ROCZNIK NAUKOWO–DYDAKTYCZNY WSP W KRAKOWIE
Zeszyt 189 Prace Matematyczne XIV 1997

Zenon Moszner

Fonctions homothétiques et l'équation de translation

Résumé. On montre que les deux définitions de la fonction homothétique sont équivalentes. Une liaison entre cette fonction et la solution de l'équation de translation permet recevoir les propriétés de cette fonction formulées dans [2] d'une autre façon. De plus on donne une construction des fonctions homogènes et des fonctions homothétiques, définies des manières diverses, par les résultats de la théorie générale de l'équation de translation.

J. C. Candeal et E. Indurain dans [2], en considérant les définitions différentes des fonctions homogènes en économie, ont donnés comme une généralisation de cette notion entre autres les deux définitions de la fonction homothétique: une d'après J. K. Whitaker et B. T. McCallum [12] et la deuxième d'après R. Färe [3]. Ces définitions sont suivantes.

Soit $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\mathbb{R}_+^n = (\mathbb{R}_+)^n$, $X \subset \mathbb{R}_+^n$ un cône et $f : X \to \mathbb{R}$.

Definition 1 (J. K. Whitaker et McCallum). La fonction f et dite homothétiques si

$$\forall x, y \in X \ \forall t \in \mathbb{R}_+ : f(x) = f(y) \Rightarrow f(tx) = f(ty) \tag{1}$$

Definition 2 (R. Färe). La fonction f est dite homothétique s'il existe une fonction $F : f(X) \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in X \ \forall \lambda \in \mathbb{R}_+ : f(\lambda x) = F(f(x), \lambda) \tag{2}$$

Nous montrerons que ces deux définitions sont équivalents et que la fonction F dans la définition 2 ne peut pas être arbitraire, elle doit remplir l'équation suivante

$$F(F(a, \lambda), \mu) = F(a, \lambda\mu), \tag{3}$$

AMS (1991) subject classification: 39B12, 39B22.

nommée l'équation de translation, et la condition

$$F(a, 1) = a, \tag{4}$$

nommée la propriété d'identité.

Cette deuxième remarque et les résultats de la théorie générale de l'équation de translation (voir p. ex. [9]) nous permettent recevoir les propriétés de la fonction homothétique au sens de la définition 1 données dans [2] et généraliser ces propriétés. Quelques propriétés des fonctions homothétiques (généralement homogènes) sont données aussi dans [1] et généralisées dans [7] et [8]. En remplaçant dans (2) l'homothétie λx par un groupe des transformations G d'un espace X nous recevons l'équation par rapport à f nommée l'équation du comitant (généralisée) et résous dans [11] sous les suppositions complémentaires au sujet du groupe G et dans [6] sans ces restrictions par la forme de la solution générale de l'équation de translation sur un groupe [5].

Dans [2] sont données aussi les définitions de l'homogéneité et de l'homothéticité moins générales que les définitions 1 et 2. Ces sont les définitions:

DEFINITION 3. La fonction f est dite homogène de dégré m si

$$\forall x \in X \ \forall \lambda \in \mathbb{R}_+ : f(\lambda x) = \lambda^m f(x).$$

DEFINITION 4 (K. Lancaster [4]). La fonction f est dite homothétique s'il existe une fonction $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in X \ \forall \lambda \in \mathbb{R}_+ : f(\lambda x) = \Phi(\lambda) f(x).$$

DEFINITION 5 (p. ex. [2]). La fonction f est dite homothétique s'ils existent une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et une fonction $h : X \to \mathbb{R}$ homogène au sens de la définition 3 telles que

$$\forall x \in X : f(x) = g(h(x)).$$

On donne en fin de la note la construction des fonctions de cette sorte par la théorie générale de l'équation de translation.

1. On voit facilement que la fonction $f : X \to \mathbb{R}$ remplissante (2) satisfait aussi à (1). Inversement si la fonction f rempli (1), on peut considérer une fonction $F : f(X) \times \mathbb{R}_+ \to f(X)$ défine comme il suit: $(a, \lambda) = (f(x), \lambda) \to f(\lambda x)$. Cette fonction est bien définie ($F(a, \lambda) = f(\lambda a)$ ne dépend pas du choix de x) d'après (1) et de plus (2) a lieu. Les définitions 1 et 2 sont donc équivalentes.

