Rocznik Naukowo-Dydaktyczny WSP w Krakowie
Zeszyt 182 *Prace z Dydaktyki Matematyki IV* Kraków 1996

TOMASZ MALICKI

Rozwijanie aktywności matematycznych na drodze rozwiązywania problemów

1. AKTYWNOŚCI MATEMATYCZNE

Od matematyki, jako przedmiotu szkolnego, oczekuje się rozwijania u uczniów postaw intelektualnych przydatnych w rozwiązywaniu problemów z rozmaitych dziedzin życia. Intelektualizacja postaw jest celem (3) najwyższej kategorii, poprzedzonym dwoma kategoriami niższych celów, a mianowicie: (1) wyposażenie w podstawowe wiadomości i umiejętności w dziedzinie matematyki określone zwykle przez treść programu szkolnego oraz (2) **ukształtowanie postaw i zachowań specyficznych dla aktywności matematycznej**, takich jak: umiejętność ścisłego wyrażania swoich myśli, precyzyjnego definiowania, dostrzegania luk i błędów w rozumowaniu, przeprowadzania poprawnych wnioskowań. Trzeci (3) poziom celów dotyczy postaw i zachowań intelektualnych funkcjonujących poza aktywnością matematyczną oraz dostosowania ich do innych dziedzin ludzkiej aktywności. W tym artykule zajmiemy się wyróżnionym drugim (2) poziomem celów. Z. Krygowska (1986) wymienia charakterystyczne postawy i zachowania specyficzne dla aktywności matematycznej. Są to:

– aktywna postawa wobec problemów matematycznych,

– umiejętność posługiwania się pewnymi prostymi strategiami w toku ich rozwiązywania,

– rozumienie sensu dowodu i aktywna postawa w poszukiwaniu dowodu,

– pewne rozumienie sensu definicji i aktywna postawa w toku jej poszukiwania,

– pewien poziom wyobraźni przestrzennej zorganizowanej geometrycznie.

Specyficzne zachowania i postawy intelektualne można rozwijać u ucznia jedynie w toku jego aktywności. Według Z. Krygowskiej podstawowe aktywności możliwe do prowokowania i rozwijania w procesie nauczania – uczenia się matematyki są następujące:

1. Dostrzeganie i wykorzystywanie analogii.

2. Dostrzeganie, interpretowanie danej definicji oraz racjonalne używanie definicji.

3. Schematyzowanie.

4. Dedukowanie i redukowanie.

5. Kodowanie, konstruowanie i racjonalne stosowanie języka symbolicznego.

6. Algorytmizowanie, właściwe posługiwanie się algorytmami.

W trochę szerszym kontekście ujmuje aktywności matematyczne W. Nowak (1989). Autorka przez aktywność matematyczną rozumie pracę umysłu ukierunkowaną na kształtowanie pojęć i rozumowań typu matematycznego, pobudzoną przez sytuacje prowadzące do formułowania i rozwiązywania problemów. Opisuje także elementy aktywności matematycznej, wśród których szczególnie pierwsza ma inny charakter niż aktywności wymienione jako podstawowe przez Z. Krygowską. Aktywność ta ma charakter zewnętrzny i jest związana z działaniem ucznia, które powinno właściwie towarzyszyć każdej z następnych, tutaj wymienionych aktywności. Oto te aktywności:

(a) Aktywności związane z przejmowaniem, asymilowaniem i przetwarzaniem informacji oraz porządkowaniem i utrwalaniem wiedzy. Uczeń powinien aktywnie korzystać z wykładu, książki, podręcznika. Już od najmłodszych lat należy wprowadzać uczniów w aktywne czytanie tekstu matematycznego. Odformalizowanie tekstu, ilustrowanie go przykładami i modelami, robienie rysunków, notatek, uzupełnianie luk, zapisywanie głównych punktów definicji, twierdzeń i dowodów, to zabiegi, których należy uczyć systematycznie.

Selekcjonowanie informacji na istotne i nieistotne, zapamiętywanie przez uczniów wiadomości typu pojęciowego (które są podstawą algorytmów) oraz tylko głównych twierdzeń, definicji, algorytmów, wyrabianie umiejętności samokontroli sprzyja porządkowaniu i utrwalaniu wiedzy.

(b) Argumentowanie.

(c) Aktywność w stosowaniu matematyki.

Obejmuje ona aktywności związane z rozwiązywaniem zadań i problemów przy użyciu podstawowych technik heurystycznych.

(d) Aktywności niezbędne w wyrażaniu własnej myśli matematycznej.

Ważnym elementem jest umiejętność kodowania i racjonalny wybór symboliki.

(e) Aktywności twórczego działania.

Wśród tych aktywności wyróżnić możemy dostrzeganie i wykorzystywanie analogii, matematyzację, schematyzację, algorytmizowanie oraz zdyscyplinowane myślenie czyli przezwyciężenie konfliktu między myśleniem formalnym a intuicją. Tak więc aktywności w sensie rozumianym przez Z. Krygowską obejmują aktywności wymienione w punktach b,d,e, nie zawierają natomiast aktywności w stosowaniu matematyki, w rozwiązywaniu zadań i problemów przy użyciu podstawowych technik heurystycznych. Nie jest to niedostatek czy też istotna różnica, bowiem Z. Krygowska każde zadanie traktowała jako pewne twierdzenie do udowodnienia, a więc aktywności związane z dowodzeniem twierdzeń i definiowaniem pojęć obejmują aktywności występujące w procesie rozwiązywania zadań. Dlatego aktywności matematyczne mogą występować na każdym poziomie nauczania, o jakich mówi Z. Krygowska (1986).

S. Turnau (1990) szczególną rolę w prowokowaniu aktywności uczącego się upatruje w dostępności i problemowości zadań zaznaczając, że aktywność nie zależy od stosowanej metody. Posługiwanie się sytuacjami problemowymi w nauczaniu jest doskonałą metodą rozbudzania aktywności matematycznej. Sytuacje problemowe mogą mieć związek z życiem lub mogą być sztuczne – wykorzystujące bajki, anegdoty, gry, zagadki. W nauczaniu problemowym można wykorzystać problemy otwarte oraz problemy – zastosowania matematyki. Istotnym spostrzeżeniem dla procesu nauczania – uczenia się jest fakt, że organizowana przez nauczyciela aktywność ucznia może być podyktowana przez operacje tkwiące w samej matematyce.

