ROCZNIK NAUKOWO-DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE
Zeszyt 172 *Prace Pedagogiczne XVII* 1995

*Elżbieta Urbańska*

# Prawa działań w matematycznym kształceniu przyszłych nauczycieli klas początkowych

Jednym z celów matematycznego kształcenia dzieci w klasach I–III jest kształtowanie pojęcia liczby naturalnej, a także rozumienia czterech działań arytmetycznych wraz z ich podstawowymi własnościami. Osiągnięcie tych celów zależne jest, między innymi, od matematycznego przygotowania nauczyciela, od jego rozumienia wymienionych zagadnień oraz od ich właściwego opracowania na lekcjach matematyki.

W swoim opracowaniu podzielę się refleksjami z obserwowanych przeze mnie lekcji matematyki w klasach początkowych, na których dzieci zajmowały się własnościami działań arytmetycznych. Zasygnalizuję też problemy związane z rozumieniem praw działań przez studentów – przyszłych nauczycieli klas I–III.

Przedstawiony materiał stanowi wynik wstępnego etapu badań, będących przyczynkiem do opracowania efektywnego sposobu matematycznego kształcenia studentów kierunku nauczanie początkowe.

W programie matematyki dla klas I–III czytamy:

„Pożądane jest, aby wszelkie wypowiedziane na lekcji reguły i prawa arytmetyczne stanowiły podsumowanie świadomej działalności uczniów, którzy powinni być wewnętrznie przekonani o słuszności tych reguł i powinni starać się formułować je własnymi słowami. Nie należy podawać gotowych schematów postępowania, które uczeń miałby opanować przez wielkorotne powtarzanie i ćwiczenie, ani tym bardziej wymagać uczenia się na pamięć jakichkolwiek praw.

Można uznać, że dziecko zna własności działań, gdy umie poprawnie użyć ich w zadaniach, gdy korzysta z nich świadomie, a nie mechanicznie".

Z uczniami klas I–III trzeba tak organizować pracę na lekcji, by nie przyzwyczajać ich do niepoprawnej metody: uogólniania zaobserwowanych pojedynczych faktów bez żadnego uzasadnienia, czy do uzasadniania prawdziwości twierdzeń przez wykazanie, iż zachodzą w jednym lub kilku przypadkach.

Dobrym zabiegiem dydaktycznym byłoby na przykład organizowanie z dziećmi takich ćwiczeń na materiale konkretnym, w wyniku których następowałoby uogólnienie zastosowanej metody (a nie pojedynczego faktu) i odkrycie przez dzieci ogólnego prawa. Liczne przykłady takiego podejścia do omawianych zagadnień znajdujemy w III tomie *Nauczania początkowego matematyki* pod redakcją Z. Semadeniego[1]

Chcąc w taki sposób realizować materiał związany z wprowadzeniem praw działań, nauczyciel sam musi dobrze znać omawiane własności, umieć je uzasadnić, wiedzieć kiedy i jak można je stosować.

Okazuje się jednak, że przygotowanie nauczycieli do wprowadzania praw działań nie zawsze jest zadowalające.

Przypatrzmy się fragmentom obserwowanych przeze mnie lekcji, które były przeprowadzone przez nauczycielki z kilkuletnim stażem pracy (5–8 lat), absolwentki studiów magisterskich kierunku nauczanie początkowe.

(W opisie lekcji N: poprzedza cytowaną wypowiedź nauczycielki,
U: wypowiedź różnych uczniów)

1. Klasa II.

(Nauczycielka oblicza z dziećmi iloczyny: $2 \cdot 9$, $9 \cdot 2$, $3 \cdot 9$, $9 \cdot 3$, a następnie zapisuje: $2 \cdot 9 = 9 \cdot 2$, $3 \cdot 9 = 9 \cdot 3$):

N: *Czy tak jest dla wybranych liczb, czy dla wszystkich?*

U: *Dla wszystkich.*

N: *A ktoś by pomyślał, że tylko dla tych. Napiszemy to literkami. Kto spróbuje do pierwszego działania. Pamiętajcie tylko, że trzeba pierwszymi literami alfabetu.*