2. Nous avons pour la fonction F remplissante (2) pour $a = f(x)$:

$$\begin{aligned} F(F(a,\lambda),\mu) &= F(F(f(x),\lambda),\mu) = F(f(\lambda x),\mu) = f(\mu\lambda x) \\ &= F(f(x),\lambda\mu) = F(a,\lambda\mu), \end{aligned}$$

donc F remplit (3) pour $a \in f(X)$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$. De plus $F(a,1) = F(f(x),1) = a$, alors F remplit (4).

Inversement si nous considérons une fonction $F : E \times \mathbb{R}_+ \to E$, pour $E \subset \mathbb{R}$, remplissante (3) et (4) pour $a \in E$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$, si nous prenons une fonction $f : S \to E$ arbitraire, où S est un sélecteur de la famille des classes d'équivalence de la relation

$$x \rho y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ : x = \lambda y \tag{5}$$

pour $x, y \in X$ (un cône dans $\mathbb{R}_+$) et si nous posons

$$f(x) = f(\lambda s) = F(f(s),\lambda) \tag{6}$$

pour $x = \lambda s$, $s \in S$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, nous recevons une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ bien définie et qui remplit (2) avec la fonction F comme plus haut. En effet f est bien définie puisque d'après (4) $F(f(s),1) = f(s) = f(1 \cdot s)$. De plus si $x \in X$ ils existent un $s \in S$ et un $\mu \in \mathbb{R}_+$ tels que $x = \mu s$, d'où pour $\lambda x = \lambda\mu s$ et de là

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= f(\lambda\mu s) = F(f(s),\lambda\mu) = F(F(f(s),\mu),\lambda) = F(f(\mu s),\lambda) \\ &= F(f(x),\lambda). \end{aligned}$$

Il résulte de nos considérations qu'on peut recevoir toutes les fonctions homothétiques sur un cône X par la procédure suivante: prendre un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ arbitraire, construire une solution $F : E \times \mathbb{R}_+ \to E$ de l'équation de translation (3) remplissante (4) et définir f comme plus haut.

Puisque on peut prolonger chaque solution $F : E \times \mathbb{R} \to E$ de (3) et (4) à la solution $F^* : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ remplissante (4) de la manière suivante:

$$F^*(a,\lambda) = \begin{cases} F(a,\lambda) & \text{si } a \in E,\ \lambda \in \mathbb{R}_+, \\ a & \text{si } a \in \mathbb{R} \setminus E,\ \lambda \in \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

on peut considérer dans cette procédure les solutions F de (3) et (4) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

3. On sait [5] qu'on peut construire chaque fonction $F : \Gamma \times G \to \Gamma$, où Γ est un ensemble arbitraire et $(G, \cdot)$ forme un groupe, remplissante (3) et (4), où 1 dans (4) désigne l'élément neutre de G, de la manière suivante:

(a) décomposons $\Gamma = \bigcup_{k\in K} \Gamma_k$, où $\Gamma_k \neq \emptyset$ et $\Gamma_k \cap \Gamma_l = \emptyset$ pour $k \neq l$, de la manière qu'il existe pour chaque $k \in K$ un sousgroupe G_k du groupe G tel que $\operatorname{card} \Gamma_k = \operatorname{card} G/G_k$, où $G/G_k = \{G_k\lambda : \lambda \in G\}$,

(b) soit $g_k : \Gamma_k \to G/G_k$ une bijection,

(c) posons

$$F(a, \lambda) = g_k^{-1}(g_k(a)\lambda) \quad \text{pour } a \in \Gamma_k . \tag{7}$$

Nous avons $\Gamma = \mathbb{R}$ et $(G, \cdot) = (\mathbb{R}_+, \cdot)$ dans nos considérations précédentes. Nous allons montrer que ces considérations avec la construction plus haut nous permettent recevoir les propriétés de la fonction homothétique données dans [2] dans les théorèmes 1, 2 et 3.

4. On constate dans le théorème 1 dans [2] qu'il existe pour une fonction homothétique $f : X \to \mathbb{R}$ une décomposition $X = \bigcup_{j\in J} X_j$, où X_j sont des cônes, telle que la réstriction f_j de la fonction f à X_j est une fonction radiale ou une fonction d'une période logarithmique, c. à d.

(i) il existe un nombre $r \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda f_j^{-1}(r) \cap \mu f_j^{-1}(r) = \emptyset$ pour $\lambda \neq \mu$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ et $f_j^{-1}(r)$ est un générateur de X_j

ou

(ii) il existe un nombre $T > 1$ tel que $f_j(Tx) = f_j(x)$ pour chaque $x \in X_j$.