2. NAUCZANIE PROBLEMOWE. ROZWIĄZYWANIE PROBLEMÓW

Problem powstaje wtedy, gdy człowiek zmierza do jakiegoś celu, lepiej lub gorzej sformułowanego, ale nie wie, w jaki sposób przekształcić stan wyjściowy w pożądany stan końcowy. Konieczność wytworzenia, czyli wymyślenia lub zaprojektowania skutecznych sposobów osiągnięcia celu stanowi wyróżnik sytuacji problemowych (Nęcka 1994).

Literatura naukowa obfituje w wielość definicji problemu. Wspólne dla wszystkich definicji jest podkreślenie, iż problemem jest zadanie zawierające pewną trudność natury praktycznej lub teoretycznej, a przezwyciężenie jej wymaga samodzielnego (produktywnego) myślenia (inaczej mówiąc postawy badawczej). Nie każda zatem trudność jest problemem. Nie jest nim np. przypomnienie sobie znanych sposobów rozwiązania, zapamiętanie wzoru, wykazanie się umiejętnością np. dzielenia.

Swój problemowy charakter traci trudność, którą uczeń opanował, natomiast nie jest jeszcze dla niego problemem trudność, do rozwiązania której nie został przygotowany.

Z. Krygowska (1959) akcentuje, że najistotniejsze jest tu pobudzenie (impuls do poszukiwań) przez temat zadania badawczej postawy osoby go rozwiązującej, a problemowość zadania można zatem ocenić według:

1. stopnia, w jakim wzbudza ono u podmiotu aktywność badawczą;
2. stopnia niepewności, w jakiej osoba rozwiązująca zadanie znajduje się w pierwszej fazie pracy (w toku rozwiązywania zagadnienia prawdziwy problem przekształca się już tylko w zadanie – zwykłe zastosowanie teorii).

Wynikałoby z tego, że problemowość zadania jest w dużej mierze czymś subiektywnym dla ucznia. Przy rozwiązywaniu problemów można łączyć aktywność matematyczną z pozamatematyczną (Krygowska 1977). W nauczaniu problemowość może np. dotyczyć sposobu zebrania danych, ale by była to problemowość matematyczna – a o taką w matematyce chodzi – można postawić pytanie, jakie dane wystarczą do rozwiązania zadania.

Zadanie – problem może stracić swój problemowy charakter, jeśli dodamy do niego wskazówkę. Zmienia ona czasami zupełnie rodzaj trudności i przekształca zadanie w zadanie innego typu. Uzupełnienie tematu zadania wskazówkami należy więc poprzedzić analizą transformacji, której poddajemy zadanie przez te uwagi i sprecyzowaniem, czym ma być dla ucznia to nowe zadanie – czy jeszcze problemem, czy już tylko zadaniem – zwykłym zastosowaniem teorii, a nawet tylko ćwiczeniem oraz jakiego typu rozumowanie chcemy w danym przypadku kształcić (Krygowska 1977).

Nauczyciel powinien najpierw zorientować się w wiadomościach i umiejętnościach uczniów, dokonać klasyfikacji dzieci pod względem intelektualnym, by móc następnie z należycie przygotowanym problemowo materiałem dotrzeć do każdego ucznia.

Nauczanie, w którym wszelkie wiadomości wprowadzane są problemowo nazywa się nauczaniem problemowym. Polega ono na kierowaniu przez nauczyciela procesem rozwiązywania problemów przez uczących się, czyli na:

(a) stwarzaniu (organizowaniu) sytuacji problemowej;
(b) formułowaniu problemów przez uczniów lub nauczyciela;
(c) udzielaniu uczniom niezbędnej pomocy przy poszukiwaniu nowych wiadomości i wytwarzaniu pomysłów rozwiązań;
(d) sprawdzaniu ich wspólnie z uczniami;
(e) kierowaniu czynnościami uczniów przy stosowaniu zdobytej wiedzy w nowych sytuacjach, przy systematyzowaniu i utrwalaniu tych wiadomości (Galant 1975).

Nauczanie problemowe matematyki charakteryzuje się tym, że proces poznania jest inicjowany zadaniem, które uczniowie powinni dobrze zrozumieć i przyswoić sobie, które ma się stać ICH zadaniem, które CHCĄ rozwiązać (Turnau 1990). Wyjściowe pytanie lub zadanie powinno pobudzać do AKTYWNOŚCI: aktywnego szukania odpowiedzi, aktywnego słuchania wykładu, aktywnej lektury. Bez aktywności ucznia skuteczność nauczania jest znikoma. Nauczanie matematyki powinno więc zawsze mieć charakter problemowy. Postulat ten nazwano zasadą problemowości (Turnau 1990).

Jak dalece ogólna jest umiejętność rozwiązywania problemów? Poglądy w tej sprawie są różne. Wielu uważa, że istnieje coś takiego jak ogólna umiejętność rozwiązania problemów. Żeby ją posiąść, należy nauczyć się wielu reguł postępowania – znać je tak, jak zna się zespół faktów i zasady oraz nabyć wprawę w posługiwaniu się nimi. Wybitny psycholog i pedagog amerykański Robert Glaser (Kruszewski 1991) na podstawie swoich badań stwierdził silny związek między strukturą wiedzy, której problem dotyczy, a procesami poznawczymi. To sprawia, że na uczenie się myślenia, które objawia się rozwiązywaniem problemu, należy patrzeć nie jak na proces ogólny i niezależny od treści, ale jak na interakcję między strukturą wiedzy a procesem myślenia. Można się nauczyć umiejętności rozwiązywania problemów, jeżeli obejmują one rozmaite obszary obfitujące w zorganizowaną wiedzę oraz urozmaicone zadania wymagające posłużenia się wiedzą z tych obszarów.

W nauczaniu matematyki istotną rolę przy rozwiązywaniu problemów można przypisać metodzie czynnościowej. Czynnościowe nauczanie matematyki jest postępowaniem dydaktycznym uwzględniającym operatywny charakter matematyki równolegle z psychologicznym procesem interioryzacji prowadzącym od czynności konkretnych i wyobrażeniowych do operacji abstrakcyjnych (Krygowska 1977).