(Uczeń podpisuje): $2 \cdot 9 = 9 \cdot 2$
$a \cdot b = b \cdot a$

N: *Kto napisze pod drugim?*

(Uczeń podpisuje): $3 \cdot 9 = 9 \cdot 3$
$c \cdot b =$ (nauczycielka przerywa)

N: *Po co piszesz c, napisz a, tak jak poprzednio.*

(Uczeń poprawia): $3 \cdot 9 = 9 \cdot 3$
$a \cdot b = b \cdot a$

N: *Gdybyśmy podstawili pod inny zapis, to też wyszedłby nam ten sam wzór. Czyli mamy udowodniony wzór na prawo przemienności mnożenia* (wskazuje na zapis $a \cdot b = b \cdot a$). *Jakie liczby można tu podstawić?*

---

[1] *Nauczanie początkowe matematyki.* praca zbiorowa pod red. Z. Semadeniego, Warszawa 1985, t. III, s. 51, 285, 294

U: *Wszystkie*

N: *A teraz przypomnimy sobie takie obliczenia:*

(Nauczycielka pisze na tablicy)

$6 \cdot (3 + 4) = 6 \cdot 3 + 6 \cdot 4 = 18 + 24 = 42$

*Robiliśmy wiele takich zadań i zawsze tak mnożyliśmy, a potem dodawaliśmy. Czy ktoś dałby radę ułożyć wzór literowy do tego prawa?*

(Uczeń podchodzi do tablicy i podpisuje pod obliczeniem):

$6 \cdot (3 + 4) = 6 \cdot 3 + 6 \cdot 4 = 18 + 24 + 42$

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c = de$ (nauczycielka przerywa)

N: *Dalej już nie trzeba. Zmaż to de ... tyle wystarczy. Mamy teraz prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania. Jakie liczby można podstawiać pod te litery?*

U: *Wszystkie.*

2. Klasa III.

(Nauczycielka przyczepia na tablicy magnetycznej koła i kwadraty. Zaznacza pętlą dwa zbiory: jeden dwunastoelementowy zbiór kół, drugi ośmioelementowy zbiór kwadratów).

N: *Podzielcie te zbiory na podzbiory czteroelementowe.*

(Uczniowie wykonują polecenie. Powstają trzy czteroelementowe zbiory kół oraz dwa czteroelementowe zbiory kwadratów).

N: *Napiszcie działania do tych obrazów.*

(Uczniowie nie wiedzą, co pisać).

N: *No, w pierwszym było 12 kół i podzieliliście na zbiory czteroelementowe, więc co trzeba?*

U: *Podzielić* (zapisuje):

$12 : 4 = 3$

N: *A co do drugiego zbioru?*

(Uczeń zapisuje):

$8 : 4 = 2$

N: *A gdybyśmy to chcieli w jednym zapisie?*

(Uczniowie znowu nie wiedzą, co mają zapisać).

N: *No, przecież to jest taki jeden duży zbiór, więc* (zapisuje sama):

$(8 : 4) + (12 : 4) = 2 + 3 = 5$

*Wyszło, że mamy pięć podzbiorów. Czy można jeszcze inaczej to zapisać?*

(Uczniowie znowu nie wiedzą)

N: *W pierwszym zbiorze było ile elementów – 8,... nie 12, a w drugim – 8. Podzieliliśmy wszystko razem na zbiory czteroelementowe. Czyli jak zapiszemy?*
U: $(8 + 12) : 4 = 20 : 4 = 5$
N: *Jakie zastosowaliśmy tu prawo?*
U: *Prawo dzielenia.*
N: *Nie tak się nazywa, ale prawo rozdzielności dzielenia względem dodawania. Dzisiaj będziemy to prawo stosować.*

3. Klasa II.

(Uczniowie dostają karteczki z następującym zapisem):