Si nous prenons pour X_j les cônes disjoints $\{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}_+\}$ pour $x \in X$ (les rayons dans X) nous voyons d'après les considérations dans 2 que $f_j(\lambda s) = F(f(s), \lambda)$ pour s fixé dans X_j et λ variant sur $\mathbb{R}_+$. Nous avons d'après la construction dans 3 que $F(f(s), \lambda) = g_k^{-1}(g_k(f(s))\lambda)$ pour $f(s) \in \Gamma_k$.

Si $G_k = \{1\}$, g_k est une bijection de Γ_k sur $G = \mathbb{R}_+$ (nous identifions ici et dans la suite $G/\{1\}$ avec G) et de là $F(f(s), \lambda)$ est comme la fonction de λ une injection sur $\mathbb{R}_+$, d'où $f_j(\lambda s)$ est une injection par rapport à λ. Il en résulte que f_j est une injection sur X_j , alors pour $r = f(s)$ on a: $\lambda f_j^{-1}(r) \cap \mu f_j^{-1}(r) = \{\lambda s\} \cap \{\mu s\} = \emptyset$ pour $\lambda \neq \mu$ et puisque $f_j^{-1}(r) = s$, $f_j^{-1}(r)$ est un générateur de X_j . Par conséquent nous avons (i).

Si $G_k \neq \{1\}$, il existe $T > 1$ tel que $T \in G_k$, d'où pour $x \in X_j$, $x = \lambda s$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}_+$, pour $f(s) \in \Gamma_k$ et $g_k(f(s)) = G_k\mu$:

$$\begin{aligned} f_j(Tx) &= f_j(T\lambda s) = F(f(s), T\lambda) = g_k^{-1}(g_k(f(s))T\lambda) = g_k^{-1}(G_k\mu T\lambda) \\ &= g_k^{-1}(G_k T\mu\lambda) = g_k^{-1}(G_k\mu\lambda) = g_k^{-1}(g_k(f(s))\lambda) = f_j(\lambda s) = f_j(x), \end{aligned}$$

alors (ii) a lieu dans ce cas.

Les raisonnements plus haut restent valable si nous prenons au lieu de $\mathbb{R}^n$ l'espace vectoriel V sur un corps commutatif et ordonné K et si nous considérons la fonction $f : X \to Z$, où X forme un ensemble radial (c. à d. $\{\lambda x : \lambda \in K_+\} \subset X$ pour chaque $x \in X$) dans V et Z est un ensemble arbitraire. Dans ce cas $(G, \cdot) = (K_+, \cdot)$, où $K_+ = \{\lambda \in K : \lambda > 0\}$.

5. Passons au théoreme 2 dans [2]. Il dit que si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ $(n = 1)$ est une fonction homothétique et $g(x) = f(e^x)$, dans ce cas

(α) g est une injection sur $\mathbb{R}$

ou

(β) il existe $T > 0$ tel que T est une période de g et g est injective sur $[0, T)$

ou

(γ) $g = \sum_{j\in J} r_j \chi_{E_j} + r\chi_E$, où $J \subset \mathbb{R}$, r_j, r sont différents, $(E, +)$ est un sous-groupe de groupe $(\mathbb{R}, +)$, $E_j = \{j\} + E$ $(j \notin E), E \cup \{E_j : j \in J\}$ est une décomposition de $\mathbb{R}$ et χ_A est la fonction caractéristique de l'ensemble A.

Dans le cas $n = 1$ on a seulement une classe d'équivalence de la relation (5), d'où il suffit prendre $s = 1$ et $f(s) = a$ (arbitraire, fixé, réel) dans (6), alors $f(\lambda) = F(a, \lambda)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$, où la fonction F remplit (3) et (4). Par conséquent $g(x) = f(e^x) = F(a, e^x)$ et la fonction $H(z, x) = F(z, e^x)$ remplit les conditions suivantes:

$$H(H(z, x), y) = H(z, x + y) \quad \text{pour } x, y, z \in \mathbb{R} \quad \text{et } H(z, 0) = z \quad \text{pour } z \in \mathbb{R}.$$