Czynnościowe nauczanie matematyki opiera się przede wszystkim na świadomym organizowaniu sytuacji problemowych sprzyjających procesowi kształtowania myślenia matematycznego głównie przez:

a) Wiązanie treści matematycznych z formułowanymi schematami postępowania.

b) Wiązanie operacji z operacjami do nich odwrotnymi.

c) Stawianie ucznia w sytuacjach konfliktowych.

d) Słowny opis operacji (co robią?)

Uwagi powyższe nie wyczerpują tego złożonego zagadnienia dydaktycznego, wskazują tylko kierunek poszukiwań dydaktycznych otwartych dla każdego nauczyciela.

Problemy, zadania – problemy powinny być stawiane przed uczniami przeciętnymi, a nie rezerwowane dla dzieci utalentowanych. Każdy uczeń powinien przeżyć przygodę matematyczną na swoją miarę, od uczucia zniewolenia przez problem do uczucia wyzwolenia po jego rozwiązaniu (Krygowska 1977).

3. ZADANIA I PROBLEMY OTWARTE

Zadania i problemy otwarte są szczególnym przykładem zadań nietypowych. Przyjmuje się, że zadanie jest typowe, jeżeli spełnia następujące warunki:

(a) jest ukierunkowane na osiągnięcie sprawności i wiedzy w zakresie określonego przez program fragmentu materiału,

(b) cechuje je schematyczność rozwiązania (uczeń może rozwiązać zadanie przez zastosowanie znanego schematu postępowania),

(c) w swej budowie jest zamknięte (zamknięte ze względu: na dane, na liczbę rozwiązań – dokładnie jedno, sformułowane polecenia lub pytania, np. oblicz, rozwiąż, wyjaśnij dlaczego, ile? jak to liczba? jaki to zbiór? dlaczego?),

(d) występuje często – rozwiązanie przez ucznia wielu zadań spełniających któryś z powyższych warunków.

Na podstawie tej charakterystyki można uznać, że zadanie jest nietypowe, gdy nie spełnia któregoś z warunków a,b,c,d. Można zatem stwierdzić, że zadanie otwarte należy do zadań nietypowych.

W uzupełnieniu problematyki dotyczącej zadań typowych i nietypowych należy dodać, że zajmowanie się wyłącznie zadaniami typowymi przyniosło przy okazji niezamierzony i niepożądany efekt uboczny: uczniowie nabierali przekonania, że wszystkie informacje podane w zadaniu są jednakowo ważne, a każda z występujących tam liczb musi być użyta w jakimś działaniu. Często więc, nie rozumiejąc zadania, próbowali rozwiązać je na chybił – trafił, dodając, odejmując, mnożąc i dzieląc podane liczby dotąd, aż udało się uzyskać (przypadkowo) właściwy wynik (Semadeni 1981). Tymczasem w nauczaniu matematyki chodzi raczej o proces rozwiązywania zadania, o umiejętność stawiania pytań, dostrzegania problemów, elastyczność w metodach postępowania, a nie tylko sprawność rachunkową (uzyskanie poprawnego wyniku) (Siwek 1984).

Rozwiązywanie problemów otwartych związane jest z aktywnością twórczą. Należy pamiętać także o tym, że rozwiązujący może wykonać pracę twórczą również wtedy, gdy nie odnosi sukcesu w rozwiązywaniu zadania. „Praca rozwiązującego może okazać się także twórczą wtedy, gdy zostawia on nierozwiązane, lecz ważne zadanie, które prowadzi do płodnych odkryć" – pisze G. Polya (1975).

Z. Krygowska (1977) wyróżnia zadania otwarte ze względu na:

(a) dane: brak danych, zbędne dane, dane niewystarczające, sprzeczne itp.;

(b) możliwość różnych odpowiedzi (wyników spełniających warunki zadania i odpowiadających na pytanie), inaczej mówiąc – ze względu na kierunek dedukcji i możliwe wnioski („O co byś zapytał?", „Co mógłbyś obliczyć?", „Oto sytuacja – co możesz stąd wnosić?" itp.);

(c) możliwość różnych sposobów rozwiązania, różnych metod badania.

Otwartość zadania lub problemu stwarza możliwość kształtowania u uczniów „otwartej postawy" wobec zadania matematycznego i w ogóle każdego zadania. Oznacza ona brak skrępowania rygorami metody i formy rozwiązania, a także brak nastawienia na oczekiwaną przez nauczyciela odpowiedź. Rozwiązywanie w konwencjonalny sposób tradycyjnych zadań prowadzi u wielu uczniów do postawy zamkniętej, wyrażającej się w przeświadczeniu, że dla każdego zadania jest tylko jedna właściwa metoda i jedna poprawna odpowiedź (Turnau 1990).

Ciekawe obserwacje, hipotezy oraz wyniki badań pilotażowych na temat problemów otwartych przedstawiła w swojej pracy magisterskiej E. Nędza (1991). Autorka zanalizowała 40 protokołów hospitowanych lekcji matematyki w klasach I-III w pięciu różnych szkołach w celu zorientowania się, jak często nauczyciele klas początkowych proponują uczniom zadania i problemy otwarte. Wyniki obserwacji na następujące:

– w klasach pierwszych po przeanalizowaniu 17 protokołów wystąpiły łącznie 24 zadania otwarte,

– w klasach drugich po przeanalizowaniu 7 protokołów wystąpiło łącznie 7 zadań otwartych,

– w klasach trzecich po przeanalizowaniu 16 protokołów wystąpiły 22 zadania otwarte.

Jak widać, zadania otwarte nie były czymś niespotykanym na lekcjach w klasach I-III. Przeważały jednak zadania otwarte beztekstowe, np. rysowanie drzewka do działania, rozkład liczby na składniki, szukanie wielokrotności danych liczb, szukanie liczb, których iloraz znamy. Zadania otwarte tekstowe rozwiązywane były bardzo rzadko, a problemowe prawie wcale.