$6 \cdot 4 =$
$5 \cdot (3 + 4) =$

(Nauczycielka poleca):

N: *Zastosujcie prawo, a potem ułóżcie wzór do tych przykładów.*
U: *To znaczy mamy wyliczyć?*
N: *Nie, tylko zastosować prawo.*
U: *To znaczy nie obliczać?*
N: *Przecież mówiłam, że zastosować prawo.*

(Uczniowie pracują samodzielnie. Nauczycielka podchodzi do niektórych. Karci jedną z uczennic: *nie miałaś obliczać, tylko zastosować prawo).*

Jeden z uczniów ma na swojej kartce:

$5 \cdot (3 + 4) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 15 + 20 = 35$
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c = da + ef = gh$

Nauczycielka zwraca się do tego ucznia: *masz źle* i prosi innego ucznia o poprawny zapis na tablicy. Na tablicy pojawiają się równości:

$6 \cdot 4 = 4 \cdot 6 \quad 5 \cdot (3 + 4) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 4$
$a \cdot b = b \cdot a \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c)$

N: *Kto ma inaczej, niech sobie poprawi i wpisze do zeszytu. Dzieci będą już pamiętały. No, a jak do pierwszego wzoru podstawimy 2 i 3 to co, jaka równość?*
U: (chórem): $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$
N: *A jak* 7 *i* 4?
U: (chórem): $7 \cdot 4 = 4 \cdot 7$
N: *I tak, jak w drugim wzorze będziemy mieli jakieś liczby, to sobie je podstawimy do wzoru i możemy wyliczyć. Wiecie już, tak.*
U: *Tak.*

4. Klasa III.

(Lekcja poświęcona jest mnożeniu liczb jednocyfrowych przez pełne dziesiątki. Nauczycielka zapisuje na tablicy działanie):

$$(30 \cdot 5 + 4 \cdot 70 + 50 \cdot 5) - (50 \cdot 5 + 5 \cdot 30 + 70 \cdot 4) =$$

N: *Kto obliczy?*

U: *Zero.*

N: *Skąd wiesz, że zero, trzeba policzyć* (wskazuje na innego ucznia). *Podejdź ty do tablicy i zapisz swoje obliczenia.*

U: $(30 \cdot 5 + 4 \cdot 70 + 50 \cdot 5) - 50 \cdot 5 + 5 \cdot 30 + 70 \cdot 4) =$

$$(150 + 280 + 250) - (250 + 150 + 280) = 680 - 680 = 0$$

N: *Dobrze policzył? Tak, dobrze. Teraz zapiszę wam nowe działania:*

$$(2 \cdot 80 + 6 \cdot 60 + 80 \cdot 6) - (60 \cdot 6 + 8 \cdot 60 + 2 \cdot 80) =$$

U: (kilku) *Tu też będzie zero.*

N: *A skąd wiecie, matematycy się znaleźli, trzeba policzyć!*

(Uczniowie posłusznie liczą poszczególne iloczyny. Tylko jeden chłopiec napisał w swoim zeszycie wynik: 0 i nie liczy. Nauczycielka karci go: *A gdzie obliczenia*?. Uczeń odpowiada: *Ja nie lubię liczyć*. Nauczycielka nie reaguje, a innemu uczniowi poleca zapisać na tablicy „prawidłowe" rozwiązanie).

Opisane sytuacje są typowe dla wielu obserwowanych przeze mnie na lekcjach w klasach I–III. Nie będę ich dokładnie analizować z punktu widzenia ich dydaktycznej poprawności. Ograniczę się tylko do problemów związanych z opracowywaniem własności działań arytmetycznych.

Przytoczone lekcje nie są pierwszymi, na których dzieci poznają prawa działań. Dostrzegamy już pewne wytrenowanie. Widać, że niektórzy uczniowie rozumieją, co w intencji ich nauczycielki oznacza „ułożyć wzór literowy do prawa" (fragment 1.), „napisać działanie do zbiorów (fragment 2.), „zastosować prawo" (fragment 3.). Trudno tu jednak mówić, iż nauczyciel, a w efekcie i uczeń, zdają sobie sprawę z istoty omawianych własności, z potrzeby ich wprowadzania.

