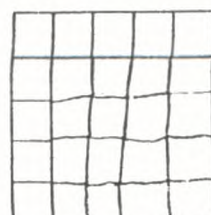
Łukasz - lat 7

6d



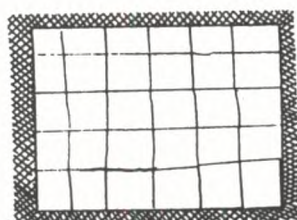
Justyna - lat 6

6e



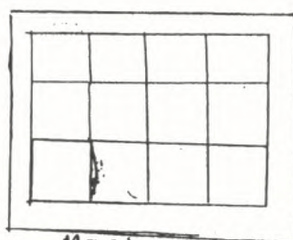
Justyna - lat 7

6f



Kasia - lat 6

6g



Marcin - lat 8

6h



Ania - lat 9

6i

Rys. 6

Sposób 1a (rys. 6a). Na początku (dwa pierwsze szeregi) Witkowi udaje się rysować regularny wzór. W efekcie końcowym otrzymuje jednak strukturę nie uszeregowaną ani w pionie, ani w poziomie.

Sposób 1b (rys. 6b, 6c). Ula nie uchwyciła jeszcze istoty układania kwadracików jako pokrywania obszaru przez powtarzanie tej samej jednostki. Przy postrzeganiu struktury prostokąta koncentruje się na szeregach. Magdzie nie udaje się odtworzyć geometrycznej struktury modelu, wyraźnie widać, iż skupia się jedynie na kolumnach.

Sposób 1c (rys. 6d). Rysunek Łukasza świadczy o tym, że nie do końca rozumie on strukturę szeregów i kolumn. Szeregowanie poziome jest poprawne, a nawet liczba tych rzędów jest zgodna z długością boku, jednak stopniowo gubi pionowy układ kwadratów.

Sposób 1d (rys. 6e). Zapełnianie prostokąta Justyna rozpoczyna od rysowania pojedynczych kwadratów dookoła wzdłuż boków. Mimo to udaje jej się zachować prawidłową strukturę geometryczną.

Sposób 2a (rys. 6f). W pierwszym i w drugim szeregu Justyna rysuje pojedyncze kwadraty. Następnie zauważa możliwość wykonania linii ciągłej, więc pewne odcinki liniuje.

Sposób 2b (rys. 6g). Swój rysunek Kasia rozpoczyna od dwóch pojedynczych kwadratów, a następnie rysuje linię poziomą i dokonuje podziału na kwadraty. W trakcie pracy sama komentuje swoją decyzję mówiąc: „to ja sobie taką jedną linię zrobię, później takie kreski i będzie mi łatwiej, później taką kreskę następną” (rysuje drugą poziomą linię).

Sposób 2c (rys. 6h). Marcin dostrzega wagę bocznych oznaczeń. Wzdłuż krótszego boku przykłada kartonowe kwadraty i obrysowuje je, a następnie rysuje poziome linie. Teraz kartonik przykłada do dłuższego boku, wykonuje oznaczenia i rysuje linie pionowe. Chłopiec ten nie tylko uświadamia sobie strukturę szeregów i kolumn, ale także zauważa zależność między ich liczbą a długością boków.

Sposób 2d (rys. 6i). Ania swoją pracę rozpoczyna od zmierzenia boku małego kwadratu i narysowania go w rogu prostokąta oraz pociągnięcia pierwszej poziomej linii. Następnie odmierza na krótszym boku 1 cm odcinki i rysuje pozostałe linie poziome. Dalej odmierza na dłuższym boku i rysuje linie pionowe. Licząc kwadraty mówi: „5 kwadratów w 4 rzędach to $5 \cdot 4$ ”.

Omówienie wyników

Rezultaty badań wykazują, że przedstawianie powierzchni zbudowanej z kwadratów za pomocą dwóch rodzajów równoległych linii jest znacznie trudniejsze dla dzieci niż można by przypuszczać. Niepowodzenia uczniów są dużo większe w zadaniach „na rysowanie” niż w zadaniach „na układanie”.

Przyjrzyjmy się bliżej, jakie czynności musi wykonać dziecko, wypełniając prostokąt gotowymi płytkami:

1) ułożyć kwadraciki tak, by się stykały, by nie było odstępów;

2) zwrócić uwagę, aby pokryć całą powierzchnię i „nie wyjść” poza prostokąt;

3) zdecydować, że więcej płytek już nie potrzeba.

Natomiast dziecko nie musi przy tym uświadamiać sobie struktury szeregów i kolumn, gdyż podczas układania płytek „to samo wychodzi”.

Rysowanie wymaga od dziecka przełożenia na rysunek tego, co zakodowane było poprzednio w czynnościach. Jest to przejście z poziomu enaktywnego na bardziej zaawansowany poziom ikoniczny, w którym wymaga się od niego odzwierciedlenia cech danych na niższym poziomie oraz jednoczesnego uwzględnienia trzech aspektów: geometrycznego, pomiarowego i liczbowego.

W czasie tej pracy dziecko musi:

1) zachować liczbę i pokryć całą powierzchnię;

2) przejść z powierzchni kwadratu na jego brzeg w przedstawianiu na rysunku;

3) zachować układ szeregów i kolumn;

4) zauważyć, że struktura powstaje przez rysowanie linii poziomych i pionowych.

Dodatkowych trudności dostarczają dzieciom wymagania pomiarowe, większość bowiem dzieci w zadaniu 1 narysowała najpierw granice struktury (ramkę), a następnie musiała opracować metodę dzielenia każdej długości na wymaganą liczbę części.

Głównym celem badań było ujawnienie trudności i zwrócenie uwagi na konieczność kształtowania u dzieci geometrycznej struktury prostokąta.

Bez dostrzeżenia układu szeregów i kolumn w prostokącie o wzorze szachownicy nie zostanie zrozumiane ani znaczenie długości boków prostokąta, ani obliczanie pola przy pomocy mnożenia. Warto przy tym zwrócić uwagę na wniosek optymistyczny: mimo że struktura szeregów i kolumn nie jest oczywista dla dzieci, to w trakcie badań wyraźnie można było

zauważyć postęp, jaki one osiągają. Często dziecko początkowo rysuje pojedyncze kwadraty, potem częściowo liniuje prostokąt, by w końcu dojść do pokratkowanego prostokąta, w którym linie reprezentują szeregi i kolumny.

Większość dzieci nabywa tych umiejętności w trakcie czynności pozaszkolnej, bez specjalnego uczenia ich tego. Należy jednak pamiętać o tych, które nawet na końcu badania nie uświadamiają sobie omawianej struktury.

Literatura

Lowenfeld, V., Brittain W.L., *Twórczość, a rozwój umysłowy dziecka*, Warszawa 1977

Wallon P., Cambier A., Engelhart D., *Rysunek dziecka*, Warszawa 1993