Interesującym elementem omawianej pracy było badanie przeprowadzone w klasie III liczącej 36 uczniów, obejmujące:

1. Badania wstępne (BW) – podczas których uczniowie rozwiązywali samodzielnie zadania – problemy otwarte w czasie 2 godzin lekcyjnych.

2. Lekcje eksperymentalne (pięć) – na których rozwiązywano zadania – problemy otwarte.

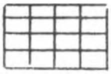
3. Badania końcowe (BK) – podczas których uczniowie rozwiązywali ponownie samodzielnie zadania – problemy otwarte w czasie 2 godz.

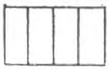
Niżej podaję zadania z badań wstępnych (BW), które mogą stać się cenną pomocą dydaktyczną we własnej pracy:

BW KARTA 1

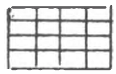
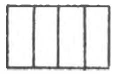
Rozwiąż zadania: Nazwisko: ______________

1. Kupiłeś sobie czekoladki:

30 dag  w cenie .... za 10 dag,

20 dag  w cenie .... za 10 dag,

40 dag  w cenie .... za 10 dag,

Zmieszałeś razem czekoladki  oraz  i odważyłeś dla kolegi 10 dag tej mieszanki. Kolega chce ci zapłacić. Ile weźmiesz pieniędzy?

2. Ogrodnik sprzedaje kwiaty, biorąc za jednego astra 2 zł. Oblicz, ile zapłacisz za 10 astrów i 9 róż?

3. Do sklepu sportowego przywieziono różnego rodzaju obuwia. Na wykazie niewidoczna jest jedna liczba. Jaka to może być liczba?

rodzaj obuwia	liczba par
trampki	30
tenisówki	75
półtrampki	40
adidasy	
Razem	140

4. Ułóż zadanie:
Wnuczek wysyła do dziadka telegram.

BW KARTA 2

Rozwiąż zadania: Nazwisko: ____________

5. Masz w skarbonce 6 monet (nie mniejszych niż 1 zł), razem 42 zł. Jakie to mogą być monety?

6a. Jakie liczby trzycyfrowe ułożysz z trzech klocków z cyframi 1, 4, 7?	6b. Jakie liczby trzycyfrowe możesz wydrukować stempelkami z cyframi 1, 4, 7?

7. Twoja koleżanka dostała na imieniny dla swojej lalki 3 spódnice i 2 bluzki:

Jeśli chciałaby ubrać lalkę codziennie inaczej, to przez ile dni może tak robić?

8. Duży autokar ma 56 miejsc, a mały o 24 mniej. Ile takich autokarów trzeba zamówić dla przewiezienia 224 pasażerów?

W podsumowaniu wyników badań wstępnych E. Nędza stwierdziła, że:

– żaden z 35 uczniów nie podał propozycji przekształcenia zadań nietypowych (np. zmiany danych) bez zachęty prowadzącej badania,

– w zadaniach o wielu rozwiązaniach uczniowie zadowalali się tylko jednym z nich,

– niewielu uczniów poszukiwało metod ułatwiających pracę przy rozwiązaniu zadania; nikt nie stosował grafów lub schematów graficznych takich jak „drzewko", nie stosowano tabelek itp.

Zwróćmy uwagę, że propozycje BW1 i BW2, jak i przedstawione dalej BK1 i BK2 stanowią formę kart do samodzielnej pracy ucznia. Karty takie coraz częściej pojawiają się w nowych podręcznikach oraz w materiałach uzupełniających.

Obserwacja praktyki szkolnej ujawniła, że tzw. wspólne rozwiązywanie zadań (przez całą klasę) powoduje, iż całość struktury wykonania czynności najczęściej ogarnia tylko nauczyciel i co najwyżej nieliczni uczniowie. Pozostali zaś śledzą i rozumieją zaledwie niektóre elementy całości rozwiązania, przy tym różni uczniowie – różne elementy. Przy rozwiązywaniu zadania przez jednego ucznia (tzw. rozwiązywanie przy tablicy) obowiązek pełnego wysiłku myślowego spoczywa na tym właśnie uczniu. Innym pozostaje co najwyżej „trud" śledzenia pracy kolegi i przyjmowania gotowych rozwiązań (Przetacznik-Gierowska 1992). Tak więc karty do samodzielnej pracy ucznia mogą choć w części urozmaicić pracę na lekcji, a także sprowokować uczniów do aktywności, o których była mowa wcześniej.

Przyjrzyjmy się teraz kartom BK1 i BK2 (s. 223-224).

Przypomnijmy, że badania końcowe BK przeprowadzono po pięciu lekcjach eksperymentalnych, na których rozwiązywano zadania – problemy otwarte.

W podsumowaniu wyników badań (BK) stwierdzono, że:

– większość uczniów, bez przypomnienia, przekształcała zadania nietypowe; uczniowie zapisywali swoje propozycje, analizowali przypadki szczególne,

– w zadaniach o wielu rozwiązaniach nastąpił wyraźny postęp w zakresie szukania wszystkich możliwych wyników,

– można zaobserwować wyraźne dążenie uczniów do znalezienia metody ułatwiającej im pracę (np. w zad. 5 34% uczniów wykorzystało „drzewko", a w zad. 6 – 64% tabelkę),

– zad. 4 z BK dowiodło, że tak jak mówi się o schematyzmie i czasem bezmyślności uczniów przy rozwiązywaniu zadań typowych, tak samo można mówić o schematycznym nastawieniu uczniów do zadań, wywołanym rozwiązywaniem wyłącznie zadań nietypowych.

BK KARTA 1

Rozwiąż zadania:

Zad. 1

W uroczystości ślubnej Twojej kuzynki uczestniczyło 96 osób. Twój tata i wujek przewożą gości do restauracji na wesele. W jednym kursie oba samochody zabierają 8 osób. Kierowcy wykonali już 7 kursów, a trzeba jeszcze przewieźć 40 osób. Ile gości znajduje się już w restauracji?

Zad. 2

Mama kupiła dla całej rodziny kilka butelek wody mineralnej. Dzieci opróżniły od razu $\frac{1}{2}$ wszystkich butelek, a rodzice $\frac{1}{4}$ początkowej ich ilości. Ile butelek wody mineralnej zostało dla rodziny na jutro?