Uwaga nauczycielki w pierwszym cytowanym tu fragmencie lekcji skupiona jest na dojściu uczniów do ogólnego, literowego zapisu praw: przemienności mnożenia i rozdzielności mnożenia względem dodawania. Zapis ten pojawia się w wyniku mechanicznego podpisywania (koniecznie pierwszych z alfabetu) liter pod liczbami w stwierdzonych równościach arytmetycznych. „Możliwość" takiego podpisywania, spostrzeżenie, że „gdybyśmy podstawiali pod inny zapis, to też wyszedłby nam ten sam wzór", utożsamiane jest z dowodem prawa.

Troska o rozumienie ogólności zapisu literowego to trening odpowiedzi: „wszystkie" na pytanie: „Jakie liczby można podstawić do wzoru?". Znamienne jest jednak, że nie ma tu ani próby tego podstawienia, ani wyjaśnienia, dlaczego wszystkie liczby można podstawiać do wzoru.

Na lekcji w klasie III (fragment 2.) nauczycielka stara się poglądowo zilustrować znane dzieciom wcześniej prawo rozdzielności dzielenia względem dodawania. Myślę, że chodziło o to, by pokazać, iż liczbę podzbiorów otrzymanych w wyniku podziału dwu zbiorów na podzbiory czteroelementowe, można obliczyć na dwa sposoby, co w przykładzie na lekcji doprowadziłoby do równości: $(12 + 8) = 12 : 4 + 8 : 4$ i mogłoby stanowić dobrą ilustrację omawianego prawa.

Na lekcji jednak idea rozmywa się. Nauczycielka prowadzi uczniów przez niezbyt dla nich zrozumiałe pytania, by wreszcie stwierdzić, że zastosowała prawo rozdzielności dzielenia względem dodawania.

W efekcie dzieci nie rozumieją, co robi nauczycielka, co chce liczyć. Mają rozdzielić zbiory, zapisać na różne sposoby „działania do zbiorów", potem stwierdzić, jakie prawo zastosowali, w końcu dowiadują się, że będą je jeszcze stosować. Na lekcji nie pojawia się ani sformułowanie prawa, ani żadna próba sprawdzenia, co uczniowie zrozumieli z prezentowanego przez nauczycielkę rozumowania.

Programy nauczania akcentują zarówno konieczność praktycznego rozumienia praw działań przez dzieci, jak też umiejętność stosowania tych praw wszędzie tam, gdzie mogą one ułatwić rachunki czy rozwiązanie zadania. W cytowanych fragmentach lekcji widać, jak opacznie niektórzy nauczyciele rozumieją te zalecenia.

W klasie II (fragment 3) nauczycielka myli stosowanie prawa z jego zapisem dla konkretnych wartości liczbowych. Takiej interpretacji „stosowania praw" uczy swoich uczniów.

W klasie III (fragment 4) nauczycielka każe wykonywać zbędne obliczenia, a próby intuicyjnego (bo nic się tu nie mówi o żadnych prawach) stosowania przez uczniów własności działań dla ułatwienia obliczeń wyśmiewa i uważa za niedobre.

Sądzę, że efekt takiego, jak w prezentowanych przykładach, kształcenia dzieci nie może być dobry. Być może wiele z tych dzieci będzie miało w przyszłości trudności z rozumieniem praw działań, a z dużym prawdopodobieństwem można sądzić, że i matematyki w ogóle. Trudno też mieć nadzieję, iż ktoś kiedyś w dalszym nauczaniu szkolnym naprawi to, co już nieprawidłowo ukształtowano w umyśle dziecka w trakcie nauki w klasach początkowych. Często bowiem pierwsze wrażenia są bardzo trwałe i rzutują na dalsze kształcenie.