Elle doit donc être de la forme (7) avec $\Gamma = \mathbb{R}$ et $(G, \cdot) = (\mathbb{R}, +)$. Puisque

$$g(x) = H(a, x) = g_k^{-1}(g_k(a) + x) \quad \text{pour } a \in \Gamma_k,$$

alors si

1) $G_k = \{0\}$ la fonction $g(x)$ doit être injective, donc nous avons (α),

2) $G_k = \{cT : c \text{ entier arbitraire}\}$ pour un $T > 0$ et réel, dans ce cas puisque $H(a, T) = a$ on a

$$g(x + T) = H(a, x + T) = H(H(a, T), x) = H(a, x) = g(x),$$

donc la fonction g a T comme période. Si $g(x) = g(y)$ pour $x, y \in [0, T)$ et $g_k(a) = G_k + b$, alors $g_k^{-1}(g_k(a)+x) = g_k^{-1}(g_k(a)+y)$, d'où $g_k(a)+x = g_k(a) + y$, d'ici $x - y \in G_k$, donc $x = y$. La fonction g est donc injective sur $[0, T)$, alors (β) a lieu,

3) G_k est dense dans $\mathbb{R}$, dans ce cas nous avons (γ) par la construction (a), (b), (c) dans le point 3 ($E = G_k$; $\{E_j\}_{j\in J} = \mathbb{R}/G_k \setminus \{G_k\}$; $r = g_k^{-1}(G_k)$; $r_j = g_k^{-1}(E_j)$).

6. Considérons le théorème 3 dans [2]: si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction homothétique et continue, dans ce cas il existe une décomposition $X = \bigcup_{j\in J} X_j$, où X_j forment aussi des cônes, telle que la réstriction f_j de la fonction f à X_j

(A) est une fonction stable

ou

(B) il existent les deux fonctions m, h continues telles que $h : X_j \to \mathbb{R}$ est homogène de dégré 1, $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est injective et $f = m(g)$.

Remarquons au commencement qu'il y a une lacune dans la démonstration dans [2] de ce théoreme. On reçoit la thése (A) par le corollaire 1, affirmant que ce corollaire est une conclusion simple du théorème 2. Cela n'est pas vrai puisque la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ homothétique qui n'est pas injective peut être da la forme $f(x) = g(\ln x)$, où g remplit la thése (β) ou la thèse (γ) du théorème 2. Dans le cas (γ) l'ensemble des périodes de g doit être dense dans $\mathbb{R}$, alors g, d'où f, doivent être stables comme continues. Dans le cas (β) l'ensemble des périodes de g peut avoir "a priori" la forme $\{cT_0 : c \text{ entier}\}$ pour un $T_0 > 0$ et il faut montrer que cette forme est impossible pour g continue. Nous allons ça montrer par "reductio ad absurdum". Remarquons que si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est homothétique, $g(x) = f(e^x)$ remplit la condition

$$g(x) = g(y) \Rightarrow g(x+z) = g(y+z) \tag{8}$$

pour chaque $x, y, z \in \mathbb{R}$. Nous avons d'après (β) que $g(0) = g(T)$ pour un $T > 0$, donc g, comme continue, doit avoir maximum ou minimum dans l'intervalle ouvert $(0, T)$. Il en résulte qu'il existent x et y dans $(0, T)$ pour lesquels $0 < x - y < T_0$ et $g(x) = g(y)$. Nous avons par (8): $g(x + u) = g(y + u)$ pour u arbitraire dans $\mathbb{R}$, d'où $g(u + x - y) = g(u)$. Par conséquent $x - y$ est une période de g, contrairement à l'inégalité $0 < x - y < T_0$.

Revenons au théorème 3 dans [2]. En considérant comme dans le point 4 pour le théorème 1 nous avons les deux possibilités: $G_k \neq \{1\}$ et $G_k = 1$.

Dans le cas premier nous avons constaté dans le point 4 que (ii) a lieu, alors la fonction $g_j(\alpha) = f_j(e^{\alpha}s)$ a $\ln T$ comme une période. Puisque g_j est continue nous avons vu plus haut qu'elle doit avoir l'ensemble des périodes dense dans $\mathbb{R}$, alors elle est stable. Par conséquent f_j est stable dans ce cas, alors (A) a lieu.