Zad. 3

Klasa III b licząca 36 osób podzieliła się na równoliczne grupy. W każdej grupie znalazła się $\frac{1}{5}$ ogólnej liczby uczniów. Ile osób liczyła każda grupa?

Zad. 4

Za pisaki i długopis zapłaciłeś 28000 zł. Ile kosztowały pisaki, a ile długopis, jeśli pisaki są 3 razy droższe od długopisu?

BK KARTA 2

Roswiąś zadania:

Zad. 5

Rzucasz 3 razy kostką do gry. Układasz z otrzymanych cyfr liczbę trzycyfrową. Ile może być takich liczb?

Zad.6

Zbliża się koniec roku szkolnego. Dyrektor szkoły zamówił 270 książek na nagrody dla uczniów. Otrzymał je w paczkach po 30 i 15 sztuk. Ile było paczek dużych, a ile małych?

Zad.7

Układasz domki z klocków: 

1 - CZERWONY
2 - NIEBIESKI
3 - ŻÓŁTY
4 - ZIELONY

Jakie domki i ile możesz ułożyć, jeżeli każdy domek wygląda

następująco:  ?

Zad.8

Mama przyniosła z piwnicy kilka słoików litrowych i dwulitrowych oraz 2 półlitrowe. Chce przelać do nich 5 l soku. Jak ma to zrobić?

Zad.9

Dostałeś 500 zł. Zaprojektuj zakupy.

Do przedstawionych wniosków należy podejść z pewną ostrożnością, jednak i te spostrzeżenia potwierdzają, że wpływ procesu uczenia się na rozwijanie zdolności rozwiązywania problemów jest bardzo duży. Istotne są zatem propozycje zawierające ciekawe konspekty takich lekcji czy też przykłady metodycznie opracowanych zadań i problemów otwartych.

4. PROBLEMY OTWARTE W NAUCZANIU POCZĄTKOWYM

Przedstawiona tu zostanie propozycja zawarta w kanadyjskiej publikacji *Mathematical Problem Solving in the Primary Grades* (1991).

Aby w sposób teoretycznie uzasadniony organizować rozwiązywanie problemów, autorzy przyjmują model instrukcji rozwiązywania problemu. Model ten obejmuje następujące części składowe:

1. Narzędzia działalności – środki manipulacyjne: klocki, kalkulatory (liczydła), komputery, inne.
2. Grupy uczniowskie (studenckie) – indywidualne, małe, duże.
3. Wiedza o rozwiązywaniu problemu – umiejętności, strategie, stadia (etapy).
4. Typ problemu – twórczy, tradycyjny, seryjnych zmian.
5. Forma działalności – kształtowanie nowych pojęć, konstruowanie wiedzy matematycznej, projekty, gry, warsztaty.

Przybliżenie sensu pojęć występujących w modelu następuje poprzez omówienie idei podanego modelu, służących uczeniu się rozwiązywania problemów i rozwijaniu aktywności.

Oto te idee:

(a) Model obejmuje pięć elementów. Szóstym nieodłącznym elementem jest matematyczna zawartość, matematyczna treść.

(b) Poprzez narzędzia działalności rozumie się dowolny typ fizycznego przyrządu, użytego do tworzenia kontekstu nauczania, albo dowolnego przyrządu użytego do pracy przy rozwiązywaniu problemu.

(c) Grupę uczniów (studentów) tworzy się w zależności od wykonywanego działania; stosuje się indywidualne ćwiczenia, sytuacje wymagające współdziałania aż do pełnej, klasowej dyskusji.

(d) Na wiedzę o rozwiązywaniu problemu składają się sprawności, strategie i zdolności, których uczymy, które rozwijamy podczas rozwiązywania problemów.

(e) Typ problemu zależy od zakresu, od obszaru do jakiego można go zaliczyć.

(f) Przez formę działalności rozumie się różnorodność kontekstów kształcenia, w którym problem pojawia się lub jest prezentowany uczniom.

Ze względu na problematykę poruszaną w artykule skomentuję szerzej formy działalności i aktywności, które uwzględnione są w modelu instrukcji rozwiązywania problemu. Przez problemy kształcenia rozumiemy tutaj te sytuacje problemowe, które pozwalają na formułowanie zadań. Może to być np. planowanie kosztów wycieczki, zapoznanie z kształtem i własnościami prostopadłościanu itp. Projekty i zastosowania to np. projekty różnych siatek sześcianu, różnych dróg na kratownicy między ustalonymi punktami po odcinkach sieci, różnych posadzek wielokątnych i weryfikacja czy projekt jest dobry, wykonalny. Gry i zabawy matematyczne nie wymagają komentarza. Ośrodki (warsztaty) organizujemy w związku z planowaniem np. placu zabaw. Uczniowie najpierw zbierają informacje – wymierzają piaskownicę, huśtawki, basen, rysują w skali teren przeznaczony na ten cel, rozmieszczają obiekty w sposób bezpieczny.

Wiedza o rozwiązywaniu problemu (etapy, strategie) jest oparta na znanych u nas książkach G. Polyi *Jak to rozwiązać* i *Odkrycie matematyczne*.

Autorzy uważają, że przy rozwiązywaniu zadań i problemów można rozwijać u studentów nauczania początkowego rozmaite umiejętności i aktywności, których istnieje bardzo wiele i można się ich po prostu nauczyć. Częściowa lista tych umiejętności jest następująca:

– rozpoznanie potrzebnych informacji,
– rozpoznanie szukanych informacji,
– rozpoznanie dodatkowych informacji,
– rozpoznanie danych informacji,
– kojarzenie nazwy z matematyczną operacją (nazywanie wyrazów, które implikują matematyczną operację),
– ustalenie podcelów w problemie,
– rozpoznawanie wielostopniowych problemów,
– sformułowanie problemu własnymi słowami,
– wygenerowanie równania (nierówności),
– ustalenie niewiadomej (zmiennej),
– oszacowanie,
– konstruowanie rysunku, modelu lub diagramu do wyjaśnienia informacji,
– rozpoznawanie ukrytych założeń,
– odczytywanie danych z tablic, grafów i map.