Doświadczenia z kilkuletniej pracy na zajęciach matematycznych przekonują, że studenci kierunków przygotowujących przyszłych nauczycieli klas początkowych rekrutują się w większości z tych absolwentów szkoły średniej, którzy z matematyką w szkole mieli kłopoty, bali się jej i opanowali niemal wyłącznie pamięciowo.

Wypowiedzi studentów na ćwiczeniach i egzaminie pokazują, że własności działań, ich uzasadnianie i świadome stosowanie należą do zadań sprawiających im duże trudności. Nie można, bazując na wiadomościach szkolnych, omawiać tych zagadnień tylko pod kątem przyszłego przekazywania ich dzieciom. Okazuje się, iż trzeba wcześniej jakby na nowo uczyć tych studentów podstawowych wiadomości i umiejętności.

Stan wiedzy niektórych absolwentów szkoły średniej na temat praw działań mogą zilustrować wyniki krótkiej sondażowej ankiety.

Studenci nauczania początkowego, którzy nie mieli jeszcze kontaktu z matematyką na studiach, realizowali pisemnie następujące polecenie:

*„Przekonaj dziecko z klasy I–III, że zachodzi prawo przemienności dodawania w zbiorze liczb naturalnych"*.

Ważne było, by ankietowani nie prezentowali prawa, czy jego formalnego dowodu, ale będąc w sytuacji osoby, która musi kogoś o czymś przekonać, odsłonili własne rozumienie omawianego prawa.

Sondaż przeprowadzono wśród 31 studentów nauczania początkowego. Widać z niego, że wszyscy w jakiś sposób znają prawo przemienności dodawania. Wielu, mimo iż nie proszono o to, podaje zapamiętany ze szkoły zapis prawa. Niektórzy piszą poprawnie, z użyciem kwantyfikatora:

$$_{a,b\in N}\; a+b=b+a$$

inni zapisują tylko równość: $a + b = b + a$.

Tylko dwie osoby próbują formułować omawiane prawo słownie. Jedna robi to ogólnie:

„Mamy dwie liczby: liczbę a i liczbę b. Jeżeli dodamy je, otrzymamy wynik x. Jeżeli zaś zmieniamy kolejność i do liczby b dodamy liczbę a, wynik otrzymujemy taki sam".

druga „podpiera się" konkretnymi liczbami:

„Prawo przemienności dodawania mówi nam, że jeżeli weźmiemy dwie liczby należące do N, to jest obojętne czy dodamy, np. 1 + 2 = 3, czy też 2 + 1 = 3 zawsze wynik będzie taki sam".

Znajomość prawa nie idzie jednak najczęściej w parze z jego właściwym rozumieniem. Aż 10 studentów kojarzy omawiane prawo z jakąś niezmiennością, ale bez związku z liczbami, czy działaniem dodawania. Oto przykładowe wypowiedzi:

„Popatrz! Mamy laleczkę, która ma jasne włosy i laleczkę z ciemnymi włosami. Wyobraź sobie, że laleczki idą spać. Jedna śpi (ta pierwsza) w metalowym łóżeczku, druga w drewnianym. Laleczki śpią w dwu łóżeczkach w jednym pokoju. Jest dwie laleczki i dwa łóżeczka. Na drugi dzień laleczki poszły nie do swoich łóżeczek, tzn. lalka z jasnymi włoskami do drewnianego, a z ciemnymi do metalowego. I czy liczba lalek się zmieniła? Nie, mimo iż śpią z innych stron. I znowu mamy dwie lalki i dwa łóżeczka".

„Jeżeli Kasia ma urodziny, a jej koleżanki chcą dać jej prezenty to niezależnie od tego, która jaki da prezent, Kasia będzie mieć obydwa. Koleżankami Kasi są Ola i Ala. Ola chce koleżance podarować książkę, a Ala maskotkę. Kiedy to zrobią, Kasia będzie mieć i książkę i maskotkę. Jeżeli Ola podaruje maskotkę, a Ala książkę, Kasia też będzie mieć książkę i maskotkę".