Dans le cas $G_k = \{1\}$ nous avons par (c):

$$f_j(\lambda s) = F(f(s), \lambda) = g_k^{-1}(g_k(f(s))\lambda) \quad \text{pour } f(s) \in \Gamma_k\,, \tag{9}$$

où g_k est une bijection de $\Gamma_k \subset \mathbb{R}$ sur G/G_k. Désignons $a = g_k(f(s))$ et constatons que $a \in \mathbb{R}_+$. Puisque $\lambda \to f_j(\lambda s)$ est continue, $g_k^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \Gamma_k$ est continue. Soit $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un prolongement continue de la fonction g_k^{-1} et définissons pour $x \in X_j : h(x) = h(\lambda s) = a\lambda$. La fonction $h : X_j \to \mathbb{R}$ est évidemment continue et homogène de dégré 1 et d'après (9) nous avons $f_j = m(h)$, d'où (B) a lieu.
Remarquons qu'il suffit seulement supposer que la fonction $\lambda \to f(\lambda x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (la continuité de f pas sur X mais sur les rayons de X) pour notres considérations présédentes.

7. Puisque la fonction f remplissante les conditions de la définition 3 ou de la définition 4 ou de la définition 5 est aussi homothétique au sens de la définition 1 (ou 2), alors elle doit être de la forme (6), où F a la forme (7). Puisque F dans (7) est déterminée par les bijections g_k il suffit donc indiquer ces bijections g_k pour avoir la forme de f par (6). Nous allons montrer ces bijections. Si $f = 0$ dans n'importe quelle des ces définitions il suffit prendre $G_k = \mathbb{R}_+$ et $g_k = 0$. Nous supposons dans la suite que $f \neq 0$. Dans le cas de la fonction f remplissante les conditions de la définition 5 il suffit prendre $g_k(a) = [g^{-1}(a)]^{\frac{1}{m}}$ pour $a \in \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante. En particulier pour la fonction f remplissante les conditions de la défninition 3 nous avons pour g_k la même formule avec $g(a) = a$. Pour la fonction f remplissante les conditions dans la définition 4 la situation est en peu plus compliqée, puisque la fonction Φ dans cette définition ne doit pas être injective. Si $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ avec une fonction $f \neq 0$ remplissent $f(\lambda x) = \Phi(\lambda)f(x)$, dans ce cas Φ doit remplir la condition $\Phi(\lambda\mu) = \Phi(\lambda)\Phi(\mu)$, c. à d. Φ est un homomorphisme, d'où Φ est constant sur les éléments de la famille $\mathbb{R}_+/\Phi^{-1}(\{1\})$ et pour les éléments differéntes a les valeurs diverses. En prenant $G_k = \Phi^{-1}(\{1\})$ nous pouvons définir $g_k^{-1}(C) = \Phi(\lambda)$ pour $\lambda \in C \in \mathbb{R}_+/G_k$, pour avoir (6) avec F définie par (7). En effet si $g_k(f(s)) = G_k\mu$ pour un $\mu \in \mathbb{R}_+$, alors $f(s) = g^{-1}(G_k\mu) = \Phi(\mu)$, d'où

$$f(\lambda s) = g_k^{-1}(g_k(f(s))\lambda) = g_k^{-1}(G_k\mu\lambda) = \Phi(\mu\lambda) = \Phi(\lambda)\Phi(\mu) = \Phi(\lambda)f(s).$$

Travaux cités

[1] Aczél J., Moszner Z., *New results on "scale" and "size" arguments justifying invariance properties of empirical indices and laws,* Math. Social Sci. **28** (1994), 3-33.

[2] Candeal J. C., Indurain E., *On the structure of homothetic functions,* Aequationes Math. **45** (1993), 207-218.

[3] Färe R., *On scaling laws for production functions,* Zeitschrift für Operations Research, (1973), 195-205.

[4] Lancaster K., *Mathematical Economics,* Macmillan, New York, 1968.

[5] Moszner Z., *Structure de l'automate plein, réduit et inversible,* Aequationes Math. **9/1** (1973), 46-59.

[6] Moszner Z., *Sur l'équation du comitant,* Tensor **51/3** (1992), 205-208.

[7] Moszner Z., *Sur les fonctions des niveaux invariants,* Opuscula Math **14** (1994), 143-151.

[8] Moszner Z., *Sur des fonctions des niveaux invariantement ordonnés,* Annales Math. Silesianae **8** (1994), 59-68.

[9] Moszner Z., *General theory of the translation equation,* Aequationes Math. **50/1/2** (1995), 17-37.

[10] Shephard R. W., *Cost and production functions,* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1953.

[11] Topa S., *On a generalization of homogeneous functions,* Publicationes Math. **13/1-4** (1966), 289-300.

[12] Whitaker J. K., McCallum B. T., *On homotheticity of production functions,* Western Economic Jurnal **9** (1971), 57-63.

Ecole Normale Supérieure
Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
Pologne

Manuscript received December 12, 1994