W części szczegółowej publikacja zawiera wiele tematów matematycznych opracowanych bardzo dokładnie pod względem metodycznym.

Omawiając opracowanie jakiegokolwiek zagadnienia, np. liczb do 100, figur geometrycznych autorzy po sformułowaniu celu opisują materiały potrzebne do rozwiązywania zadań, czynności jakie uczniowie będą wykonywać realizując dany temat oraz przykłady konkretnych zadań wraz z analizą przewidywanego sposobu rozwiązywania przez uczniów. Np. przy temacie „pomiar" zaleca się materiały – jednolite klocki, wagę, pręty różnych długości, klepsydry (7- i 5-minutowe), wiaderka (np. 3- i 5-litrowe) itp. W czasie pracy uczniowie mają zdobyć doświadczenia z każdym z ogólnych pomiarów – długości, masy, czasu, pojemności. W książce są także gotowe materiały do bezpośredniego wykorzystania – kartki z posadzkami z różnych wielokątów, ilustracje zbiorów o liczebności większej niż 100, kartki z połówkami figur do odbicia symetrycznego, figurami na rysunku geoplanu, kratownice, diagramy kołowe, prostokątne, osie liczbowe, układy współrzędnych.

Przedstawię teraz wybrane zadania i problemy zaczerpnięte z omawianej książki. Niektóre z nich zilustrują zastosowanie kilku z przytoczonych wcześniej umiejętności. Sądzę, że propozycje zadań, problemów oraz uwagi o nich mogą okazać się przydatne studentom i nauczycielom nauczania początkowego w ich pracy pedagogicznej.

Przykład 1

W sklepie znajdują się dwa pełne kartony jajek i trzy kartony puste. Każdy karton może pomieścić tuzin jajek.
Okazało się, że 5 jajek jest rozbitych.
Ile jest wszystkich nie rozbitych jajek?

Potrzebna informacja – Tuzin ma dwanaście jajek.
Szukane – Całkowita liczba nie rozbitych jajek.
Dodatkowa informacja – Są trzy puste kartony.
Dana informacja – 2 pełne kartony, każdy karton zawiera tuzin jajek, 5 jajek rozbitych.
Słowa implikujące matematyczną informację – rozbity (odejmowanie) pełny, cały (dodawanie).
Podcel – znaleźć liczbę jajek (rozbitych i nie rozbitych).
Formułowanie problemu własnymi słowami – Są jajka (jest kilka jajek) niektóre z nich są rozbite, inne nie. Chcemy dowiedzieć się, ile jest nie rozbitych.
Wygenerowanie równości (równania) – Niezbędne są dwie równości:

$$12 + 12 = 24 \text{ i } 24 - 5 = 19.$$

Z obserwacji praktyki szkolnej oraz wyników badań wiadomo, że zadania z treścią są zazwyczaj najtrudniejszym elementem w matematyce szkolnej na każdym etapie kształcenia.

W badaniach ogólnopolskich prowadzonych pod kierunkiem B. Niemierki (1988) stwierdzono, że w klasach czwartych „... zadania sprawdzające umiejętność stosowania wiadomości rozwiązywane były przez 30-40%

uczniów, a umiejętnością stosowania wiadomości w sytuacjach problemowych wykazało się zaledwie 12-19% badanych. Świadczy to o tym, że nauczyciele matematyki, a wcześniej nauczyciele klas początkowych wciąż przykładają więcej uwagi do pamiętania faktów, reguł i algorytmów niż do umiejętności rozwiązywania choćby prostych zadań tekstowych, które rozwiązywane były przez nie więcej niż 30% uczniów".

Wydaje się, że jednym ze sposobów zmiany tej sytuacji jest lepsze przygotowanie nauczycieli nauczania początkowego. Jeśli oni sami pokonają strach przed zadaniami tekstowymi, nauczą się je rozwiązywać, będą tworzyć z zadań zamkniętych zadania otwarte czy też z zadań typowych nietypowe, to jest większe prawdopodobieństwo, iż przekażą również te umiejętności swoim uczniom.

Przykład 2: Poszukiwanie liczby

Wiemy, że pewna liczba jest równocześnie mniejsza od 50 i większa niż 40. Wiemy także, że jest ona parzysta i podzielna przez 3, ale nie jest podzielna przez 7.
Jaka to liczba?

Przykład 3

Łucznik oddał 5 strzałów do tarczy. Wszystkie strzały były celne. Środek tarczy ma wartość 7 punktów, następny pierścień 5 pkt, kolejny 3 pkt, a ostatni 1 pkt.

W które pola tarczy trafił łucznik jeśli otrzymał:
a) 29 pkt
b) 21 pkt
c) 11 pkt
d) 19 pkt?

Pojawić się tutaj mogą jeszcze dodatkowe pytania, np.: Czy jest więcej niż jedna możliwość otrzymania podanej wcześniej liczby punktów? Gdzie wylądowały strzały, jeśli łucznik uzyskał 35 punktów?

Przykład 4: Cztery szalone cyfry

Ile różnych dwu- i trzycyfrowych liczb można zapisać używając cyfr 1, 4, 5 i 7?

Przykład 5: Wiadomości podróżują szybko

Julia dostarcza mieszkańcom osiedla 50 gazet każdego dnia od poniedziałku do soboty. W niedzielę Julia dostarcza 80 gazet. Ile gazet dostarcza Julia w każdym tygodniu? W każdym miesiącu?

Przykład 6: Liczby pomiędzy innymi liczbami

6.1. Mam tajemniczą liczbę!
Między tą liczbą a 3 znajdziesz 5.
Między tą liczbą a 6 znajdziesz 8.
Między tą liczbą a 8 nie znajdziesz 11.
Jaka jest moja tajemnicza liczba?

6.2. Licz po 10 zaczynając od 15!
Ile liczb z tych wypowiedzianych przez ciebie będzie między 26 a 96? A ile między 7 i 97? A między 45 i 55?