Ankietowani studenci ilustrują prawo przemienności dodawania najczęściej dla liczb 1,2,3. W tych ilustracjach można się dopatrzeć aspektu mnogościowego liczby:

„Bierzemy np. 2 zielone ołówki i 3 żółte. Mówimy, że jak dodamy 2 zielone do 3 żółtych, to w sumie będzie 5 ołówków 2 + 3 = 5 i na odwrót, tzn. jeżeli zmienimy kolejność: 3 żółte + 2 zielone = 5 ołówków, 3 + 2 = 5".

Dla ilustracji prawa ankietowani studenci dobierali różne konkretne zbiory (chociaż słowa „zbiór" nie używali). Kolejność składników przy obliczaniu sumy wiązali w swojej interpretacji np. z miejscem rozmieszczenia elementów (jedne z lewej, drugie z prawej), z czasem pojawiania się elementów (wcześniej, później), z różnymi sposobami przeliczania (np. najpierw liczę zielone, potem żołte). Znamienne jednak, iż nikt w swojej interpretacji nie zauważa, że obliczana suma musi być taka sama, bo za każdym razem liczymy elementy tego samego zbioru. Dla wszystkich ankietowanych bardzo ważne jest natomiast wyliczenie każdej z sum typu: 2 + 3 = 5 i 3 + 2 = 5, a dopiero z równości wyników wnioskowanie o równości sum:

„Kuba! Popatrz: masz dwa jabłuszka, a obok trzy jabłuszka. Ile ich jest razem? – Pięć. Teraz ułóż na stole inaczej: najpierw trzy, a potem dwa jabłuszka. Ile masz teraz? – Znowu pięć. Więc widzisz. Czy najpierw są dwa, a potem trzy, czy też na odwrót, jeżeli je dodasz, będziesz miał 5. Zapiszemy to: 3 + 2 = 2 + 3".

Wypowiedzi ankietowanych miały przekonać dziecko, że prawo przemienności zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych. Wszyscy studenci to przekonanie utożsamiali z pokazaniem, iż prawo zachodzi w jednym, czasem w dwu przypadkach:

„Dam ci teraz 2 cukierki do lewej rączki, a za chwilę 3 do drugiej. Masz więc 5 cukierków. Potem robimy odwrotnie – najpierw 3, a potem 2. Znowu 5 cukierków. Po konkretnym przykładzie (może być ich więcej) zapisujemy: a + b = b + a".

Widać więc, że ankietowani studenci nie czują dobrze istoty prawa przemienności dodawania. Poza tym wynieśli ze szkoły błędne przekonanie o możliwości uzasadniania własności przez sprawdzenie jej prawdziwości w pojedynczym przypadku. Może byli kiedyś kształceni tak, jak to obserwowałam na lekcjach matematyki w klasach I–III, a zilustrowałam fragmentami przytoczonymi w pierwszej części artykułu...

Ankietowani studenci to przyszli nauczyciele klas początkowych. Można się zastanowić, jaką wiedzę przekażą oni swoim uczniom. Jaki efekt przyniesie krótkie, matematyczne kształcenie ich na studiach?

Myślę, że bardzo ważne jest znalezienie takiego sposobu przygotowania nauczycieli do uczenia matematyki, by przerwać „błędne koło": uczeń nie rozumie, później (jako student) ma trudności, gdy sam zostaje nauczycielem, w dalszym ciągu nie rozumie, więc z kolei jego uczeń nie rozumie itd. itd.

## Literatura

Semadeni Z., *Action Proofs in Primary Mathematics Teaching and in Teacher Training, for the Learning of Mathematics 4*, (February 1984)

Urbańska E., *Understanding and Expressing General Ideas by Elementary Teachers*, Proceedings CIEAEM, Szczyrk 1990

*Programy nauczania matematyki w klasach I – III.* Instytut Programów Szkolnych, Warszawa 1985