6.3. Ile liczb znajduje się między 5 i 95?
A ile liczb jest między 32 i 99, między 1 i 53 oraz między 25 i 40?

Zauważmy, że we wszystkich przypadkach można formułować dodatkowe pytania. Inwencja należy do uczniów i nauczyciela. W przykładzie 6.1 treść można uzupełnić tak: „Daj kilka wskazówek, aby pomóc koledze znaleźć twoją tajemniczą liczbę. We wszystkich wskazówkach musisz użyć słowo – między". Narzędziami działalności dla uczniów przy rozwiązywaniu tych problemów mogą być przybory i środki do manipulowania, żetony, także kalkulatory, kartony z liczbami od 0-100, paski liczbowe (0-10) itp. Uczniowie mogą pracować indywidualnie, w małych lub dużych grupach; uczestniczyć będą jednak w twórczym, choć tradycyjnym procesie postępowania.

Przykład 7: Porównania i zestawienia

7.1. Weź dużo modeli figur i posortuj je według koloru. Napisz pięć zadań, w których użyjesz słów: więcej, mniej, większy niż, mniejszy niż, równy. Potem pogrupuj figury według kształtu. Używając takich słów jak poprzednio, napisz nowe zadanie. Pogrupuj figury według liczby ich boków.

7.1. Przy pomocy wyciętych modeli figur zbuduj figurę dokładnie pokrywającą narysowaną sylwetkę. Napisz zadanie, w którym użyjesz słów: większy niż, mniejszy niż, mniej, więcej. Czy możesz napisać zadanie używając słowa: równy? Zbuduj sylwetkę z wyciętych modeli figur dla swojego kolegi.

Materiałami pomocniczymi będą oczywiście modele figur, wycięte szablony z figurami, narysowane sylwetki, papier itp. W tej działalności uczeń będzie używał wzorów do tworzenia rozmaitych zbiorów, porównywał liczbę figur każdego koloru, kształtu. Zaleca się pracę w małych grupach.

Przykład 8:

Czy więcej uczniów twojej klasy nosi buty ze sznurówkami, czy na rzepy?

W przykładzie tym wymaga się od ucznia, aby posługiwał się porównywaniem zbiorów do prowadzenia obserwacji opartych na prostych, oderwanych danych dostępnych w każdej klasie. Listę pytań można rozbudować:

Jaki jest najbardziej popularny kolor włosów uczniów w klasie?

Jaki kolor bluzek i koszul jest w klasie najbardziej powszechny?

Czy więcej uczniów dojeżdża, czy przychodzi do szkoły?

Przykład 9:

Masz do zabawy 12 jednakowych kostek sześciennych. Spróbuj z tych kostek zbudować „pociąg" o takiej długości, aby można go było podzielić na połowę.

Materiały pomocnicze to: 12 jednakowych sześcianów, arkusze do pracy, kredki. Uczeń może tworzyć pociąg długi np. na 6 sześcianów i wtedy dzielić go na pół. Formułując odpowiedź powinien wykorzystać arkusz do pracy, na którym jest narysowane 6 sześcianów i pokolorować połowę pociągu jednym, a drugą połowę innym kolorem. Następujące pytania mogą służyć uporządkowaniu czynności:

Pociąg jakiej długości może być dzielony na połowę?

Jak długi pociąg może być dzielony na trzy równe części?

Jak długi pociąg może być dzielony na cztery równe części?

Jak długi pociąg może być podzielony na połowę i na trzy części, a nie może być podzielony na ćwiartki?

Jak długi pociąg można podzielić na trzy części, ale nie można podzielić ani na 2, ani na 4 części?

Który pociąg nie da się podzielić ani na połowę, ani na trzy, ani na cztery części równe?

Czy jest taki pociąg, który można podzielić na połowy, na trzy i na cztery równe części?

Przykład 10: Wielokrotności

Jestem bardzo szczególną liczbą. Jeśli liczysz co dwa, nie wypowiesz mnie, ale wypowiesz gdybyś liczył po pięć. Jeśli liczysz co 10 nie wypowiesz mnie, ale wypowiesz gdybyś liczył co 25. Nawet nie próbuj liczyć co 100, ponieważ jestem liczbą mniejszą niż 100. Jaką jestem liczbą?

Przykład 11:

Jak wiele razy liczba 2 może być dodana do samej siebie, aby suma pozostała mniejsza niż 17?

Jak wiele razy liczba 3 może być dodawana w ten sam sposób?

A cztery? Pięć?

Przykład 12: Podstawowe wyrażenia

12.1. Jeśli pomnożysz mnie przez 7, iloczyn będzie większy niż 20. Jak dodasz do mnie 4, to suma będzie większa niż 8. Jaką jestem liczbą?

12.2. Prześledź dokładnie każdy krok:
- wybierz liczbę między 1 i 5,
- dodaj 3 do tej liczby,
- pomnóż otrzymany wynik przez 2,
- odejmij 6 od tego iloczynu,
- podziel różnicę przez liczbę, którą wybrałeś na początku.

Jaką odpowiedź otrzymasz? Wybierz inne liczby i powtórz tę czynność.

Przykład 13: Wesoły pomiar

13.1. Masz tylko dwa pręty: siedmiocentymetrowy i czterocentymetrowy. Przez rysowanie wzdłuż tych prętów utwórz nowy pręt o długości 1 cm. Nie możesz ciąć ani zaginać prętów. Używając tych samych prętów utwórz pręt o długości 2 cm, 3 cm, 5 cm, 6 cm, 8 cm, 9 cm.

13.2. Masz dwie klepsydry. Jedna odmierza 7 minut, druga 5 minut. Chcesz gotować jajko dokładnie przez 9 minut. Jak to zrobić?

13.3. Mając dwa pojemniki, jeden o pojemności 3 litrów, drugi o pojemności 5 litrów, trzeba odmierzyć dokładnie 4 litery, 6 l, 7 l. Jak to zrobić?

Z treści problemów wynika, że niezbędne materiały, które powinny towarzyszyć pracy uczniów to: jednolite klocki, pręty lub paski papierowe odpowiedniej długości, klepsydry i pojemniki (jeśli są dostępne). Nasuwa się pytanie: Ile może być dróg rozwiązania tych problemów? Jedną z ważniejszych aktywności, np. w przykładzie 13.1, jest wciągnięcie uczniów w spostrzeganie związków między długościami danych przedmiotów.

Przykład 14:

Dlaczego przykrycia kanałów, włazów na ulicach są często okrągłe?

Odpowiadając na postawione pytania uczniowie powinni analizować praktyczność poszczególnych kształtów znajdujących się w ich otoczeniu. Aby zbadać ten problem można zadawać uczniom następujące pytania:
- Jakiemu celowi służą przykrycia włazów?
- Jakie są przykrycia włazów?
- Jakie istnieją inne kształty włazów?

Autorzy proponują, aby uczniowie dysponowali przygotowaną wcześniej tekturą, nożyczkami itp. Badanie problemu mogłoby obejmować konstruowanie modeli włazów przez wycinanie kół z tektury oraz dziur nieznacznie mniejszych od tych kół. (Koło musi być niewiele większe niż dziura właśnie tak, jak przykrycie włazu jest niewiele większe niż dziura, którą ten właz przykrywa). Dla porównania, bardzo interesującą próbą powinno być wycinanie także trójkątnych, prostokątnych i kwadratowych „przykryć włazów”. Podczas próby dopasowania przykryć włazów do ich poszczególnych dziur będzie można zauważyć, że przykrycia kwadratowe, trójkątne i prostokątne mogą przelecieć przez otwór jeśli przeciśnie się je pod odpowiednim kątem. Uczniowie zauważają również, że bez względu na to, jak ustawimy przykrycie kołowe (okrągłe), to nie przeleci ono przez otwór. Z przeprowadzonych tak doświadczeń i obserwacji można wysnuć przynajmniej dwa dobre wnioski:

- Wiadomo, że przykrycie włazu musi być w stanie unieść wielki ciężar, a zatem musi być ono bardzo odporne i wytrzymałe, a to znaczy, że musi być zrobione z metalu. Przykrycie takie będzie więc ciężkie. Okrągłe przykrycie włazu można będzie toczyć i wobec tego łatwo można je przemieścić.
- Okrągłe przykrycie włazu nigdy nie wpadnie w otwór, do którego jest dopasowane.

Idąc dalej pojawiają się na przykład następujące pytania:

– Jakie kształty o danych wymiarach pokrywają większą część powierzchni?

– Dlaczego pszczoły mają plastry z oczkami w kształcie sześciokątów?

ZAKOŃCZENIE

Każda z przedstawionych sytuacji może rodzić u uczniów pytania. Zadanie może formułować sam uczeń odpowiednio kierowany przez nauczyciela, wykonując doświadczenia na konkretnym materiale lub obserwując odpowiednią ilustrację. Sformułowane problemy są otwarte ze względu na sposób rozwiązania, nic w ich treści nie zawiera sugestii jakim sposobem należy rozwiązać, wszystko zależy od pomysłowości uczniów. Zadania te są otwarte również ze względu na możliwość udzielenia różnych odpowiedzi. Propozycje uczniów muszą być weryfikowane i dyskutowane. Wydaje się, że tego typu zadania mogą rzeczywiście pobudzać uczniów do prawidłowej aktywności twórczej (Siwek 1984).

W zakończeniu chcę uwypuklić jeszcze jeden aspekt. Pojawia się bowiem ważny postulat dla nauczycieli, aby pomogli uczniom uznać problemy, którymi się zajmują za własne (Krygowska 1959). Zainteresowanie tą dziedziną umysłową będzie wtedy dużo większe. Trudno się dziwić, że matematyka jest dla wielu uczniów czymś obcym w życiu, martwym, skoro spotykają się oni prawie zawsze z problemami zamkniętymi i podchodzą do nich ze świadomością, iż zostały one już dawno rozwiązane – zna je nauczyciel czy też rozwiązania te są podane na końcu podręcznika.

Zauważono też (Kujawiński 1982), że na ogół bardziej aktywizują uczniów klas niższych matematyczne problemy praktyczne niż teoretyczne, zwłaszcza jeśli wykazują związek z doświadczeniami i dążeniami dzieci.

LITERATURA

Craig Loewen A., 1991, *Mathematical Problem Solving in the Primary Grades*, The University of Lethbridge.

Galant J., 1975, *Dostrzeganie i rozwiązanie problemów w klasach podstawowych*, Warszawa.

Kruszewski K., 1991 *Sztuka nauczania. Czynności nauczyciela*, PWN, Warszawa.

Krygowska Z., 1986, *Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich*, Dydaktyka Matematyki, t.6, s.25-41.

Krygowska Z., 1985, *Kształcenie aktywności matematycznej uczniów i rola problemów w tym kształceniu. Wybór artykułów Z. Krygowskiej z lat 1958-1972*, WN WSP, Kraków.

Krygowska Z., 1977, *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 1, 2 i 3, WSiP, Warszawa.

Krygowska Z., 1959, *Uwagi o zadaniach matematycznych rozwiązywanych w szkole*, Matematyka 5-6.

Kujawiński J., 1982, *Rola problemów otwartych w nauczaniu początkowym*, Poznań.

Nęcka E., 1994, *TROP... Twórcze rozwiązywanie problemów*, IMPULS, Kraków.

Nędza E., 1991, „Problemy otwarte i sposoby ich rozwiązywania przez uczniów klas początkowych". Praca magisterska wykonana pod kierunkiem H. Siwek, WSP Kraków, maszynopis.

Niemierko B., 1988. *Badania osiągnięć matematycznych uczniów klas IV testem sprawdzającym wielostopniowym*, s.52-89, oprac. J. Nowik.

Nowak W., 1989, *Konwersatorium z dydaktyki matematyki*, PWN, Warszawa.

Polya G., 1975 *Odkrycie matematyczne*, WNT, Warszawa.

Przetacznik-Gierowska M., 1992, *Problemy psychodydaktyki nauczania początkowego*, WSiP, Warszawa.

Semadeni H., 1981, *Nauczanie początkowe matematyki*, t. 3. PWN, Warszawa.

Siwek H., 1984, *Problemy otwarte*, Oświata i Wychowanie nr 7, wersja B, s. 45-54.

Turnau S., 1978, *Rola podręcznika szkolnego w kształceniu pojęć i rozumowań matematycznych na poziomie pierwszej klasy ponadpoczątkowej*, WN WSP, Kraków.

Turnau S., 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa.